Corrado Segre

Sur les droites qui ont des moments donnés par rapport à des droites fixes

Jour. für die reine und angewandte Math., Vol. **97** (1884), p. 95–110
in: Corrado Segre, Opere, a cura della Unione Matematica Italiana, Volume III, Edizione Cremonese, Roma, 1961, p. 288–303

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Segre_CW_3_288>

XLVIII.

SUR LES DROITES QUI ONT DES MOMENTS DONNÉS PAR RAPPORT À DES DROITES FIXES

« Journal für die reine und angewandte Mathematik »,
Band XCVII, 1884, pp. 95-110.

I.

1. Le moment de deux droites quelconques x, y peut être exprimé d'une manière qui nous sera utile au moyen de la distance d'un point quelconque X de l'une d'elles x à l'autre y et de l'angle que la normale au plan Xy fait avec x. Soient δ le segment qui mesure la plus petite distance des deux droites x, y et φ leur angle: leur moment (¹) sera $\delta \sin \varphi$. Il est clair qu'en nommant p la perpendiculaire abaissée du point X de x sur y on aura:

$$\delta = p \cos (p\delta).$$

Si maintenant, par un point quelconque de l'espace, l'on mène des droites parallèles à x, y, δ, p et à la normale n du plan Xy, et enfin une droite m dont la direction soit normale à y mais parallèle au plan des directions de x, y, on voit que les directions de m, n, x formeront un trièdre rectangle en m, dont l'hypoténuse sera l'angle (nx), et le cathète (mx) sera le complément de (xy), c'est-à-dire de φ, tandis que l'autre cathète (mn) sera égal à (δp). On aura donc:

$$\cos (nx) = \cos (mx) \cos (mn) = \sin \varphi \cos (p\delta),$$

(¹) Nous ne considérons que les valeurs absolues des moments des droites; car pour donner un signe à ces moments, il faudrait toujours considérer pour chaque droite une direction positive correspondante, tandis que nous nous proposons d'étudier des ensembles de droites indépendamment de la manière d'en fixer les directions positives.

et en conséquence

$$\delta \sin \varphi = p \sin \varphi \cos (p\delta) = p \cos (nx),$$

c'est-à-dire on a l'expression cherchée du moment de x, y:

$$\text{mom}\,(x, y) = p \cos (nx),$$

d'où l'on tire cette proposition: *Si l'on multiplie la distance d'un point quelconque d'une droite à une autre droite par le cosinus de l'angle que la première droite fait avec la normale au plan qui joint l'autre à ce point, on aura un produit constant égal au moment des deux droites.*

Ce théorème connu est dû, si nous ne nous trompons, à M. Drach, qui l'a donné comme cas particulier d'un autre théorème, qu'il a démontré par la voie analytique (²).

2. Dans cette Note nous avons surtout pour but d'étudier l'ensemble des droites qui ont un même moment donné m par rapport à une droite fixe r. Cherchons avant tout celles d'entre ces droites qui sont dans un plan donné quelconque π. Soit R le point d'intersection de ce plan avec la droite fixe r, et n la normale à ce plan (menée par R); en dénotant par (Rd) la distance de R à une droite quelconque d de π, on aura par le théorème précédent:

$$\text{mom}\,(r, d) = (Rd) \cos (rn).$$

Donc pour que d soit telle que mom $(r, d) = m$, on aura la condition:

$$(Rd) = \frac{m}{\cos (rn)} = \text{const.}$$

Nous concluons que: *les droites* d *de l'espace pour lesquelles* mom (r, d) = m, *forment un complexe tel que celles d'entre elles qui sont dans un plan quelconque, enveloppent un cercle ayant le centre sur la droite* r *et ayant son rayon exprimé par* m/cos (rn), *où* n *représente la normale à ce plan.*

Pour tous les plans parallèles entre eux et plus généralement pour tous les plans qui font un même angle avec la droite fixe r, ces *cercles du complexe* sont égaux. Pour les plans perpendiculaires à r, les rayons des cercles correspondants sont égaux à m et forment un cylindre droit C ayant r pour axe et m pour rayon. Pour tous les autres plans, l'angle (rn) n'étant plus nul, les rayons des cercles

(²) V. Drach, *Zur Theorie der Raumgeraden und der linearen Complexe,* **Math. Ann.**, II, pp. 128-139 (v. p. 132).

du complexe sont plus grands que m et vont en croissant avec cet angle; par conséquent pour les plans qui font un très petit angle avec r, les cercles correspondants sont très grands, et pour les plans parallèles à r, les cercles correspondants deviennent infinis.

3. Considérons l'intersection que fait un plan quelconque π avec le cylindre de révolution C: on sait que cette intersection est une ellipse dont le centre est le point d'intersection R de π avec r et dont l'axe focal est sur l'intersection de π avec le plan perpendiculaire à π mené par r. En indiquant toujours par n la normale à π on voit donc que le demiaxe focal de cette ellipse sera donné par m/cos (rn); ainsi *dans chaque plan de l'espace le cercle du complexe a pour rayon le demi-axe focal de l'ellipse d'intersection de ce plan avec le cylindre* C. En d'autres termes: *les cercles qui touchent dans les sommets de l'axe focal les ellipses d'intersection des plans de l'espace avec le cylindre droit* C, *sont les cercles enveloppés par les droites de ces plans qui appartiennent à notre complexe.*

Ce complexe est donc parfaitement déterminé par le cylindre C, et cette proposition fournit en outre une propriété remarquable de ce cylindre. De plus nous voyons que tous les cercles du complexe sont extérieurs aux ellipses de C appartenant aux mêmes plans, c'est-à-dire: *les cercles du complexe touchent tous le cylindre* C *en deux points et ne présentent pas de points dans l'intérieur de celui-ci.* On en conclut que les droites du complexe ne peuvent pas couper ce cylindre; cependant il y a des droites qui le touchent en un point: ce sont celles dont la direction est normale à r. D'ailleurs on peut aussi tirer ces conclusions de la définition même du complexe; car comme le produit de la plus petite distance entre r et une quelconque d de ses droites par le sinus de l'angle (rd) doit être égal à m, il est clair que cette distance minima ne peut pas être inférieure à m et sera égale à m lorsque cet angle sera égal à $\pi/2$.

4. Cherchons maintenant les droites du complexe qui passent par un point quelconque P de l'espace. Soit d une droite passant par P: si n est la normale au plan Pr, on aura par le théorème du n^0 1:

$$\text{mom}\,(r, d) = (Pr) \cos (nd);$$

par suite si d est une droite du complexe, c'est-à-dire si $\text{mom}\,(r, d) = m$, on aura:

$$\cos (nd) = \frac{m}{(Pr)} = \text{const.}$$

Donc toutes les droites d du complexe, qui passent par le point P, feront avec la droite n un même angle, c'est-à-dire: *Les droites du complexe qui passent par un point quelconque* P *de l'espace, forment un cône droit ayant pour axe la normale en* P *au plan qui joint* P *à* r *et dont les génératrices font avec cet axe un angle dont le cosinus est donné par* m/ (Pr).

Ces *cônes du complexe* ne sont donc réels que pour les points P dont la distance à r n'est pas inférieure à m, c'est-à-dire pour les points extérieurs au cylindre C; ce qui s'accorde bien avec ce que nous avons vu dans le n^0 précédent. Pour les points P situés sur le cylindre C on aura $\cos(nd) = 1$, l'ouverture du cône se réduit à zéro, c'est-à-dire le cône se réduit à son axe. Donc par chaque point de C il ne passe qu'une seule droite réelle du complexe: la normale au plan qui joint ce point à r. Mais à mesure qu'un point P s'éloigne du cylindre C indéfiniment, c'est-à-dire à mesure que la distance (Pr) va en croissant, $\cos(nd)$ ira en diminuant indéfiniment de 1 à zéro: le cône du complexe correspondant à P a donc une ouverture qui ira en croissant continuellement, et pour un point P à l'infini ce cône se décomposera (comme nous allons voir plus distinctement tout de suite) en un couple de plans parallèles à r.

5. Par le point P extérieur au cylindre C on peut mener deux plans tangents de celui-ci: le cosinus de l'angle que chacun de ces plans fait avec la normale n au plan Pr est évidemment égal à $m/(Pr)$, et celui-ci sera aussi le cosinus de l'angle que font avec n celles des droites de ces plans qui passent par P et qui ont leurs directions normales à r. Donc ces deux droites appartiennent au cône de notre complexe qui correspond au point P, et ces deux plans tangents à C dans lesquels elles se trouvent, seront les plans tangents à ce cône le long de ces génératrices; c'est-à-dire qu'on a cette proposition: *Tous les cônes du complexe sont doublement tangents au cylindre* C: *les deux droites passant par un point quelconque* P *et tangentes à la courbe d'intersection du cylindre* C *avec le plan mené par* P *normalement à* r, *touchent cette courbe précisément dans les deux points de contact de* C *avec le cône du complexe appartenant à* P. Au moyen du cylindre C on a donc une construction fort simple des cônes droits des droites du complexe qui passent par les différents points de l'espace.

6. Passons à examiner comment se composent les surfaces des points et des plans singuliers et la congruence des droites singulières de notre complexe. Nous avont vu (n^0 2) que dans chaque plan π

la courbe du complexe est un cercle dont le centre est sur l'axe r et dont le rayon est $m/\cos(rn)$ ou bien $m/\sin(r\pi)$. Cette courbe ne peut se décomposer que dans deux cas : 1°. lorsque $\sin(r\pi) = 0$, c'est-à-dire lorsque ce cercle se réduit à la droite à l'infini (comme droite double), 2°. lorsque $\sin(r\pi) = \infty$, c'est-à-dire lorsque, le rayon devenant nul, ce cercle se décompose en deux droites (coïncidentes, comme nous verrons) s'appuyant sur l'absolu (cercle imaginaire à l'infini). Dans le 1er cas le plan π sera parallèle à r, et en effet toutes les droites d'un plan parallèle à r ayant évidemment la même distance de r, leur moment par rapport à r ne dépend plus que de leur direction [*], de sorte qu'il y a dans un tel plan deux directions faisant le même angle avec r et telles que toutes les droites de ce plan parallèles à l'une ou à l'autre d'elles ont avec r le moment donné m, c'est-à-dire appartiennent à notre complexe. Pour ceux des plans parallèles à r qui coupent le cylindre C, ces deux directions sont imaginaires ; pour ceux qui touchent C, elles coïncideront avec la direction perpendiculaire à r ; enfin pour ceux qui sont extérieurs à C, ces deux directions seront réelles et distinctes. On a donc une première série de plans singuliers du complexe dans les plans qui passent par le point à l'infini de r : les centres des faisceaux de droites du complexe qui appartiennent à ces plans sont aussi des points à l'infini. Ceux-ci sont même les seuls plans singuliers réels, car pour les autres plans singuliers on a, comme nous avons vu, $\sin(r\pi) = \infty$. Mais si l'on veut considérer aussi les éléments imaginaires, on voit que les plans tangents à l'absolu forment une autre série de plans singuliers : dans chacun de ces plans le cercle du complexe se réduit évidemment, comme lieu de points, à la droite qui joint le point de contact avec l'absolu au point d'intersection avec r ; mais, comme enveloppe de droites, vu que ce cercle doit être (comme nous avons vu) doublement tangent à C, il se réduira aux deux faisceaux de droites ayant pour centres les deux points d'intersection de cette droite avec C.

Quant aux points singuliers nous avons vu que par chaque point P passent des droites du complexe qui forment un cône droit ayant pour axe la normale menée par P au plan Pr et doublement tangent à C ; par conséquent chaque cône du complexe est doublement tangent soit à C, soit à l'absolu. Or si le point P va à l'infini, ce cône se décompose, par la définition même du complexe, en deux faisceaux de droites parallèles dont les plans seront parallèles à r

[*] Anche per le rette di quel piano parallele ad r, le quali hanno momento nullo rispetto ad r pur avendo da r distanza variabile [N. d. R.].

et équidistants de cet axe. Si le point P se porte sur le cylindre C, nous avons déjà remarqué que le cône du complexe n'aura d'autre droite réelle que son axe: comme d'ailleurs il est doublement tangent à l'absolu, il se décomposera en deux plans imaginaires tangents à celui-ci et se coupant dans cette droite réelle.

Remarquons encore que, pour tous les plans d'un faisceau de plans parallèles entre eux et à r, la courbe du complexe se décompose en deux points de l'axe de ce faisceau et que tous les cônes du complexe qui appartiennent aux points de cet axe, ont celui-ci pour droite double: partant cet axe est une *droite double* du complexe. Donc en résumant nous concluons que:

Le complexe a pour droites doubles toutes les droites qui, dans le plan à l'infini, passent par le point à l'infini de r. *Il a en conséquence le plan à l'infini (compté doublement) comme partie du lieu de ses points singuliers et le point à l'infini de* r *(compté doublement) comme partie de l'enveloppe de ses plans singuliers: les droites singulières qui correspondent soit à ces points soit à ces plans singuliers, sont précisément ce faisceau de droites doubles. La surface des points singuliers se compose en outre du cylindre droit* C *ayant* r *pour axe et* m *pour rayon: les droites singulières qui correspondent aux points de* C *forment la congruence quadratique des droites qui touchent* C *et qui sont en direction perpendiculaire à* r, *c'est-à-dire coupent la droite à l'infini qui est polaire de* r *relativement à l'absolu. L'enveloppe des plans singuliers se compose encore de l'absolu: les droites singulières qui correspondent aux plans tangents de l'absolu forment la congruence quadratique (imaginaire) des droites qui s'appuient sur* r *et sur l'absolu.*

II.

7. Nous allons maintenant étudier le même complexe et en trouver d'autres propriétés par la voie analytique. Imaginons un système de trois axes rectangulaires dont la droite r soit l'axe des z. Les coordonnées d'une droite quelconque, joignant les points (xyz), $(x'y'z')$, seront par rapport à ces axes:

$$p_{14} = x - x', \quad p_{24} = y - y', \quad p_{34} = z - z',$$

$$p_{23} = yz' - zy', \quad p_{31} = zx' - xz', \quad p_{12} = xy' - yx'.$$

Le moment de cette droite par rapport à l'axe des z, c'est-à-dire à r, sera, comme l'on sait

$$\frac{xy' - yx'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}},$$

on bien

$$\frac{p_{12}}{\sqrt{p_{14}^2+p_{24}^2+p_{34}^2}}\ (^3).$$

Par suite le complexe des droites dont le moment par rapport à r a une valeur (absolue) donnée m, a pour équation:

$$\frac{p_{12}}{\sqrt{p_{14}^2+p_{24}^2+p_{34}^2}}=m,$$

c'est-à-dire

$$p_{14}^2+p_{24}^2+p_{34}^2-\frac{1}{m^2}p_{12}^2=0.$$

En ajoutant cette équation à

$$2\lambda\,(p_{14}p_{23}+p_{24}p_{31}+p_{34}p_{12})=0$$

et en formant le déterminant de la nouvelle équation, on obtient:

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda & & & & \\ \lambda & 0 & & & & \\ & & 1 & \lambda & & \\ & & \lambda & 0 & & \\ & & & & 1 & \lambda \\ & & & & \lambda & -\frac{1}{m^2} \end{vmatrix}.$$

La valeur de ce déterminant est

$$-\lambda^4\left(\lambda^2+\frac{1}{m^2}\right)$$

et ses subdéterminants du 5e ordre ont tous le facteur λ^2, tandis que ceux du 4e ordre n'ont pas λ pour facteur commun. Donc la *caractéristique* de ce complexe dans la classification de M. WEILER (4) est [(22) 11], où le symbole (22) correspond à la racine quadruple $\lambda=0$ du déterminant, tandis que les deux 1 correspondent à $\lambda^2+1/m^2=0$, c'est-à-dire aux deux racines simples $\lambda=\pm i/m$.

---

(3) Nous avons donné l'expression plus générale du moment de deux droites en fonction de leurs coordonnées générales dans notre Note: *Sulle geometrie metriche dei complessi lineari e delle sfere e sulle loro mutue analogie* (Atti Acc. Torino, XIX [questo volume, pp. 262-287]). On en tire l'équation de notre complexe quadratique sous sa forme la plus générale.

(4) *Ueber die verschiedenen Gattungen der Complexe zweiten Grades,* Math. Ann., VII. Les complexes [(22) 11] sont étudiés au n0 23 (pp. 184-186) de ce Mémoire.

8. L'équation du complexe nous donne pour le cône appartenant au point $P(xyz)$ l'équation en coordonnées variables x', y', z' :

$$(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2-\frac{1}{m^2}(xy'-yx')^2=0,$$

et cette équation représente évidemment un cône droit dont l'axe est la normale au plan

$$xy'-yx'=0,$$

c'est-à-dire au plan qui joint le point P à la droite r. — Comme le déterminant de cette équation, rendue homogène au moyen d'un facteur $t=1$:

$$\begin{vmatrix} t^2-\frac{1}{m^2}y^2 & \frac{1}{m^2}xy & 0 & -xt \\ \frac{1}{m^2}xy & t^2-\frac{1}{m^2}x^2 & 0 & -yt \\ 0 & 0 & t^2 & -zt \\ -xt & -yt & -zt & x^2+y^2+z^2 \end{vmatrix}$$

a tous ses premiers subdéterminants affectés du facteur commun

$$t^2\left[\frac{1}{m^2}(x^2+y^2)-t^2\right],$$

il s'ensuit que la surface singulière de notre complexe se décompose, comme lieu de points, en le plan à l'infini ($t=0$) compté deux fois, et en la surface

$$x^2+y^2=m^2,$$

c'est-à-dire le cylindre droit C qui a r pour axe et m pour rayon.

9. L'équation du complexe nous donne de même pour la courbe du complexe appartenant au plan π

$$\xi x+\eta y+\zeta z+\tau=0,$$

l'équation en coordonnées variables de plan $\xi', \eta', \zeta', \tau'$:

$$(\eta\zeta'-\zeta\eta')^2+(\zeta\xi'-\xi\zeta')^2+(\xi\eta'-\eta\xi')^2-\frac{1}{m^2}(\zeta\tau'-\tau\zeta')^2=0.$$

Or comme l'équation

$$(\eta\zeta'-\zeta\eta')^2+(\zeta\xi'-\xi\zeta')^2+(\xi\eta'-\eta\xi')^2=0$$

est l'équation tangentielle du couple de points cycliques du plan π, on voit que l'équation précédente est l'équation tangentielle d'un cercle ayant pour centre le point

$$\zeta\tau' - \tau\zeta' = 0,$$

c'est-à-dire le point d'intersection du plan π avec l'axe r. On retrouve ainsi le résultat que les courbes du complexe sont des cercles ayant leurs centres sur la droite fixe r. — En formant encore le déterminant de l'équation tangentielle de ce cercle, on voit que ses subdéterminants du 3e ordre ont tous le facteur commun

$$\zeta^2(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2),$$

d'où l'on conclut que la surface singulière se décompose, comme enveloppe de plans, en le point à l'infini ($\zeta = 0$) de la droite r compté deux fois, et en la courbe

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0,$$

c'est-à-dire l'absolu.

10. La composition de la surface singulière, que nous avons ainsi retrouvée analytiquement, s'accorde avec ce qui arrive en général pour les complexes quadratiques dont la caractéristique est [(22) 11]. La propriété des courbes du complexe d'être des cercles doublement tangents au cylindre C, et celle des cônes du complexe d'être des cônes droits doublement tangents à ce même cylindre, ne sont que des conséquences de la propriété générale des coniques et des cônes d'un complexe quadratique quelconque d'être quatre fois tangents à la surface singulière. Ces propriétés subsisteront donc pour tous les complexes *homofocaux*, c'est-à-dire ayant la même surface singulière que notre complexe.

L'équation de la série des complexes homofocaux au complexe

$$p_{14}^2 + p_{24}^2 + p_{34}^2 - \frac{1}{m^2} p_{12}^2 = 0$$

s'obtient, comme on sait (5), de la manière suivante : ajoutons à cette dernière équation

$$2\lambda(p_{14}p_{23} + p_{24}p_{31} + p_{34}p_{12}) = 0,$$

formons l'équation réciproque de celle qu'on obtient ainsi, et mettons-y pour variables les coordonnées complémentaires de droites. On ob-

(5) SCHUR, *Zur Theorie der Strahlencomplexe zweiten Grades*, Math. Ann., XVII, pp. 107-109. Avant de connaître cette Note nous avions trouvé l'équation d'une série homofocale de complexes quadratiques en coordonnées tout-à-fait générales de droites (voir notre dissertation citée ci-aprés).

tient ainsi immédiatement :

$$\lambda^2 \left[\left(\lambda^2 + \frac{1}{m^2}\right) p_{14}^2 + \left(\lambda^2 + \frac{1}{m^2}\right) p_{24}^2 + \lambda^2 p_{34}^2 - \frac{1}{m^2} \lambda^2 p_{12}^2 - \right.$$

$$\left. - 2\lambda \left(\lambda^2 + \frac{1}{m^2}\right) p_{14} p_{23} - 2\lambda \left(\lambda^2 + \frac{1}{m^2}\right) p_{24} p_{31} - 2\lambda^3 p_{34} p_{12}\right] = 0,$$

c'est-à-dire, divisant encore par λ^2 et se servant de la relation générale entre les coordonnées de droites :

$$\left(\lambda^2 + \frac{1}{m^2}\right) p_{14}^2 + \left(\lambda^2 + \frac{1}{m^2}\right) p_{24}^2 + \lambda^2 p_{34}^2 - \frac{1}{m^2} \lambda^2 p_{12}^2 + \frac{2}{m^2} \lambda p_{12} p_{34} = 0.$$

Faisons varier λ dans cette équation : on aura tous les complexes homofocaux au nôtre. Cette série est du 2e degré, c'est-à-dire par chaque droite de l'espace il passe deux de ces complexes. Notre complexe correspond à $\lambda = \infty$. Aux deux racines simples du déterminant $\lambda = \pm i/m$ correspondent les complexes de la série qui ont pour équations :

$$-\frac{1}{m^2} p_{34}^2 + \frac{1}{m^2} \frac{1}{m^2} p_{12}^2 \pm \frac{2}{m^2} \frac{i}{m} p_{12} p_{34} = 0,$$

ou bien

$$\left(\frac{1}{m} p_{12} \pm i p_{34}\right)^2 = 0,$$

c'est-à-dire les deux complexes linéaires comptés deux fois :

$$\frac{1}{m} p_{12} + i p_{34} = 0, \quad \frac{1}{m} p_{12} - i p_{34} = 0.$$

Ces deux complexes linéaires imaginaires et en involution sont donc les complexes *fondamentaux* de la série de complexes homofocaux et de sa surface singulière, c'est-à-dire les seuls complexes linéaires (qui ne soient pas spéciaux) par rapport auxquels le cylindre C correspond à l'absolu.

Comme la valeur $\lambda = \infty$ qui correspond à notre complexe quadratique est la conjuguée harmonique de la racine $\lambda = 0$ par rapport aux deux racines $\lambda = \pm i/m$ du déterminant, on en conclut que parmi les complexes de la série homofocale le nôtre jouit de particularités projectives qui le distinguent parmi tous ceux de la même série : le rapport anharmonique qui est le seul invariant absolu des complexes quadratiques [(2 2) 1 1] a pour notre complexe la valeur -1 (6). Cela s'accorde avec le fait que lorsque le cylindre C (et en conséquence toute la surface singulière) est donné, notre complexe lui aussi est tout-à-fait donné.

11. Parmi ces particularités projectives il y en a une qui regarde les droites singulières. Pour une valeur quelconque de λ le complexe correspondant de la série homofocale a ses droites singulières données par les équations:

$$(1)\quad \left(\lambda^2+\frac{1}{m^2}\right)p_{14}^2+\left(\lambda^2+\frac{1}{m^2}\right)p_{24}^2+\lambda^2 p_{34}^2-\frac{1}{m^2}\lambda^2 p_{12}^2+\frac{2}{m^2}\lambda p_{12}p_{34}=0,$$

$$\left(\lambda^2 p_{34}+\frac{1}{m^2}\lambda p_{12}\right)\left(-\frac{1}{m^2}\lambda^2 p_{12}+\frac{1}{m^2}\lambda p_{34}\right)=0,$$

c'est-à-dire elles forment deux congruences quadratiques appartenant respectivement aux complexes linéaires

$$(2)\qquad p_{12}+\lambda m^2 p_{34}=0,$$

$$(3)\qquad \lambda p_{12}-p_{34}=0$$

(qui ne sont pas en général en involution, contrairement à ce que dit M. WEILER). Pour la première de ces congruences en substituant l'équation (2) dans (1), on a les deux autres équations suivantes

$$p_{14}^2+p_{24}^2-\frac{1}{m^2}p_{12}^2=0,\quad p_{14}^2+p_{24}^2-m^2\lambda^2 p_{34}^2=0,$$

qui montrent que cette congruence se compose de droites tangentes au cylindre fixe C et coupant le plan à l'infini dans les points de la conique qui a dans ce plan pour équation

$$x^2+y^2-m^2\lambda^2 z^2=0.$$

En d'autres termes cette congruence se compose, pour un complexe quelconque λ de la série, de droites tangentes au cylindre C et faisant avec l'axe r de celui-ci un même angle, dont le cosinus est donné par $1/\sqrt{1+m^2\lambda^2}$. Or pour notre complexe on a $\lambda=\infty$, et cet angle se réduit en conséquence à l'angle droit: cette conique du plan à l'infini se réduit à la droite (double) $z=0$, qui est aussi

---

(6) Voir le théorème sur les invariants absolus des complexes quadratiques, que nous avons donné au n° 141 de notre Mémoire: *Sulla geometria della retta e delle sue serie quadratiche* (Mem. Acc. Torino, (2) 36 [questo volume, pp. 127-217]).

l'axe du complexe spécial $p_{34} = 0$, auquel se réduit dans ce cas le complexe linéaire (2).

Pour la congruence de droites singulières appartenant au complexe linéaire (3) on a, en combinant cette équation avec (1):

$$p_{14}^2 + p_{24}^2 + p_{34}^2 = 0, \quad p_{14}^2 + p_{24}^2 + \lambda^2 p_{12}^2 = 0,$$

d'où l'on voit que cette congruence se compose de droites qui coupent l'absolu et qui touchent un cylindre droit (imaginaire) ayant r pour axe et le rayon égal à i/λ. Pour notre complexe quadratique ce cylindre droit se réduit à son axe, c'est-à-dire le complexe linéaire (3) auquel appartient cette congruence de droites singulières, devient pour $\lambda = \infty$ le complexe spécial $p_{12} = 0$ ayant r pour axe.

12. En transformant projectivement notre complexe quadratique, on n'obtient donc pas le complexe le plus général de la classe [(2 2) 1 1], mais bien l'un de ceux qui appartiennent à la catégorie des complexes des droites coupant harmoniquement deux surfaces du 2e ordre, catégorie que nous avons étudiée avec notre ami M. Loria dans un Mémoire récent (7). Cela résulte immédiatement des caractères que nous avons trouvés dans ce Mémoire pour le complexe [(2 2) 1 1] de cette catégorie. D'ailleurs on peut vérifier sans difficulté que les droites de notre complexe coupent harmoniquement les deux quadriques (ayant r pour axe de rotation)

$$x^2 + y^2 + \frac{m^2}{k^2} z^2 = m^2 - k^2, \quad x^2 + y^2 - \frac{m^2}{k^2} z^2 = m^2 + k^2,$$

où k^2 représente un paramètre arbitraire. En particulier, si l'on pose $k^2 = m^2$, on voit que notre complexe peut être considéré comme composé des cordes de la surface

$$x^2 + y^2 - z^2 = 2m^2$$

qui sont vues sous un angle droit à partir du centre de celle-ci.

13. La série homofocale que nous avons considérée se compose, comme nous avons déjà remarqué, de ∞^1 complexes quadratiques dont toutes les coniques sont des cercles et dont tous les cônes sont

---

(7) Voir la Note: *Sur les différentes espèces des complexes du 2e degré des droites qui coupent harmoniquement deux surfaces du second ordre* (Math. Ann., XXIII, pp. 213-234): notre complexe y est considéré, du point de vue projectif, à la p. 230 [questo volume, pp. 1-24, a p. 20].

des cônes droits (ce sont même les complexes quadratiques les plus généraux qui jouissent de cette propriété). En outre ces cercles et ces cônes sont tous doublement tangents au cylindre C. Dans un plan quelconque π ces cercles forment donc l'une des deux séries de cercles doublement tangents à l'ellipse d'intersection de π avec C ; nous avons déjà reconnu que l'un de ces cercles (celui qui appartient à notre complexe) touche cette ellipse dans les sommets de son axe focal : donc cette série de cercles doublement tangents à l'ellipse est celle dont les cordes de contact sont parallèles à cet axe, c'est-à-dire dont les centres ont pour lieu l'autre axe de l'ellipse. Parmi ces cercles il y en a deux de rayon nul et dont les centres sont les foyers imaginaires de l'ellipse : ces cercles se réduisent, comme enveloppes, à leurs centres comptés doublement et ils correspondent donc aux deux complexes de la série homofocale qui se réduisent aux deux complexes linéaires fondamentaux comptés doublement. Nous obtenons ainsi une propriété remarquable du cylindre droit : *Un cylindre droit quelconque est coupé par chaque plan de l'espace en une ellipse dont les deux foyers imaginaires sont les points qui correspondent à ce plan par rapport à deux complexes linéaires (imaginaires conjugués et en involution entre eux).* — Cette propriété ne subsiste pas pour les foyers réels, ni en général pour des surfaces quadriques qui ne soient pas des cylindres droits.

14. On peut donner une définition géométrique d'un complexe quadratique quelconque de la série homofocale à notre complexe analogue à celle donnée pour celui-ci. L'équation (n° 1) de ce complexe quelconque (λ) peut s'écrire de la manière suivante :

$$\left(\lambda^2+\frac{1}{m^2}\right)(p_{14}^2+p_{24}^2+p_{34}^2)-\frac{1}{m^2}(p_{34}^2+\lambda^2p_{12}^2-2\lambda p_{12}p_{34})=0,$$

c'est-à-dire :

$$\frac{\lambda p_{12}-p_{34}}{\sqrt{p_{14}^2+p_{24}^2+p_{34}^2}}=\pm m\sqrt{\lambda^2+\frac{1}{m^2}}.$$

Posons $\lambda=-\frac{1}{k}$; alors cette équation deviendra :

$$\frac{p_{12}}{\sqrt{p_{14}^2+p_{24}^2+p_{34}^2}}+k\frac{p_{34}}{\sqrt{p_{14}^2+p_{24}^2+p_{34}^2}}=\mp\sqrt{m^2+k^2},$$

et elle pourra aussi s'écrire, en vertu des formules connues, en désignant par d la droite de coordonnées p_{ik}:

$$\text{mom}\,(r, d) + k \cos (rd) = \mu,$$

où μ est une constante donnée par:

$$\mu^2 - k^2 = m^2.$$

Nous concluons donc que l'un quelconque des complexes de la série homofocale se compose des droites d pour lesquelles la quantité $\text{mom}\,(r, d) + k \cos (rd)$ a une valeur absolue constante μ, les deux constantes k et μ variant avec le complexe (puisque $k = -1/\lambda$) de façon que $\mu^2 - k^2 = m^2$. Or M. KLEIN [8] a nommé *moment* de deux complexes linéaires, dont les axes soient r et r' et les paramètres k, k', la quantité $\text{mom}\,(r, r') + (k + k') \cos (rr')$: en particulier le *moment* d'une droite d et du complexe linéaire qui a r pour axe et k pour paramètre (c'est-à-dire qui a pour équation $p_{12} + kp_{34} = 0$) sera la quantité $\text{mom}\,(r, d) + k \cos (rd)$. Donc nous pouvons dire que l'un quelconque des complexes de la série est *le complexe des droites qui ont un moment donné par rapport à un complexe linéaire donné* dont (3) est l'équation; et nous pourrons énoncer la proposition suivante:

Chaque complexe quadratique de la classe [(22) 11] *est une transformation projective d'un complexe des droites qui ont un moment donné par rapport à un complexe linéaire fixe. La série homofocale de ce dernier complexe quadratique se compose aussi de complexes des droites qui ont un même moment donné* μ *par rapport à un complexe linéaire dont l'axe* r *est toujours le même, tandis que le paramètre* k *varie avec le complexe de la série de façon que* $\mu^2 - \mathrm{k}^2$ *ait une valeur constante. En nommant* m^2 *cette valeur, la surface singulière de toute la série homofocale se composera de l'absolu et du cylindre droit ayant* r *pour axe et* m *pour rayon. La série homofocale de complexes quadratiques correspond donc univoquement au faisceau des complexes linéaires ayant* r *pour axe: la congruence de deux complexes correspondants se compose de droites qui coupent l'absolu et qui forment l'une des deux congruences quadratiques de droites singulières du complexe quadratique. Parmi ces complexes linéaires celui dont le paramètre* k *est nul, correspond à un complexe quadratique de la série homofocale, lequel sera le lieu des droites qui ont un même moment* m *par rapport à la droite* r.

---

(8) *Die allgemeine lineare Transformation der Liniencoordinaten* (Math. Ann., II, p. 368).

III.

15. Les droites qui ont des moments donnés m, m_1 par rapport à deux droites fixes r, r_1, appartiennent aux deux complexes quadratiques définis respectivement par ces deux conditions, et forment donc une congruence du 4^e degré. Mais on sait aussi que lorsqu'on donne la valeur absolue du rapport des moments d'une droite par rapport à deux droites fixes r, r_1, cette droite appartient à l'un ou à l'autre de deux certains complexes linéaires en involution, relativement auxquels r, r_1 sont des droites conjuguées. Donc notre congruence du 4^e degré se décompose en deux congruences quadratiques appartenant à ces deux complexes linéaires. — Dans un plan quelconque les droites des deux complexes quadratiques enveloppent, comme nous avons vu, respectivement deux cercles ayant leurs centres sur r, r_1. La droite qui joint ces deux centres appartient en conséquence aux deux complexes linéaires nommés. Les 4 tangentes communes à ces cercles se coupent deux-à-deux sur cette droite dans leurs deux centres de similitude : on en déduit que ceux-ci sont les deux points qui correspondent à notre plan par rapport à ces deux complexes linéaires. Donc dans chaque plan les deux droites de l'une congruence quadratique sont les deux tangentes qui se coupent dans un centre de similitude, celles de l'autre congruence sont celles qui se coupent dans l'autre centre de similitude. — De même on peut distinguer facilement, parmi les 4 droites ayant par rapport à r, r_1 les moments m, m_1 et passant par un point quelconque, celles qui appartiennent à l'une congruence quadratique de celles qui appartiennent à l'autre : car les plans des deux couples de droites se couperont dans la droite qui passe par ce point et coupe les deux droites r, r_1 (puisque cette droite appartient aux deux complexes linéaires qui contiennent ces congruences quadratiques).

L'une quelconque de ces deux congruences quadratiques peut être considérée comme l'intersection du complexe quadratique des droites ayant le moment m par rapport à r avec un complexe linéaire quelconque : la droite conjuguée r_1 de r par rapport à celui-ci jouira de la propriété que toutes les droites de cette intersection auront avec elle un moment m_1 fixe (égal au produit de m par le *module* du complexe linéaire par rapport aux deux droites conjuguées r_1, r). La droite qui joint les points à l'infini de r et r_1 est une droite double de la congruence quadratique, car elle appartient à notre complexe linéaire et est une droite double du complexe quadratique. Elle est donc aussi une droite double de la surface focale de cette congruence. En outre comme par chaque point de l'absolu il passe seulement un faisceau (dont le plan passe par r) de droites du complexe quadratique, ce point sera un foyer pour la droite de la congruence qui appartient à ce faisceau. Donc *la surface focale de notre congruence quadratique a une droite double à l'infini et coupe encore le plan à l'infini suivant l'absolu.*

Cette surface focale est donc une «Complexfläche», et il est facile de voir que du point de vue de la géométrie projective elle ne présente pas d'autres singularités.

16. Les droites qui ont des moments donnés m, m_1, m_2 par rapport à 3 droites données r, r_1, r_2 appartiennent à l'intersection de 3 complexes quadratiques et forment en conséquence une surface réglée du 16ᵉ degré. Mais on voit de la même manière que pour les congruences considérées ci-dessus, que cette surface réglée se décompose en 4 surfaces réglées du 4ᵉ degré appartenant respectivement à 4 congruences linéaires communes chacune à trois complexes linéaires pour lesquels respectivement les droites rr_1, r_1r_2, r_2r sont deux droites conjuguées. Chacune de ces 4 congruences linéaires contient donc les droites qui coupent rr_1r_2 et a en conséquence pour directrices deux génératrices (du même mode de génération) de la surface quadrique déterminée par les génératrices rr_1r_2. Ces deux directrices sont des directrices doubles pour la surface réglée du 4ᵉ degré correspondante, qui ne présente aucune autre particularité projective.

17. Les droites qui ont des moments donnés m, m_1, m_2, m_3 par rapport à 4 droites données r, r_1, r_2, r_3 sont au nombre de 32, et elles se divisent en 8 groupes de 4, dont chaque groupe appartient à un système de génératrices d'une surface quadrique qui contient dans le même système les deux droites qui coupent simultanément r, r_1, r_2, r_3. Cela résulte encore de la considération des complexes linéaires des droites dont les moments par rapport à rr_1, rr_2, rr_3 ont les rapports donnés $m : m_1, m : m_2, m : m_3$. Chacune de ces conditions détermine deux complexes linéaires : on peut donc prendre 3 de ces complexes, un pour chaque couple, en 8 manières diverses et les droites cherchées devront appartenir à l'une des 8 surfaces réglées quadriques d'intersection de ces complexes.

Turin, le 6 Janvier 1884.