Corrado Segre

Su una trasformazione irrazionale dello spazio e sua applicazione allo studio del complesso quadratico di Battaglini e di un complesso lineare di coniche iscritte in un tetraedro

Giornale di Mat., Vol. **21** (1883), p. 355–378

in: Corrado Segre, Opere, a cura della Unione Matematica Italiana, Volume III, Edizione Cremonese, Roma, 1961, p. 234–261

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Segre_CW_3_234>

XLVI.

SU UNA TRASFORMAZIONE IRRAZIONALE DELLO SPAZIO E SUA APPLICAZIONE ALLO STUDIO DEL COMPLESSO QUADRATICO DI BATTAGLINI E DI UN COMPLESSO LINEARE DI CONICHE ISCRITTE IN UN TETRAEDRO

« Giornale di matematiche di BATTAGLINI », vol. XXI, 1883, pp. 355-378.

Il complesso quadratico di rette rappresentabile rispetto ad un tetraedro di riferimento mediante un'equazione contenente soltanto i quadrati delle coordinate fu, com'è noto, studiato per la prima volta dal prof. BATTAGLINI (1). Il KLEIN poi mostrò (2) che quello non è il complesso quadratico più generale. In fatti, benchè alcune delle proprietà trovate dal BATTAGLINI, particolarmente quelle che riguardano le superficie del complesso, spettino pure al più generale complesso quadratico, altre invece, e specialmente quelle relative alla superficie singolare, sono casi particolari di proprietà spettanti ai complessi quadratici generali, quali furono studiati da PLÜCKER e da KLEIN. Queste proprietà caratteristiche del complesso di BATTAGLINI sono assai notevoli. Oltre a quelle trovate da questo scienziato altre sono note, dovute all'ASCHIERI, che mostrò un modo assai semplice di definire geometricamente quel complesso (3). Da que-

(1) *Intorno ai sistemi di rette di secondo grado* (Atti Acc. Napoli, 1866; Giornale di matem., 6, pp. 239-258 e 7, pp. 55-75).

(2) *Zur Theorie der Liniencomplexe I. und II. Grades*, n. 24 (Math. Ann., II).

(3) V. *Sopra unco mplesso di secondo grado* (Giornale di matem., 8, pp. 35-37). Anche lo SCHUR nel recente lavoro: *Ueber das System zweier Flächen* 2. *Grades* etc. (Math. Ann., XXI, pp. 515-527) trovò da sè i risultati dell'ASCHIERI condottovi però da ricerche di altro genere riguardanti una posizione particolare notevole di due quadriche. In un lavoro, che si sta pubblicando nei Mathematische An-

sta ricerca dell'ASCHIERI segue che il complesso di BATTAGLINI si può considerare come una trasformazione proiettiva del complesso quadratico studiato dal PAINVIN (4) delle rette da cui partono piani tangenti ad un ellissoide perpendicolari tra loro, precisamente come il *tetraedroide*, che ne è superficie singolare, può considerarsi come una trasformazione proiettiva della *superficie delle onde* di FRESNEL, che è superficie singolare del complesso di PAINVIN. Ora tutte quelle proprietà note del complesso di BATTAGLINI, insieme con alcune altre, che crediamo nuove e che furono da noi esposte in alcune conferenze della scuola di Magistero della R. Università di Torino nell'anno scolastico 1881-82, mostreremo nel presente lavoro come si possano tutte dedurre con molta semplicità da una rappresentazione di quel complesso di rette su un complesso lineare di coniche tangenti a 4 piani fissi. Questa rappresentazione, a cui si è condotti naturalmente dal fatto che l'equazione del complesso di rette contiene solo i quadrati delle coordinate di queste, vale a dire che quel complesso è *simmetrico* rispetto al tetraedro di riferimento, si ottiene mediante una notevole trasformazione irrazionale dello spazio di punti, la quale, malgrado la sua importanza, sembra esser stata finora poco studiata. Essa dà pure tutte le proprietà note del tetraedroide rappresentandolo con una superficie di 2° ordine e dal fatto che questa contiene due distinti sistemi di generatrici conduce a conchiudere l'esistenza di due diversi sistemi di quartiche sul tetraedroide ed a trovare il legame tra questa proprietà del tetraedroide e quella di essere superficie singolare per due diversi complessi di BATTAGLINI, proprietà questa, che crediamo non sia ancor stata notata, benchè si potesse far discendere, come mostreremo, da alcune osservazioni del BATTAGLINI e di KLEIN.

Nel paragrafo I di questo lavoro faremo anzitutto alcune considerazioni sulla *simmetria* rispetto ad un tetraedro e nel II mostreremo come essa conduca naturalmente alla suddetta trasformazione

---

nalen, fatto insieme col nostro carissimo amico Dott. GINO LORIA [V. questo volume, pp. 1-24], noi siamo appunto partiti dalla proprietà del complesso di BATTAGLINI trovata dall'ASCHIERI di essere l'insieme delle rette che tagliano armonicamente due quadriche ed abbiamo cercato tutti i complessi quadratici che si possono generare in questo modo con una scelta conveniente delle due quadriche. Questa categoria di complessi è assai numerosa e comprende vari complessi importanti, di cui alcuni furono incontrati in ricerche svariatissime dai signori WEILER, DARBOUX, HIRST, BALL ed altri; si ha così per tutti questi complessi quadratici un modo uniforme e assai interessante di studiarli.

(4) V. Nouv. ann. de math,, 1872.

irrazionale dello spazio e daremo le principali proprietà di questa. Qualcuna delle cose che così esporremo in questi due paragrafi non riuscirà probabilmente nuova; pure ci era indispensabile esporle in modo completo, costituendo esse nel loro insieme la base della nostra Memoria e non conoscendo noi alcun lavoro in cui esse si trovino metodicamente svolte. Inoltre nel paragrafo II daremo alcune applicazioni interessanti di quella trasformazione, specialmente alla teoria delle superficie di 4^0 ordine di STEINER ed alla teoria delle quartiche di 1^a specie su una quadrica. Nel paragrafo III finalmente passeremo alla teoria del complesso di BATTAGLINI e del complesso lineare di coniche che lo rappresenta, e, rivolgendo la ricerca diretta ora sull'uno ora sull'altro di questi due complessi, secondo che appare più conveniente, giungeremo a conoscere le proprietà più importanti di entrambi. Così verranno studiate successivamente la generazione geometrica dei due complessi, le proprietà delle rette singolari dell'uno e delle coniche singolari dell'altro e quelle delle superficie singolari di entrambi. Per ultimo ci fermeremo alla considerazione di queste superficie e dalle proprietà della superficie singolare del complesso di coniche, cioè di una quadrica, dedurremo quelle del tetraedroide.

I.

1. Riferendo lo spazio ordinario ad un tetraedro qualunque T, siano (x_1, x_2, x_3, x_4) le coordinate di un punto qualunque, e consideriamo insieme con esso i 3 punti che hanno quelle stesse coordinate, ma con due cambiamenti di segno, e i 4 punti che hanno le stesse coordinate, ma con un cambiamento di segno (oppure tre). Gli 8 punti, che così abbiamo, formano un gruppo chiuso in se stesso, cioè tale che con quelle operazioni si ottiene lo stesso gruppo da qualsiasi punto di esso si parta. Due punti qualunque del gruppo differenti pei segni di due coordinate, p. e. (x_1, x_2, x_3, x_4) e $(-x_1, -x_2, x_3, x_4)$, sono coniugati armonici rispetto ai due punti in cui la loro congiungente taglia gli spigoli opposti 12, 34 di T, e li diremo perciò *simmetrici* rispetto a questa coppia di rette. Due punti invece, i quali differiscano pel segno di una sola coordinata, p. e. (x_1, x_2, x_3, x_4), $(-x_1, x_2, x_3, x_4)$, sono congiunti da una retta passante pel vertice 1 di T e sono divisi armonicamente da questo punto e dalla sua faccia opposta; essi si possono perciò chiamare *simmetrici* rispetto a quel punto e quel piano. Queste due specie di

simmetrie non sono altro che le due specie diverse di omografie involutorie che vi sono nello spazio di punti ordinario, cioè l'involuzione rispetto ad una congruenza lineare fondamentale, e l'omologia armonica rispetto ad un centro ed un piano di omologia.

Il gruppo considerato di 8 punti (divisi in due quaterne) si dirà *simmetrico* rispetto al tetraedro T.

2. In generale una figura qualunque composta di coppie di punti simmetrici rispetto a due elementi opposti (spigoli, o vertice e faccia) di T si dirà *simmetrica* rispetto a questa coppia di elementi; se poi essa è tutta composta di gruppi di 8 punti simmetrici rispetto al tetraedro T, essa si dirà *simmetrica* rispetto a questo.

Se un punto si muove descrivendo una figura qualunque, i suoi sette punti simmetrici rispetto alle coppie di spigoli o di vertici e facce di T descriveranno in generale 7 altre figure, che sono simmetriche alla prima rispetto alle stesse coppie di elementi di T e formano con essa un gruppo simmetrico rispetto a T. In particolare se quel punto descrive un piano ovvero una retta, abbiamo che il corrispondente gruppo di 8 punti descriverà un gruppo simmetrico di 8 piani o di 8 rette e si trovano così facilmente per questi gruppi le proprietà seguenti mediante la considerazione delle coordinate, od anche direttamente dalla loro definizione geometrica.

3. Rispetto ad un tetraedro T i piani dello spazio formano gruppi di 8 piani simmetrici, essendo ciascun gruppo diviso in due quaterne. Due piani della stessa quaterna sono separati armonicamente da due spigoli opposti di T e differiscono pei segni di 2 coordinate. Due piani dello stesso gruppo, ma di diverse quaterne, differiscono pel segno di 1 coordinata (o di 3) e sono separati armonicamente da un vertice e dalla faccia opposta di T.

4. Rispetto al tetraedro T le rette dello spazio formano gruppi simmetrici di 8 rette, ciascun gruppo essendo diviso in due quaterne. Due rette della stessa quaterna differiscono solo pei segni di 2 coordinate complementari e sono in una rigata quadrica coniugate armoniche rispetto ai due spigoli opposti corrispondenti di T; due rette di quaterne diverse differiscono pei segni di 3 coordinate non complementari (corrispondenti cioè a 3 spigoli tagliantisi mutuamente) e sono separate armonicamente da un vertice e dalla faccia opposta di T. Ne segue che due rette della stessa quaterna non

possono tagliarsi, ma che due rette appartenenti alle due diverse quaterne relative allo stesso gruppo si tagliano sempre su una faccia di T e stanno in un piano che passa pel vertice opposto. Quindi le 4 rette dell'una quaterna tagliano le 4 dell'altra in 16 punti posti a 4 a 4 sulle 4 facce di T, sicchè quelle 2 quaterne di rette stanno su una quadrica, appartenendo rispettivamente ai due diversi sistemi di generatrici di questa; la quadrica stessa ha T per tetraedro proprio-coniugato.

Le 8 rette del gruppo si possono considerare come descritte dagli 8 punti rispettivamente di un gruppo simmetrico rispetto a T, e sono da questi punti punteggiate proiettivamente. E siccome quando l'un punto del gruppo viene a stare su una faccia di T, le due quaterne del gruppo vengono a coincidere in una quaterna di punti di quella faccia simmetrici rispetto al triangolo che essa contiene di T, così potremo dire che ciascuna delle 8 rette di un gruppo simmetrico è tagliata dalle 4 facce del tetraedro (ossia dalle 4 rette di diversa quaterna) in 4 punti il cui rapporto anarmonico è lo stesso per tutte le 8 rette, cioè queste appartengono ad uno stesso complesso tetraedrale relativo a T. Ciò risulta pure del resto dall'appartenere quelle 8 rette ad una stessa quadrica e si può anche dedurre immediatamente dalla considerazione della forma dell'equazione del complesso tetraedrale e della differenza tra i segni delle coordinate delle 8 rette del gruppo.

5. Evidentemente sono simmetriche rispetto a T tutte le superficie le cui equazioni contengono solo le potenze pari delle coordinate (di punti o di piani). In particolare sono tali tutte le quadriche aventi T per tetraedro proprio-coniugato; se una tal quadrica passa per un punto di un gruppo simmetrico, passerà pure per gli altri 7, sicchè gli 8 punti di un gruppo simmetrico si possono riguardare come i punti d'intersezione di tre quadriche aventi un tetraedro proprio-coniugato comune T. Similmente se consideriamo i gruppi di 4 punti simmetrici rispetto a T giacenti in una faccia di T, ogni conica giacente nella stessa e simmetrica rispetto a T ha quel triangolo per proprio-coniugato, e, se essa passa per un punto di un tal gruppo simmetrico, passa pure per gli altri tre. Ciò si accorda col fatto che quei 4 punti formano un quadrangolo, di cui quel triangolo è triangolo diagonale. Correlativamente ecc.

6. Se un punto sta su uno spigolo di T, le 2 corrispondenti quaterne di punti si riducono a quel punto ed al suo coniugato armonico rispetto ai due vertici di T posti su quello spigolo. In ogni

vertice di T poi coincidono 8 punti simmetrici. Correlativamente pei piani che passano per uno spigolo o coincidono con una faccia di T. Quanto alle rette, se di un gruppo di 8 rette simmetriche rispetto a T una retta sta su una faccia (o passa per un vertice) di T, le due quaterne del gruppo coincidono in una quaterna di rette di quella faccia (o per quel vertice) formante un quadrilatero avente per triangolo diagonale quella faccia di T (o correlativamente). E se una retta forma fascio con due spigoli di T, il gruppo simmetrico si riduce a quella retta ed alla sua coniugata armonica rispetto a quegli spigoli.

7. I complessi di rette, le cui equazioni riferite al tetraedro T contengono solo le potenze pari delle coordinate sono simmetrici rispetto a T; ma vi sono pure altri complessi che godono di questa proprietà. Noi ci limiteremo alla considerazione dei complessi quadratici.

In generale non esiste un tetraedro rispetto al quale un complesso quadratico qualunque di rette sia simmetrico. La teoria di KLEIN del complesso quadratico generale di rette mostra in fatti che questo possiede 15 tedraedri fondamentali, cioè tali che uno qualunque di essi (il quale sia T) gode della proprietà caratteristica che quel complesso è simmetrico rispetto a ciascuna delle sue coppie di spigoli opposti, ma non rispetto ad un vertice ed alla faccia opposta, cosicchè il complesso quadratico generale non è completamente simmetrico rispetto a T, ma solo parzialmente. Corrispondentemente a ciò il KLEIN notò come l'equazione del complesso riferito a T non contiene che i quadrati delle coordinate p_{ik}, oltre a termini in $p_{12}p_{34}$, $p_{13}p_{42}$, $p_{14}p_{23}$ (5), donde segue che un cambiamento di segno ad una coppia di coordinate complementari non altera quest'equazione, mentre un cambiamento di segno a 3 coordinate non complementari la altera, mutandovi cioè di segno quei tre ultimi termini. Queste osservazioni provano immediatamente (n^0 4) che:

I soli complessi quadratici i quali siano simmetrici rispetto ad un tetraedro, sono quelli le cui equazioni riferite a questo tetraedro o contengono unicamente i quadrati delle coordinate, cioè i complessi di

(5) V. la dissertazione inaugurale *Ueber die Transformation der allgemeinen Gleichung zweiten Grades zwischen Liniencoordinaten auf eine kanonische Form*, n^0 22; ed anche il n^0 citato della Memoria del vol. II dei Math. Ann.

BATTAGLINI, *ovvero contengono unicamente i prodotti delle coordinate complementari, cioè i* complessi tetraedrali [*].

Di più abbiamo la seguente proprietà relativa ad un complesso quadratico qualunque:

Un complesso quadratico generale ha, rispetto ad uno qualunque dei suoi tetraedri fondamentali, per complesso ad esso simmetrico (vale a dire per complesso corrispondente in ciascuna delle omologie armoniche che hanno per centro e piano d'omologia un vertice e la faccia opposta di quel tetraedro) un complesso quadratico tale che nel fascio da essi determinato vi è un complesso di BATTAGLINI ed un complesso tetraedrale, simmetrici entrambi rispetto a quel tetraedro e coniugati armonici rispetto a quei due.

II.

8. Volendo studiare una figura qualunque dello spazio S simmetrica rispetto ad un tetraedro T è naturale il pensare che questo studio possa venir semplificato dal considerare, invece che ogni elemento della figura separatamente, i gruppi di 8 elementi simmetrici rispetto a T che essa contiene, poichè tutti gli elementi di un tal gruppo avranno rispetto ad essa le stesse proprietà. Ciò si può fare con una rappresentazione dello spazio S su un altro spazio S', la quale sia tale che ad ogni gruppo di elementi simmetrico rispetto a T nello spazio S corrisponda in S' un solo elemento, e viceversa ad ogni elemento di questo secondo spazio corrisponda un tal gruppo di 8 elementi nel primo. Se scegliamo per questi elementi i punti dei due spazi, allora ai punti di un piano qualunque di S' corrisponderanno in S i gruppi di punti di una superficie simmetrica rispetto a T; e siccome tali superficie non possono essere di grado inferiore al 2^0, l'ipotesi più semplice che si possa fare è che esse siano quadriche. D'altronde le quadriche simmetriche rispetto a T formano una serie lineare 3 volte infinita, come i piani di S': appare quindi conveniente (V. anche il n^0 5) di far corrispondere

[*] L'enunciato, al pari delle considerazioni che lo precedono, non è corretto. Ai due tipi di complessi quadratici in esso indicati è da aggiungerne un terzo, costituito esso pure da certi altri complessi che sono ancora tetraedrali, ma rispetto ad altri tetraedri: cfr. A. TERRACINI, Boll. U.M.I, (3) 12, 1957, pp. 673-677 [N. d. R.].

proiettivamente tra loro queste due serie lineari. È facile vedere che tale corrispondenza si può sempre (mediante una scelta conveniente del tetraedro di riferimento dello spazio S') stabilire assumendo per formole di corrispondenza tra i punti x dello spazio S e i punti x' di S' le formole semplicissime:

$$x'_i \equiv x_i^2 \qquad (i \equiv 1, \dots, 4)$$

ossia:

$$x_i \equiv x_i'^{\frac{1}{2}}.$$

9. Di questa rappresentazione appunto noi contiamo servirci e quindi è necessario che ne studiamo le principali proprietà (6). Notiamo anzitutto che ad un piano qualunque di S':

$$\Sigma a_i x'_i = 0$$

corrisponde in S la quadrica

$$\Sigma a_i x_i^2 = 0,$$

sicchè vediamo appunto che questa rappresentazione fa corrispondere ai piani di S' quelle quadriche di S che sono simmetriche rispetto a T, cioè che hanno questo tetraedro per proprio-coniugato. Se i due spazi S, S' fossero sovrapposti, ed il tetraedro T' a cui è riferito S' coincidesse con T, è chiaro che la corrispondenza tra quei piani e quelle quadriche sarebbe determinata dall'essere il piano corrispondente ad una quadrica quello polare rispetto ad essa del punto unità. Si vede dunque che questa rappresentazione è un caso particolare di quella « *Abbildung* » considerata dal REYE (7), la quale consiste nel far corrispondere ai piani dello spazio quelle quadriche di un sistema lineare triplamente infinito (*Gebüsch*) rispetto alle quali un punto fisso dato ha quei piani per piani polari.

---

(6) Dopo che il presente studio era già stato compiuto trovammo che il prof. VERONESE nelle ultime pagine della sua Memoria: *Sopra alcune notevoli configurazioni di punti, rette,* ecc. (Atti Acc. Lincei, (3) 9, 1881, pp. 340-341) aveva fatto uso di questa stessa rappresentazione per lo studio di un notevole fascio di superficie di 4° ordine, enunciando in un teorema le proposizioni riguardanti le figure che in ciascuno dei due spazi corrispondono ai punti, piani e rette dell'altro.

(7) V. REYE, *Die Geometrie der Lage,* 3. Auflage, II. Abtheilung, p. 234 e seg. Il caso particolare notevolissimo da noi studiato non viene considerato in quest'opera.

Le formole della rappresentazione mostrano poi immediatamente che in essa ad un punto qualunque di S' corrispondono appunto, come volevamo, 8 punti simmetrici rispetto a T in S; ma se quel punto viene a stare su una faccia di T' quegli 8 punti vengono a coincidere a due a due in 4 punti della corrispondente faccia di T simmetrici rispetto al triangolo formato da questa faccia; e se esso va su uno spigolo di T', quegli 8 punti coincidono a 4 a 4 in 2 punti dello spigolo corrispondente di T (V. n^0 6).

10. Abbiamo visto che ai piani di S' corrispondono quadriche di S simmetriche rispetto a T. Ne segue che alle rette di S' corrispondono quartiche (di 1^a specie) di S simmetriche rispetto a T e quindi giacenti in coni quadrici aventi i loro vertici nei vertici di T. Ma alle rette di S' poste su una faccia di T' corrispondono coniche di S poste sulla faccia corrispondente di T.

Una superficie algebrica qualunque φ di grado n di S non simmetrica rispetto a T, neppure *parzialmente* (cioè rispetto ad una coppia di elementi opposti di T), è tagliata in $4n$ punti non simmetrici da una quartica: dunque la sua superficie corrispondente φ' in S' è d'ordine $4n$. Ma alla curva d'ordine n in cui φ è tagliata da una faccia qualunque di T corrisponde per una ragione analoga una curva in S', il cui ordine è $2n$, e che sta nella faccia corrispondente di T'. Dunque quella superficie φ' è toccata dalle 4 facce di T' lungo 4 curve d'ordine $2n$. Notiamo poi che ad essa corrisponderanno nello spazio S oltre alla superficie φ le altre 7 superficie che formano con questa un gruppo simmetrico rispetto a T.

In particolare ponendo $n = 1$ abbiamo che ai piani di S corrispondono in S' delle superficie di 4^0 ordine *iscritte* in T', cioè aventi le 4 facce di T' per piani doppi tangenti alle superficie stesse lungo coniche. Tali superficie di 4^0 ordine sono, com'è noto, le superficie di Steiner di 4^0 ordine e 3^a classe, e di esse si ottiene in questo modo quella stessa rappresentazione su un piano che incontrò il Reye nelle sue ricerche più generali e di cui si valse per lo studio di quelle superficie.

11. Consideriamo una curva algebrica d'ordine n nello spazio S non simmetrica, neppure parzialmente, rispetto a T: come essa è tagliata in $2n$ punti non simmetrici da una quadrica simmetrica rispetto a T, così le corrisponderà in S' una curva d'or-

dine $2n$ [8]. Ma siccome agli n punti, in cui quella prima curva taglia una faccia di T, corrispondono solo n punti nella faccia corrispondente di T', così potremo dire che quella curva corrispondente d'ordine $2n$ tocca ogni faccia di T' in n punti. Possiamo aggiungere che le due curve saranno dello stesso genere e che, ove esse siano razionali, saranno punteggiate proiettivamente mediante la corrispondenza tra i due spazi.

In particolare ponendo $n = 1$ noi vediamo che alle rette di S corrispondono in S' le coniche tangenti alle 4 facce di T', cioè iscritte in T'. Viceversa ad una tal conica corrisponde un gruppo simmetrico rispetto a T di 8 rette di S. Al piano di quella conica corrisponde la quadrica (simmetrica rispetto a T) che vedemmo (n⁰ 4) passare per quelle 8 rette. Il rapporto anarmonico che sulla conica determinano i suoi 4 punti di contatto colle facce di T' è uguale a quello dei 4 punti in cui una qualunque delle 8 rette taglia le facce di T; ciò conferma quanto già si era dimostrato (V. n⁰ 4), cioè che questo rapporto anarmonico è lo stesso per tutte le 8 rette. Come poi un piano di S contiene ∞^2 rette, così una superficie di Steiner iscritta in T' contiene ∞^2 coniche tutte iscritte in T'.

Notiamo finalmente che ad una superficie od una curva algebrica qualunque d'ordine n di S' corrisponderanno in S una superficie od una curva simmetriche rispetto a T e di ordine rispettivamente $2n$ ovvero $4n$; perocchè una conica od una superficie di Steiner iscritte in T' tagliano rispettivamente quella superficie o quella curva d'ordine n di S' in $2n$ od in $4n$ punti.

12. Ad un piano qualunque di S' corrisponde in S una quadrica simmetrica rispetto a T; ma l'equazione di questa quadrica mostra che, se quel piano passa per un vertice di T', essa si riduce ad un cono quadrico avente il vertice nel corrispondente vertice di T (e simmetrico rispetto al triedro formato dalle 3 facce passanti per quel vertice); e se quel piano passa per uno spigolo di T' gli corrisponderà una coppia di piani passanti per lo spigolo corrispondente di T (e coniugati armonici rispetto alle due facce di T passanti per questo stesso spigolo). Così ad una retta qualunque di S' corri-

(8) Se la curva d'ordine n dello spazio S fosse simmetrica rispetto ad una o più coppie di elementi opposti di T, l'ordine della curva corrispondente in S' si abbasserebbe; lo stesso dicasi per la superficie corrispondente ad una superficie d'ordine n di S, quando questa sia parzialmente simmetrica rispetto a T.

sponde in S una quartica, ed ai 4 piani che congiungono quella retta ai vertici di T' corrispondono i 4 coni quadrici (aventi i vertici nei vertici di T) su cui sta quella quartica. Ma se quella retta taglia uno spigolo di T', la quartica corrispondente si scinde in due coniche poste in piani passanti per lo spigolo corrispondente di T e tagliantisi in due punti di questo spigolo. Se poi quella retta taglia due spigoli opposti di T', la quartica si scinderà in 4 rette; se invece quella retta sta su una faccia di T' le corrisponderà, come già osservammo (n^0 10), una conica posta nella corrispondente faccia di T e avente il corrispondente triangolo di T per proprio-coniugato; mentre se quella retta passa per un vertice di T' le corrisponderanno 4 rette passanti pel vertice corrispondente di T.

13. Ad un piano qualunque di S corrisponde in S', come vedemmo, una superficie di Steiner iscritta in T'. Se l'equazione di quel piano è

$$\Sigma \xi_i x_i = 0,$$

l'equazione della superficie corrispondente sarà:

$$\Sigma \xi_i x_i'^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Ma se quel piano passa per un vertice di T, questa superficie si riduce, come mostra la sua equazione, ad un cono quadrico avente il vertice nel corrispondente vertice di T' e tangente alle 3 facce di T' concorrenti in questo; e se quel piano passa per uno spigolo di T gli corrisponderà in S' un piano passante per lo spigolo corrispondente di T'.

Ad una retta qualunque di S corrisponde in S' una conica iscritta in T'; ma se quella retta taglia uno spigolo di T, la conica corrispondente è tangente allo spigolo corrispondente di T'; e se quella retta taglia due spigoli opposti di T, le corrisponde una retta tagliante gli spigoli corrispondenti di T'. Se invece la retta considerata di S sta su una faccia di T, le corrisponde una conica giacente nella faccia corrispondente di T' e tangente ai 3 lati di questa faccia; mentre se quella retta passa per un vertice di T le corrisponde una retta sola passante pel vertice corrispondente di T'.

14. Consideriamo nello spazio S due gruppi qualunque di 8 piani simmetrici: le 64 rette in cui essi si tagliano formano 8 gruppi composti ciascuno di 8 rette simmetriche rispetto a T. Ora nello spazio S' a quei due gruppi di piani corrispondono due superficie

di STEINER qualunque iscritte in T', ed a quegli 8 gruppi di rette corrispondono 8 coniche comuni a queste superficie. Dunque:

Due superficie di STEINER qualunque iscritte nello stesso tetraedro si tagliano secondo otto coniche (9).

15. Notiamo ancora alcune altre proposizioni che scaturiscono immediatamente dalla nostra rappresentazione. Consideriamo anzitutto un piano qualunque π' di S' e la quadrica corrispondente Q: molte proposizioni della geometria su questa quadrica si possono studiare assai agevolmente mediante la rappresentazione di essa sul piano π'. Consideriamo la schiera delle coniche del piano π' iscritte nel tetraedro T', cioè nel quadrilatero d'intersezione di π' colle facce di questo: corrisponderanno ad esse, come vedemmo, gruppi simmetrici di 8 generatrici di Q. Una retta qualunque di π' è toccata da una sola conica di quella schiera. Dunque: una quartica qualunque di 1ª specie posta su Q è toccata in generale da 8 generatrici di Q (4 per ciascun sistema), le quali formano un gruppo simmetrico rispetto al tetraedro principale T di quella quartica.

Fissata nel piano π' una qualunque delle coniche suddette, per ogni punto passano due sue tangenti; tutte le tangenti di questa conica corrispondono proiettivamente ai punti di contatto e tagliano le facce di T' in quaterne di punti (e quindi anche proiettano i vertici di T' con quaterne di piani) aventi un rapporto anarmonico fisso uguale a quello dei 4 punti in cui la conica è toccata dalle facce di T'. Dunque: dato su Q un gruppo, simmetrico rispetto a T, di 8 generatrici, p. e. le generatrici tangenti ad una quartica data qualunque di Q, vi sono ∞^1 quartiche di Q che toccano le stesse 8 generatrici; per ogni punto di Q passano due tali quartiche. I punti di contatto di questa *schiera* di quartiche con quelle 8 generatrici formano 8 punteggiate proiettive tra loro ed alla serie di queste quartiche; inoltre quelle quartiche avranno tutte lo stesso valore dell'invariante assoluto, cioè lo stesso rapporto anarmonico delle quaterne di coni quadrici passanti per esse, e questo comune invariante assoluto sarà uguale al rapporto anarmonico di ciascuna delle due quaterne considerate di generatrici di Q (10).

---

(9) V. ECKARDT, *Beiträge zur analytischen Geometrie des Raumes*, Math. Ann., V, § 13, p. 47.

(10) Alcune di queste proposizioni riguardanti la geometria delle quartiche su una quadrica ed altre che troveremo in seguito ci sembrano nuove. Esse furono da noi ottenute direttamente e per uno spazio ad un numero qualunque di dimen-

16. Consideriamo in S una schiera di quadriche simmetriche rispetto a T. Siccome per ogni punto ne passano 3, così le corrisponderanno in S' i piani di una sviluppabile di 3ª classe tangente alle quattro facce di T'. Ai punti di questa superficie sviluppabile di 4º ordine avente, com'è noto, una cubica per spigolo di regresso, corrisponderanno in S i punti della superficie sviluppabile inviluppata da quella schiera di quadriche, superficie che sarà per conseguenza (nº 11) dell'8º ordine ed avrà per spigolo di regresso una curva d'ordine 12. E siccome questa superficie è toccata da ∞^1 piani tali che per ogni punto ne passano 4 e contiene ∞^1 rette, le quali sono punteggiate proiettivamente dalle quartiche di contatto della sviluppabile stessa colle diverse quadriche della schiera, così avremo che: La sviluppabile di 3ª classe è circoscritta ad ∞^1 superficie di Steiner iscritte in T', ciascuna delle quali la tocca lungo una conica; per ciascun punto passano 4 di queste superficie; su quella sviluppabile stanno ∞^1 coniche, le quali sono punteggiate proiettivamente dalle generatrici della sviluppabile stessa.

Due piani tangenti qualunque, oppure due sue quadriche qualunque determinano perfettamente la schiera di quadriche considerata. Dunque passando allo spazio S': la sviluppabile circoscritta a due superficie di Steiner iscritte nello stesso tetraedro è della 3ª classe ed ha le facce di questo per suoi piani tangenti (11); essa è inoltre circoscritta ad una serie di tali superficie di Steiner tale che per ogni punto ne passano 4. Le superficie di Steiner aventi comuni i 4 piani doppi e due piani tangenti qualunque formano appunto una tal serie ed hanno per piani tangenti comuni quelli della sviluppabile di 3ª classe determinata da quei 6 piani.

17. È noto che nello spazio S' l'intersezione della sviluppabile di 3ª classe con un suo piano qualunque si compone della generatrice di contatto e di una conica tangente a questa. Dunque nello spazio S l'intersezione della sviluppabile di 4ª classe con una quadrica qualunque della schiera si compone della quartica di contatto e del gruppo simmetrico delle 8 generatrici di quella quadrica tangenti a questa quartica. Dati nello spazio S' un piano π' ed un

---

sioni nella nostra dissertazione di laurea (V. nº 103), che verrà presentata all'Accademia delle Scienze di Torino per la pubblicazione nelle sue Memorie [questo volume, pp. 25-217].

(11) V. Eckardt, loc. cit.

altro piano qualunque vi è, com'è noto, una sola sviluppabile di 3^a classe iscritta in T' e tangente anche a quei due piani; se di questi si fa rotare il secondo intorno alla sua intersezione con π', varierà la sviluppabile, ma conterrà sempre una conica fissa del piano π'. Vi è dunque un sistema semplicemente infinito di sviluppabili di 3^a classe tangenti alle 4 facce di T' ed a π' e contenenti una conica fissa γ' (iscritta in T') del piano π'. Tutte queste sviluppabili toccano il piano π' rispettivamente secondo le diverse tangenti di γ' ed è chiaro che esse corrispondono proiettivamente a queste tangenti. Per ciascuna di esse gli ∞^1 piani tangenti tagliano π' secondo le ∞^1 tangenti di γ', trasportando adunque allo spazio S abbiamo il seguente teorema:

Dato su una quadrica Q il sistema delle quartiche d'intersezione colle quadriche di una schiera passante per Q, vale a dire data su Q una *schiera* di quartiche tangenti a 8 generatrici fisse di Q, vi sono ∞^1 schiere di quadriche passanti per Q e taglianti Q in quel sistema di quartiche; se si prende ad arbitrio una quadrica passante per una qualunque di quelle quartiche, essa determina appunto con Q una schiera di quadriche, ciascuna delle quali taglia Q in un'altra di quelle quartiche ([12]). Ognuna di queste ∞^1 schiere di quadriche così ottenute è individuata dalla quartica di contatto di Q colla sviluppabile di 4^a classe inviluppata da quella schiera, e questa quartica appartiene pure alla schiera di quartiche considerata, sicchè tra le quartiche di questo sistema e quelle ∞^1 schiere di quadriche vi è corrispondenza proiettiva.

Ci limiteremo per ora, affine di non dilungarci troppo, a queste applicazioni, già assai notevoli, della nostra rappresentazione, tanto più dovendone fare in seguito altre importantissime.

18. Abbiamo già trovato le formole che dànno in questa rappresentazione gli elementi corrispondenti ai punti e piani dei due spazi; occorre che troviamo ancora analiticamente gli elementi di S' corrispondenti alle rette di S. Siano date le coordinate plückeriane p_{ik} di una retta r dello spazio S e cerchiamone la curva corrispondente in S'. Un piano qualunque ξ' di questo sarà tangente a quella

([12]) V. la nostra dissertazione di laurea, n^0 citato. Veggasi pure l'opera del Darboux: *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques*, 1873, a p. 59.

curva se la quadrica corrispondente in S, cioè (n^0 9):

$$\sum_i \xi'_i x_i^2 = 0,$$

sarà tangente alla retta r. Ora è noto che questa condizione è espressa da:

$$\sum_{ik} p_{ik}^2 \xi'_i \xi'_k = 0.$$

Dunque questa non è altro che l'equazione tangenziale, in coordinate correnti di piani ξ', della curva cercata, la quale sarà perciò una conica tangente alle 4 facce di T' (poichè in quell'equazione tangenziale mancano i termini nei quadrati delle ξ'_i), come già avevamo riconosciuto sinteticamente. Se diciamo α'_{ik} le *coordinate* di questa conica, cioè i coefficienti della sua equazione in coordinate di piani tangenti, noi abbiamo dunque che una retta (p_{ik}) di S e la conica corrispondente (α'_{ik}) di S' sono legate dalle formole:

$$\alpha'_{ik} \equiv p_{ik}^2 .$$

Che effettivamente la superficie di 2ª classe avente le coordinate α'_{ik} date da queste formole degeneri in una conica segue dal fatto che il suo discriminante vale:

$$\begin{vmatrix} 0 & p_{12}^2 & p_{13}^2 & p_{14}^2 \\ p_{12}^2 & 0 & p_{23}^2 & p_{24}^2 \\ p_{13}^2 & p_{23}^2 & 0 & p_{34}^2 \\ p_{14}^2 & p_{24}^2 & p_{34}^2 & 0 \end{vmatrix} = -(p_{12}p_{34}+p_{13}p_{42}+p_{14}p_{23})(-p_{12}p_{34}+p_{13}p_{42}+p_{14}p_{23}) \times \\ \times (p_{12}p_{34}-p_{13}p_{42}+p_{14}p_{23})(p_{12}p_{34}+p_{13}p_{42}-p_{14}p_{23})$$

e quindi si annulla, poichè, r essendo una retta, le p_{ik} soddisfano alla condizione:

$$p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0.$$

Inoltre calcolando i subdeterminanti di quel discriminante si hanno per le coordinate del piano ξ' della conica α' che corrisponde alla retta data r dello spazio S le espressioni:

$$\xi'_1 \equiv p_{23}p_{34}p_{42}, \quad \xi'_2 \equiv p_{14}p_{34}p_{13}, \quad \xi'_3 \equiv p_{12}p_{24}p_{41}, \quad \xi'_4 \equiv p_{12}p_{13}p_{23},$$

o, se si vuole:

$$\xi'_1 \equiv \frac{1}{p_{12}p_{13}p_{14}}, \quad \xi'_2 \equiv \frac{1}{p_{21}p_{23}p_{24}}, \quad \xi'_3 \equiv \frac{1}{p_{31}p_{32}p_{34}}, \quad \xi'_4 \equiv \frac{1}{p_{41}p_{42}p_{43}}.$$

19. Un'equazione di grado g tra le coordinate α'_{ik} di una conica iscritta nel tetraedro T' determina una ∞^3 di tali coniche, la quale si può chiamare *complesso* di grado g di coniche iscritte in T'. Ciò posto le relazioni trovate nel n⁰ precedente tra una conica (α'_{ik}) di S' iscritta in T' e le rette corrispondenti (p_{ik}) di S mostrano che ad un complesso di tali coniche di grado qualunque g corrisponde in S un complesso di rette di grado $2g$ simmetrico rispetto a T.

III.

20. Ciò premesso, passiamo allo studio del complesso quadratico di Battaglini e del complesso di coniche che lo rappresenta. Sia (n⁰ 7):

$$\Sigma c_{ik} p_{ik}^2 = 0$$

l'equazione di un tale complesso di rette avente T per tetraedro di simmetria. Gli corrisponderà nello spazio S' il complesso di coniche α' avente per equazione (V. n⁰ 18):

$$\Sigma c_{ik}\, \alpha'_{ik} = 0,$$

cioè un complesso lineare di coniche. Viceversa ad un complesso lineare qualunque di coniche iscritte in T' corrisponderà un complesso quadratico di rette di Battaglini avente T per tetraedro principale. Lo studio del complesso quadratico di rette di Battaglini equivale dunque in questo senso allo studio di un complesso lineare di coniche iscritte in un tetraedro: cominceremo quindi a rilevare alcune proprietà di un tal complesso di coniche e poi le trasporteremo a quel complesso di rette.

21. Il complesso lineare di coniche che consideriamo è costituito da quelle coniche, che appartengono come inviluppi degeneri ad un sistema lineare 4 volte infinito di superficie di 2ª classe contenuto nel sistema lineare 5 volte infinito delle quadriche tangenti alle 4 facce di T'; vale a dire dalle coniche appartenenti al sistema lineare di superficie di 2ª classe (α'_{ik}) definito dall'equazione:

$$\Sigma c_{ik}\, \alpha'_{ik} = 0.$$

Ora un sistema lineare 4 volte infinito di superficie di 2ª classe è in generale armonico (*apolare*) ad un sistema lineare 4 volte infinito di superficie di 2⁰ ordine, vale a dire è tale che ogni quadrica di questo gode della proprietà rispetto a ciascuna quadrica di quello di essere circoscritta a tetraedri propri-coniugati rispetto a questa. In quel sistema di ∞^4 superficie di 2^0 ordine ve ne saranno in generale ∞^1 che si scinderanno in coppie di piani, ognuna delle quali si comporrà perciò di due piani coniugati rispetto a tutte le ∞^4 superficie di 2^a classe del primo sistema considerato, e quindi coniugati in particolare rispetto a ciascuna conica del complesso lineare, cioè taglianti la conica stessa in 2 coppie di punti formanti su questa un gruppo armonico. Viceversa ogni coppia di piani coniugati rispetto a tutto questo complesso lineare di coniche, e quindi anche rispetto al sistema lineare di superficie di 2^a classe che lo contiene, costituisce una quadrica del sistema lineare considerato di ∞^4 superficie di 2^0 ordine. Ora in generale la sviluppabile inviluppata dalle coppie di piani di un tal sistema di superficie, vale a dire da quegli ∞^1 piani ciascuno dei quali ha un piano coniugato comune rispetto a tutta una ∞^4 lineare di superficie di 2^a classe (cioè a 5 di esse), è, come si scorge facilmente, una sviluppabile di classe 10, i cui piani sono coniugati a due a due rispetto a quelle superficie. Ma nel nostro caso le coppie di piani, che passano per uno spigolo di T' e sono coniugati armonici rispetto alle due facce di T' passanti per esso, appartengono appunto a quella ∞^1 di coppie di piani, sicchè i 6 spigoli di T' fanno parte, come inviluppi di piani, della sviluppabile di classe 10, e questa conterrà ancora una sviluppabile di 4^a classe i cui piani saranno a due a due coniugati rispetto a tutto il complesso lineare considerato di coniche (mentre le suddette coppie di piani passanti per gli spigoli di T' sono coniugate rispetto a tutte le coniche iscritte in T' e verranno perciò da noi trascurate).

22. Questi risultati si confermano facilmente col calcolo. La ∞^4 lineare di superficie di 2^0 ordine armonica alla ∞^4 di superficie di 2^a classe, che definimmo colle equazioni

$$\alpha'_{11}=0,\quad \alpha'_{22}=0,\quad \alpha'_{33}=0,\quad \alpha'_{44}=0\quad,\quad \Sigma c_{ik}\,\alpha'_{ik}=0,$$

è rappresentata, rispetto al tetraedro T', dall'equazione:

$$\lambda_1\,x_1'^2+\lambda_2\,x_2'^2+\lambda_3\,x_3'^2+\lambda_4\,x_4'^2+\lambda\Sigma c_{ik}\,x'_i\,x'_k=0,$$

dove i parametri $\lambda_1\,,\ldots,\lambda_4\,,\lambda$ sono arbitrari. Ora quest'equazione equivale a

$$(\Sigma a_i\,x'_i)\,(\Sigma b_i\,x'_i)=0$$

(coppia di piani) se le $a_i\,,\,b_i$ soddisfano alle 6 equazioni:

$$a_i\,b_k+a_k\,b_i=\varrho c_{ik}\,,$$

le quali legano i piani a, b in modo che l'uno determina l'altro. Ma inoltre ciascuno dei due, p. e. a, deve soddisfare le equazioni:

$$c_{12}\, a_3\, a_4 + c_{34}\, a_1\, a_2 = c_{13}\, a_4\, a_2 + c_{42}\, a_1\, a_3 = c_{14}\, a_2\, a_3 + c_{23}\, a_1\, a_4\,,$$

le quali si ottengono dalle equazioni

$$a_i\, b_k + a_k\, b_i = \varrho c_{ik}\,, \qquad a_l\, b_m + a_m\, b_l = \varrho c_{lm}\,,$$

moltiplicandole rispettivamente per $a_l\, a_m$, $a_i\, a_k$ e sommandole, con che il 1° membro diventa una funzione simmetrica degl'indici $iklm$, cioè 1, 2, 3, 4. Ora quelle equazioni a cui deve soddisfare il piano a sono appunto le equazioni di una sviluppabile di 4ª classe circoscritta ad una schiera di quadriche, e contenente anzi tra i suoi piani le 4 facce di T', a ciascuna delle quali, come piano a, corrisponde in virtù delle formole precedenti se stesso come piano b.

Conviene anche avvertire che per ciascun vertice di T' passerà poi ancora un quarto piano della sviluppabile di 4ª classe, al quale sarà coniugato un altro determinato piano di questa.

23. Si può anche definire il complesso lineare di coniche come composto di quelle coniche appunto che sono iscritte in T' e che hanno una data coppia di piani coniugati a, b. Effettivamente affinchè una superficie di 2ª classe (α'_{ik}) abbia quei due piani per coniugati deve essere:

$$\Sigma \alpha'_{ik}\,(a_i\, b_k + a_k\, b_i) = 0,$$

sicchè, intendendo che le α'_{ik} soddisfino alla condizione relativa alle coniche, questa sarà l'equazione di un complesso lineare, che coinciderà col complesso

$$\Sigma c_{ik}\, \alpha'_{ik} = 0$$

appunto quando:

$$a_i\, b_k + a_k b_i = \varrho c_{ik}\,.$$

Questo fatto che il complesso lineare di coniche è definito da una tal coppia di piani coniugati a, b ci servirà a trovarne altre proprietà. Notiamo che in un piano qualunque dello spazio S' vi sarà una conica unica, in generale, del complesso lineare, poichè di essa si avranno 4 tangenti ed una coppia di rette coniugate, dati che individuano la conica. Ma se si considera precisamente uno dei piani a, b, uno di quei dati scompare, poichè la retta d'intersezione col piano stesso non è più determinata; quindi tutta la schiera di coniche iscritte in T' e giacenti in quel piano apparterrà al complesso lineare. Dunque i piani della sviluppabile di 4ª classe considerata godono della proprietà caratteristica che in ciascuno di essi tutte le ∞^1 coniche iscritte in T' appartengono al complesso lineare.

24. Queste proprietà del complesso lineare di coniche considerato ci dànno immediatamente colla nostra rappresentazione le proprietà seguenti del complesso quadratico di BATTAGLINI.

Ad ogni complesso quadratico di BATTAGLINI corrisponde un sistema di ∞^1 quadriche simmetriche rispetto a T (di cui fan parte le facce di T come piani doppi e 4 coni quadrici determinati coi vertici nei vertici di T) tali che per ogni punto ne passano 4 e che le quadriche stesse si raggruppano in coppie per modo che quel complesso quadratico di rette è costituito dalle rette che tagliano armonicamente le due quadriche di una coppia qualunque (13). Una tal coppia di quadriche serve perfettamente a definire il complesso quadratico di rette; per l'una di esse si può prendere un cono. Ogni quadrica di quel sistema ha tutte le sue generatrici, di ambe le generazioni, contenute nel complesso di BATTAGLINI (14).

25. Un punto comune ad una coppia di quadriche coniugate di quel sistema è un punto singolare pel complesso quadratico, e precisamente il suo cono quadrico di rette del complesso si scinde nei due fasci delle tangenti nel punto stesso alle due quadriche, poichè queste tangenti sono le sole rette passanti per quel punto, le quali taglino armonicamente quelle due quadriche. La retta singolare corrispondente al punto stesso sarà perciò l'intersezione di quei due piani, cioè la tangente in quel punto alla quartica d'intersezione di quelle due quadriche. La superficie singolare del complesso di BATTAGLINI è dunque costituita dalle ∞^1 quartiche d'intersezione

(13) V. la Nota dell'ASCHIERI citata in principio. Siccome la definizione del complesso quadratico di BATTAGLINI è correlativa a sè stessa, è chiaro che vi sarà pure un sistema di 4ª classe di ∞^1 quadriche simmetriche rispetto a T (tra cui 4 coniche) coniugate a coppie in modo che quel complesso è costituito dalle rette da cui partono coppie armoniche di piani tangenti alle due quadriche di una coppia. Ma si vede facilmente, come notò l'ASCHIERI, che questo sistema di quadriche coincide col suo correlativo.

(14) Lo SCHUR nella Memoria citata in principio ha anzi dimostrato la seguente notevole proposizione (verso la fine della Memoria stessa): Ogni complesso quadratico che contenga ambi i sistemi di generatrici di una quadrica è il luogo delle rette che tagliano armonicamente due quadriche, vale a dire esso è in generale un complesso di BATTAGLINI.

di quadriche coniugate del sistema, e la congruenza delle sue rette singolari è costituita dalle ∞^1 rigate sviluppabili delle tangenti a quelle quartiche.

26. Corrispondentemente a ciò, se consideriamo un punto qualunque dello spazio S' le coniche del complesso lineare passanti per esso formano in generale una superficie di 8^0 ordine corrispondente (n^0 10) al cono di 2^0 ordine delle corrispondenti rette di S. Diremo che quel punto è *singolare* pel complesso di coniche, quando quella superficie si scinde in due superficie di 4^0 ordine di Steiner iscritte in T'. Ciò posto sarà singolare ogni punto comune a due piani coniugati della sviluppabile di 4^a classe considerata; e le coniche del complesso lineare le quali passano per un tal punto saranno quelle coniche iscritte in T' le quali toccano in esso l'uno o l'altro di quei due piani coniugati della sviluppabile e le quali costituiscono le due superficie di Steiner iscritte in T' e tangenti in quel punto rispettivamente a quei due piani. Queste due superficie di Steiner hanno comune (oltre ad altre 7 coniche non passanti per quel punto) quella conica iscritta in T', la quale tocca nel punto considerato la retta comune ai due piani coniugati: questa conica si dirà *singolare* pel complesso lineare e sarà precisamente la conica singolare che corrisponde a quel punto. Variando questo sulla retta considerata d'intersezione di quella coppia di piani varia pure quella conica, giacendone una determinata su ogni piano passante per quella retta, poichè tale conica sarà quella che tocca le 4 rette d'intersezione di quel piano colle 4 facce di T' ed inoltre quella retta stessa. Chiameremo *superficie singolare* del complesso lineare di coniche il luogo dei suoi punti singolari; essa corrisponde per conseguenza alla superficie singolare del complesso di Battaglini. Notando che quest'ultima dev'essere una superficie del 4^0 ordine simmetrica (come il complesso) rispetto al tetraedro T si scorge che la superficie corrispondente sarà una superficie di 2^0 ordine (cosa che presto proveremo direttamente. V. n^0 28). Possiamo dunque conchiudere le seguenti proposizioni importanti per quel complesso lineare di coniche.

La superficie singolare del complesso lineare di coniche è una quadrica, luogo delle rette d'intersezione delle coppie di piani coniugati della sviluppabile di 4^a classe considerata, ed iscritta per conseguenza in questa sviluppabile e tangente in particolare alle 4 facce del tetraedro T'. Quella quadrica singolare è pure l'inviluppo degli ∞^2 piani delle coniche singolari di quel complesso lineare: ogni tal conica tocca la superficie singolare nel suo corrispondente punto singolare, anzi tocca in questo punto una generatrice di quella superficie.

27. È facile vedere che nello spazio S due quartiche di rette singolari del complesso non possono avere punti comuni, e quindi segue che nello spazio S' le rette d'intersezione delle coppie di piani coniugati della sviluppabile, rette che sono toccate dalle coniche singolari del complesso lineare di coniche, formano un solo sistema di generatrici della quadrica singolare di questo. Ora di qui segue una dimostrazione notevole dell'importante teorema: *Le rette singolari del complesso di* BATTAGLINI *tagliano le facce del tetraedro principale di questo secondo un rapporto anarmonico costante* (15).

Anzitutto nello spazio S' consideriamo quelle coniche singolari del complesso lineare di coniche, le quali toccano una retta fissa r di quella rigata quadrica considerata: su ogni piano passante per r esiste una tal conica perfettamente determinata, come già notammo, dal dover toccare r e le 4 rette d'intersezione colle facce di T'. Il rapporto anarmonico dei 4 punti di contatto della conica stessa con queste 4 rette (stimato sulla conica stessa) è, come si sa, uguale a quello dei 4 punti d'intersezione delle rette stesse colla tangente

(15) Questo teorema, che si può dedurre dal fatto che l'equazione (già trovata dal BATTAGLINI) delle rette singolari di quel complesso quadratico ha la forma nota dell'equazione del complesso tetraedrale, si può anche dimostrare geometricamente per una via diretta che ne mostra la ragione intima. Consideriamo il complesso quadratico delle rette che tagliano armonicamente due quadriche qualunque. Su un piano qualunque la conica del complesso sarà inviluppata dalle rette che tagliano armonicamente le due coniche d'intersezione di quel piano con quelle quadriche. Ora è noto che questa conica si scinde in una coppia di punti quando una retta avente lo stesso polo rispetto a queste due coniche le taglia armonicamente; e in tal caso questa retta sarà pure la congiungente di quella coppia di punti. Adunque tutte le rette singolari del complesso considerato godono della proprietà di essere coniugate agli stessi punti dello spazio rispetto ad entrambe le quadriche, vale a dire di appartenere al complesso tetraedrale, che le due quadriche determinano come luogo delle rette le cui polari rispetto alle quadriche stesse si tagliano. Così non solo è dimostrato il teorema, ma inoltre si scorge come il complesso tetraedrale considerato sia quello che è generato in modi noti dalle polarità rispetto alle ∞ coppie di quadriche tagliate armonicamente dalle rette del complesso dato (o correlat.). Aggiungiamo che in modo simile si prova che il complesso delle rette che tagliano secondo un dato rapporto anarmonico qualunque due date quadriche ha le sue rette singolari appartenenti al complesso tetraedrale determinato da queste quadriche.

r della conica e quindi non muta se il piano di questa conica rota intorno ad r. Da ciò concludiamo anzitutto che le tangenti di una quartica qualunque di 1ª specie determinano uno stesso rapporto anarmonico nel tetraedro T avente per vertici i vertici dei 4 coni quadrici passanti per la quartica stessa e che tale rapporto anarmonico è appunto quello di questi 4 coni. Inoltre se consideriamo ora tutte le generatrici r del sistema considerato della quadrica singolare del complesso lineare di coniche, è chiaro che esse determinano in T' lo stesso rapporto anarmonico, poichè quella quadrica è iscritta in T' e quindi tutte quelle generatrici tagliano le facce di questo tetraedro nei punti delle 4 generatrici del sistema contrario poste su quelle facce. Dunque tutte le ∞^2 coniche singolari del complesso lineare di coniche toccano le 4 facce di T' in 4 punti il cui rapporto anarmonico stimato sulle coniche stesse è costante.

Passando allo spazio S si ha appunto il teorema che si voleva dimostrare, ed inoltre si vede che tutte le ∞^1 quartiche singolari inviluppate dalle rette singolari del complesso di Battaglini, hanno lo stesso invariante assoluto; fatto che si potrebbe pure dedurre dal teorema stesso.

28. Proponiamoci di trovare l'equazione della superficie singolare del complesso lineare di coniche considerato, donde poi dedurremo l'equazione della superficie singolare del complesso di Battaglini. Abbiamo visto che quella superficie singolare si può considerare come l'inviluppo dei piani delle coniche singolari del complesso di coniche. Siano p_{ik} le coordinate di una retta singolare del complesso di Battaglini:

$$(1) \qquad c_{12}p_{12}^2 + c_{34}p_{34}^2 + c_{13}p_{13}^2 + c_{42}p_{42}^2 + c_{14}p_{14}^2 + c_{23}p_{23}^2 = 0.$$

Il piano ξ' della conica singolare corrispondente del complesso di coniche avrà per coordinate, come vedemmo (n⁰ 18):

$$\xi'_1 \equiv \frac{1}{p_{12}p_{13}p_{14}}, \quad \xi'_2 \equiv \frac{1}{p_{21}p_{23}p_{24}}, \quad \xi'_3 \equiv \frac{1}{p_{31}p_{32}p_{34}}, \quad \xi'_4 \equiv \frac{1}{p_{41}p_{42}p_{43}}.$$

Ora da queste formole si traggono le relazioni (in cui $iklm$ è una permutazione pari di 1 2 3 4):

$$\xi'_i\,\xi'_k = \varrho\,\frac{p_{lm}}{p_{ik}}, \qquad \text{donde} \qquad \varrho p_{lm}^2 = \xi'_i\,\xi'_k\,p_{ik}\,p_{lm}.$$

Dunque sostituendo nella (1) si ha:

$$(2) \quad (c_{12}\xi'_3\xi'_4 + c_{34}\xi'_1\xi'_2)p_{12}p_{34} + (c_{13}\xi'_4\xi'_2 + c_{42}\xi'_1\xi'_3)p_{13}p_{42} + (c_{14}\xi'_2\xi'_3 + c_{23}\xi'_1\xi'_4)p_{14}p_{23} = 0.$$

Ma la retta p_{ik} essendo singolare soddisfa pure, oltre alla equazione (1), le altre due:

$$(3)\qquad c_{12}\,c_{34}\,p_{12}\,p_{34}+c_{13}\,c_{42}\,p_{13}\,p_{42}+c_{14}\,c_{23}\,p_{14}\,p_{23}=0$$

$$(4)\qquad p_{12}\,p_{34}+p_{13}\,p_{42}+p_{14}\,p_{23}=0.$$

Dunque, eliminando tra queste tre equazioni (2), (3), (4) le 3 quantità $p_{12}\,p_{34}$, $p_{13}\,p_{42}$, $p_{14}\,p_{23}$, si ha immediatamente, ponendo per brevità:

$$c_{13}\,c_{42}-c_{14}\,c_{23}=c',\quad c_{14}\,c_{23}-c_{12}\,c_{34}=c'',\quad c_{12}\,c_{34}-c_{13}\,c_{42}=c''',$$

sicchè $c'+c''+c'''=0$, l'equazione seguente:

$$c'(c_{12}\xi'_3\xi'_4+c_{34}\xi'_1\xi'_2)+c''(c_{13}\xi'_4\xi'_2+c_{42}\xi'_1\xi'_3)+c'''(c_{14}\xi'_2\xi'_3+c_{23}\xi'_1\xi'_4)=0,$$

che sarà l'equazione tangenziale della superficie singolare del complesso di coniche. Questa superficie singolare è dunque realmente, come già avevamo dimostrato altrimenti, una quadrica iscritta nella sviluppabile di 4ª classe che già consideravamo (V. n⁰ 22):

$$c_{12}\,\xi'_3\,\xi'_4+c_{34}\,\xi'_1\,\xi'_2=c_{13}\,\xi'_4\,\xi'_2+c_{42}\,\xi'_1\,\xi'_3=c_{14}\,\xi'_2\,\xi'_3+c_{23}\,\xi'_1\,\xi'_4\,.$$

Dall'equazione tangenziale di quella quadrica formandone l'equazione in coordinate x'_i di punti e facendo poscia la trasformazione $x'_i\equiv x_i^2$, abbiamo subito per equazione in coordinate x_i di punti della superficie singolare del complesso quadratico di rette (1):

$$\begin{vmatrix} 0 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^2 & 0 & c'\,c_{34} & c''\,c_{42} & c'''\,c_{23} \\ x_2^2 & c'\,c_{34} & 0 & c'''\,c_{14} & c''\,c_{13} \\ x_3^2 & c''\,c_{42} & c'''\,c_{14} & 0 & c'\,c_{12} \\ x_4^2 & c'''\,c_{23} & c''\,c_{13} & c'\,c_{12} & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Ora questa è una delle forme note dell'equazione del *tetraedroide*. Possiamo dunque conchiudere che la superficie singolare del complesso di BATTAGLINI (1) è il tetraedroide avente quest'equazione.

29. Ritornando ora alle considerazioni geometriche importa osservare come nello spazio S' la sviluppabile considerata di 4ª classe determini perfettamente non solo la quadrica singolare ma anche quale sistema di generatrici di questa sia composto delle intersezioni

dei piani coniugati di quella sviluppabile. In fatti le rette in cui quella sviluppabile è toccata dalle facce di T' sono appunto generatrici di quel sistema della quadrica singolare, perocchè venendo un piano della sviluppabile a coincidere con una faccia di T, verrà pure a coincidere con questa il piano coniugato (come vedemmo alla fine del n^0 22). Dunque realmente data quella sviluppabile iscritta in T' sarà determinata la quadrica singolare del corrispondente complesso lineare di coniche e sarà anche determinato un sistema corrispondente di generatrici di questa: in ogni generatrice di ciascuno dei due sistemi si tagliano, com'è noto, due piani di quella sviluppabile circoscritta alla quadrica; ma se quella generatrice appartiene al sistema considerato, quei due piani della sviluppabile saranno coniugati rispetto al complesso lineare di coniche, sicchè questo complesso sarà pure individuato da quella sviluppabile. Se invece è data la quadrica singolare ciascuno dei due suoi sistemi di generatrici dà una sviluppabile di 4ª classe corrispondente, e quindi un corrispondente complesso lineare di coniche, sicchè quella superficie è singolare per due tali complessi lineari, per questi sono diverse le coniche singolari e la sviluppabile dei piani coniugati: solo la superficie singolare sarà la stessa quadrica. Passando poi allo spazio S, nel quale vedemmo che a quella quadrica di S' corrisponde un tetraedroide, avremo:

Un tetraedroide è superficie singolare per due, e solo per due, complessi quadratici di Battaglini. Per questi due complessi sono diversi i sistemi di quadriche atti a generarli, e le congruenze di rette singolari. Il tetraedroide contiene due sistemi di ∞^1 quartiche, ciascuno dei quali comprende le quartiche inviluppate dalle rette singolari di uno di quei due complessi quadratici. Per ogni quartica di uno qualunque dei due sistemi passano due coppie di quadriche, di ciascuno di quei due sistemi, ma solo la coppia delle quadriche del sistema corrispondente a quel sistema di quartiche sarà costituita da due quadriche coniugate del corrispondente complesso di Battaglini. Due quartiche dello stesso sistema non si tagliano mai, due quartiche di diverso sistema si tagliano invece in un gruppo di 8 punti simmetrici rispetto a T. Ogni faccia di T taglia il tetraedroide in 2 coniche, ciascuna delle quali (contata 2 volte) costituisce una quartica dell'un sistema; sicchè su ogni faccia di T le rette dell'un complesso quadratico inviluppano una conica del tetraedroide, e quelle dell'altro complesso inviluppano l'altra conica. Quelle due coniche (corrispondendo a due rette della corrispondente faccia di T') avranno il triangolo di T per triangolo proprio-coniugato comune, vale a dire si taglieranno in 4 punti le cui congiungenti s'incontrano appunto nei vertici di T posti su quella faccia ([16]).

30. Aggiungiamo poi che quei 4 punti d'intersezione delle 2 coniche in cui il tetraedroide è tagliato dalla faccia considerata di T sono punti doppi del tetraedroide. Ciò dipende dal fatto che la

---

([16]) Il BATTAGLINI mostrò (Giornale di matem., 7, p. 68) in qual modo supposti dati i coni e le coniche del complesso relativi ai vertici ed alle facce del tetraedro fondamentale T si possa costruire il complesso; ma non notò come da questo fatto appunto segua che ad un tetraedroide spettano due diversi complessi quadratici della specie considerata. Cercando l'equazione della serie omofocale del complesso quadratico di BATTAGLINI $\sum c_{ik}\, p_{ik}^2 = 0$ si trova:

$$\frac{c_{12}p_{12}^2 + c_{34}p_{34}^2}{\lambda^2 - c_{12}c_{34}} + \frac{c_{13}p_{13}^2 + c_{42}p_{42}^2}{\lambda^2 - c_{13}c_{42}} + \frac{c_{14}p_{14}^2 + c_{23}p_{23}^2}{\lambda^2 - c_{14}c_{23}} +$$
$$+ 2\lambda\left(\frac{p_{12}p_{34}}{\lambda^2 - c_{12}c_{34}} + \frac{p_{13}p_{42}}{\lambda^2 - c_{13}c_{42}} + \frac{p_{14}p_{23}}{\lambda^2 - c_{14}c_{23}}\right) = 0.$$

Quest'equazione rappresenta col variar di λ tutti i complessi quadratici aventi per superficie singolare uno stesso tetraedroide (la cui equazione è data al n[0] 28). Per $\lambda = \infty$ e $\lambda = 0$ essa ci dà rispettivamente i due soli complessi di BATTAGLINI relativi a questa superficie, cioè:

$$c_{12}p_{12}^2 + c_{34}p_{34}^2 + c_{13}p_{13}^2 + c_{42}p_{42}^2 + c_{14}p_{14}^2 + c_{23}p_{23}^2 = 0$$
$$\frac{p_{12}^2}{c_{34}} + \frac{p_{34}^2}{c_{12}} + \frac{p_{13}^2}{c_{42}} + \frac{p_{42}^2}{c_{13}} + \frac{p_{14}^2}{c_{23}} + \frac{p_{23}^2}{c_{14}} = 0.$$

Si hanno poi 6 complessi lineari, ciascuno contato doppiamente, pei seguenti valori di λ:

$$\lambda = \pm\sqrt{c_{12}c_{34}}\,, \quad \lambda = \pm\sqrt{c_{13}c_{42}}\,, \quad \lambda = \pm\sqrt{c_{14}c_{23}}\,.$$

Quei complessi lineari sono rispettivamente:

$$\sqrt{c_{12}}\,p_{12} \pm \sqrt{c_{34}}\,p_{34} = 0, \quad \sqrt{c_{13}}\,p_{13} \pm \sqrt{c_{42}}\,p_{42} = 0, \quad \sqrt{c_{14}}\,p_{14} \pm \sqrt{c_{23}}\,p_{23} = 0,$$

e formano, come si vede, una sestupla di complessi involutori. Essi sono, per la teoria di KLEIN, i complessi lineari *fondamentali* del tetraedroide e di tutti quei complessi quadratici di cui esso è superficie singolare. Dall'esame dei valori di λ che corrispondono a questi complessi fondamentali segue che: *Tra le superficie singolari di complessi quadratici (superficie di* KUMMER*) il tetraedroide è caratterizzato dal fatto che nella serie omofocale corrispondente i sei complessi lineari fondamentali formano 3 coppie di elementi coniugati di un'involuzione. Gli elementi doppi di quest'involuzione sono i due complessi di* BATTAGLINI *appartenenti a quella serie omofocale* Questi caratteri invariantivi del complesso di BATTAGLINI e della sua superficie singolare pare fossero già noti al KLEIN (*Zur Theorie der Comple-*

quadrica corrispondente nello spazio S' al tetraedroide è tangente alle facce di T': ogni conica iscritta in T' e passante pel punto di contatto della quadrica con una faccia di T' tocca la quadrica stessa in questo punto e la taglia in altri due punti: quindi per ciascuno dei 4 punti del tetraedroide corrispondenti a quel punto di contatto ogni retta taglia il tetraedroide in due punti coincidenti col punto stesso e in altri due punti, sicchè veramente quello è un punto doppio. Il tetraedroide ha dunque 16 punti doppi posti a 4 a 4 e nel modo detto sulle 4 facce di T.

31. Cerchiamo il cono circoscritto da un vertice di T al tetraedroide. Ogni sua retta taglia il tetraedroide in 4 punti di cui 2 coincidenti; e siccome questa superficie corrisponde a se stessa nella omologia armonica che ha quel vertice e la sua faccia opposta per centro e piano d'omologia, così o quei due punti coincidenti dovranno essere in questo piano ed allora gli altri 2 punti saranno distinti e si corrisponderanno in quell'omologia; oppure coincideranno 2 punti fuori del piano di omologia e quindi anche gli altri due, che corrisponderanno a quelli, vale a dire quella retta condotta pel vertice sarà una tangente doppia. Ora è chiaro che le rette della prima specie corrispondono a quelle rette di S' che dal vertice corrispondente di T' vanno ai punti della quadrica singolare posti nella faccia opposta (e costituenti due generatrici della quadrica stessa) e che formano così due piani. Dunque: I due coni quadrici che

---

xe I. *und* II. *Grades*, n⁰ 24), il quale però li enunciava sotto altra forma. Si può (come abbiamo mostrato sulla fine della nostra dissertazione di laurea) partire da essi per ottenere tutte le particolarità del tetraedroide e del complesso di BATTAGLINI.

Dalle equazioni dei complessi fondamentali, ovvero mediante la ricerca diretta, si possono ottenere le 10 quadriche *fondamentali* del tetraedroide e del complesso quadratico di BATTAGLINI, cioè le quadriche rispetto a cui questi sono polari reciproci a se stessi. Di esse 6 saranno date dalle equazioni:

$$\sqrt{c_{12}}\,x_1 x_2 \pm \sqrt{c_{34}}\,x_3 x_4 = 0, \quad \sqrt{c_{13}}\,x_1 x_3 \pm \sqrt{c_{42}}\,x_4 x_2 = 0, \quad \sqrt{c_{14}}\,x_1 x_4 \pm \sqrt{c_{23}}\,x_2 x_3 = 0,$$

e le altre 4 dalle equazioni:

$$\sqrt{c_{12}\,c_{13}\,c_{14}}\,x_1^2 \pm \sqrt{c_{12}\,c_{23}\,c_{42}}\,x_2^2 \pm \sqrt{c_{13}\,c_{23}\,c_{34}}\,x_3^2 \pm \sqrt{c_{14}\,c_{42}\,c_{34}}\,x_4^2 = 0,$$

in cui i segni dei coefficienti si devono scegliere in modo che il loro prodotto sia $+\,c_{12}\,c_{13}\,c_{14}\,c_{34}\,c_{42}\,c_{23}$.

proiettano da un vertice di T le coniche poste sulla faccia opposta toccano quella superficie lungo le coniche stesse.

Quanto poi alle rette della 2ª specie, tangenti doppie del tetraedroide uscenti da quel vertice di T, esse corrispondono a quelle rette uscenti dal corrispondente vertice di T' le quali toccano la quadrica singolare (fuori della corrispondente faccia), cioè alle rette di un cono quadrico iscritto nel triedro delle tre facce di T' passanti per quel vertice e tangente anche a quei due piani che avevamo considerato dianzi (poichè anche quei due piani sono tangenti alla quadrica). Ora ad un tal cono quadrico corrisponde in S (n⁰ 13) una quaterna di piani uscenti dal vertice considerato di T. Dunque:

Il tetraedroide ha 16 piani doppi, i quali passano a 4 a 4 pei 4 vertici di T. I 4 piani doppi passanti per uno stesso vertice di T sono i piani tangenti comuni ai 2 coni quadrici circoscritti dal vertice stesso al tetraedroide. Ciascuno di essi contiene (come risulta dalla sua rappresentazione) 6 punti doppi, cioè 2 per ciascuna delle 3 facce di T passanti pel vertice stesso.

32. Notando che nello spazio S' il cono quadrico circoscritto alla quadrica la tocca lungo una conica, a cui corrisponderà in S una curva del tetraedroide posta sulla quadrica corrispondente al piano della conica stessa, la qual curva si scinde evidentemente in 4 coniche di contatto dei piani doppi considerati del tetraedroide, avremo:

Le 4 coniche di contatto dei 4 piani doppi di un tetraedroide concorrenti in un vertice del tetraedro principale stanno in una quadrica avente questo per tetraedro proprio-coniugato.

33. Di tutte le proprietà viste del tetraedroide formando le correlative queste varranno ancora, poichè il tetraedroide è una superficie reciproca a se stessa ([17]). Ma qui ci fermiamo, benchè sia

([17]) Così si può notare che come sul tetraedroide stanno (n⁰ 29) due sistemi di ∞^1 quartiche inviluppate rispettivamente dalle rette singolari dei due complessi di Battaglini relativi a quel tetraedroide, e comprendenti ciascuno 4 coniche giacenti nelle 4 facce di T, così la superficie stessa è iscritta in due sistemi di ∞^1 sviluppabili di 4ª classe composte pure da quelle rette singolari (e legate in modo notevole a quelle quartiche). Di ciascuno dei due sistemi fan parte (contati doppiamente) i 4 coni del rispettivo complesso di Battaglini uscenti dai vertici di T; questi coni appartengono al sistema di quadriche genechiaro che si potrebbe facilmente proseguire lo studio del tetraedroide e particolarmente della geometria su di esso mediante la sua rappresentazione sulla quadrica corrispondente dello spazio S'.

Torino, Ottobre 1883.

---

ranti il complesso (n° 24) e sono quei coni quadrici circoscritti dai vertici di T al tetraedroide, i quali *non* contengono le coniche del complesso giacenti nelle facce opposte, perocchè tanto quei coni quanto queste coniche sono composti delle rette singolari corrispondenti ai loro punti di contatto col tetraedroide.