I Grandi Matematici Italiani online

Corrado Segre

Corrado Segre

Sulla teoria e sulla classificazione delle omografie in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni

Mem. R. Acc. Naz. Lincei, Vol. **19** (1883-84), p. 127–148

in: Corrado Segre, Opere, a cura della Unione Matematica Italiana, Volume III, Edizione Cremonese, Roma, 1961, p. 304–333

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Segre_CW_3_304>

Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

XLIX.

SULLA TEORIA E SULLA CLASSIFICAZIONE DELLE OMOGRAFIE IN UNO SPAZIO LINEARE AD UN NUMERO QUALUNQUE DI DIMENSIONI [*]

« Atti della R. Accademia dei Lincei », Memorie, Serie terza, vol. XIX, 1884, pp. 127-148.

Le omografie, le quali occupano un posto così importante nella geometria proiettiva, paiono essere state finora poco studiate in ispazi lineari a quante si vogliano dimensioni. Quando la corrispondenza omografica è tra due spazi distinti o considerati come tali, il suo studio è assai semplice, riducendosi ad una facile generalizzazione delle proprietà note relative allo spazio a 3 dimensioni. Tale studio equivale analiticamente a quello di una forma bilineare unica, e la classificazione di quelle omografie è ridotta alla considerazione di omografie degeneri dotate di elementi singolari: in tali omografie non vi sono invarianti assoluti. Ma quando si passa a considerare l'omografia tra due spazi ad n dimensioni considerati espressamente come sovrapposti, allora lo studio si complica. Dal punto di vista analitico si hanno, non più una sola, ma due forme bilineari da considerare, vale a dire oltre a quella forma che rappresenta effettivamente la corrispondenza omografica si deve considerare quell'altra forma bilineare, che rappresenta la condizione perchè un punto ed un piano dello spazio considerato siano in posizione unita. La geometria proiettiva delle omografie di spazi sovrapposti coincide così colla teoria analitica invariantiva di una coppia di forme bilineari: la classificazione di quelle omografie nella geometria proiettiva equi-

[*] Approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia nella seduta del 6 aprile 1884.

vale alla classificazione di queste coppie di forme bilineari nell'algebra delle trasformazioni lineari.

Ora il WEIERSTRASS in una Memoria importante e ben nota ha risolto la questione principale della teoria analitica delle coppie di forme bilineari, mostrando quali siano le condizioni necessarie e sufficienti perchè due tali coppie di forme siano identiche dal punto di vista dell'algebra moderna, vale a dire siano trasformabili l'una nell'altra mediante sostituzioni lineari. Traducendo geometricamente l'importante teorema di WEIERSTRASS si ha dunque appunto la classificazione geometrica delle omografie di spazi sovrapposti. Però questa traduzione geometrica non è tanto semplice quanto si potrebbe credere, anzi essa presenta alcune notevoli difficoltà, ed in fatti non crediamo che essa sia stata fatta prima d'ora. Ci pare di aver superato tali difficoltà mediante alcuni teoremi, che conducono ad una distinzione geometrica delle omografie in varie *classi* (corrispondentemente alle varie distribuzioni possibili dei *divisori elementari*) ed alla considerazione degl'invarianti assoluti che corrispondono a ciascuna classe. Per le omografie delle varie classi abbiamo mostrato come la differenza consista nella distribuzione dei punti (o piani) uniti delle omografie stesse; entro ciascuna classe poi le varie omografie hanno la stessa distribuzione dei punti uniti, ma valori diversi in generale per gl'invarianti assoluti: di questi invarianti si ha un'interpretazione geometrica semplicissima, che fornisce anzi una proprietà importante di tutte le omografie [1]. Aggiungiamo che per queste vale un'altra proposizione notevole, che crediamo nuova, vale a dire ogni omografia particolare gode della proprietà, sia per la distribuzione degli elementi uniti, sia pel significato degl'invarianti assoluti, di corrispondere per dualità a se stessa (quando si scambino tra loro i due spazi).

---

[1] Da un corollario del teorema di WEIERSTRASS relativo alle coppie di forme bilineari simmetriche (o forme quadratiche) si può dedurre in modo analogo a quello tenuto nel presente lavoro la classificazione delle coppie di quadriche in uno spazio lineare qualunque, cosa che abbiamo fatta in un paragrafo della nostra dissertazione di laurea. (V. *Studio sulle quadriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni*, nelle Mem. Acc. Torino, (2) 36, p. 59 [questo volume, p. 25]). Però siccome la caratteristica e gl'invarianti assoluti del sistema di due quadriche qualunque coincidono colla caratteristica e gl'invarianti assoluti dell'omografia risultante dalla combinazione delle polarità rispetto a queste quadriche (V. la 2ª nota al n⁰ 11 [v. questo volume, nota (7) a p. 318]), così si può ritenere la classificazione delle coppie di quadriche come identica in sostanza alla classificazione delle omografie di spazi sovrapposti.

Nella 1ª parte di questo lavoro studieremo le omografie tra due spazi considerati come distinti e mostreremo quali siano dal punto di vista proiettivo le varie specie di tali omografie. Con ciò è chiaro che sono pure studiate e classificate le correlazioni tra spazi distinti, perocchè quando due spazi vengono considerati come distinti, i loro elementi appaiono come di natura diversa e quindi prendendo per elementi dell'uno i punti, si possono prendere per elementi dell'altro (corrispondenti a quelli) indifferentemente i punti od i piani, senza dover alterare in alcun modo i ragionamenti od i calcoli.

Nella 2ª parte studieremo le omografie tra due spazi sovrapposti, le proprietà dei loro *spazi fondamentali* di punti o di piani uniti, e mostreremo come, senza fare alcun uso di equazioni canoniche variabili da caso a caso, colla sola interpretazione geometrica data dal teorema di WEIERSTRASS, si possa fare la classificazione di quelle omografie ed assegnarne gl'invarianti assoluti (2).

Infine nella 3ª parte applicheremo le cose dette alla classificazione delle omografie non degeneri di due spazi ordinari, cioè a 3 dimensioni, sovrapposti, e di due piani ordinari sovrapposti (3).

I.

1. Rappresentino le x_i $(i = 1, 2, \dots, n+1)$ coordinate omogenee di punti x in uno spazio lineare ad n dimensioni S, e le ξ'_k $(k = 1, 2, \dots, n+1)$ coordinate omogenee di *piani* (spazi lineari

(2) Il sig. VERONESE nella Memoria *Interprétations géométriques de la théorie des substitutions de* n *lettres* etc. (Ann. mat., (2) 11, pp. 93-236) considerò, oltre alla omografia più generale di due spazi lineari sovrapposti ad n dimensioni, certe particolari omografie, da esso chiamate *collineazioni* di varie specie, e la cui caratteristica è $[(\overbrace{1\,1\dots 1}^{h_1})\,(\overbrace{1\,1\dots 1}^{h_2})]$, essendo $h_1 + h_2 = n + 1$. La loro proprietà principale, dimostrata altrimenti dal VERONESE, risulta immediatamente dalla nostra teoria (v. n⁰ 18).

(3) Le varie specie di omografie del piano e dello spazio ordinario furono già in parte esaminate da vari autori, come HIRST, STURM, FIEDLER, CLEBSCH e GORDAN, REYE, BATTAGLINI. Ma crediamo che la loro classificazione completa sia fatta per la prima volta in un lavoro del nostro carissimo amico dott. GINO LORIA, che verrà presto pubblicato nel Giornale di matematiche (Vol. XXII, pp. 1-16). Tuttavia essendo il metodo da noi seguìto per ottenerla affatto diverso da quello seguìto in quel lavoro, ed essendovi anche tra i nostri risultati l'enumerazione degl'invarianti assoluti relativi ad ogni specie di omografia, abbiamo creduto bene di esporre quella classificazione alla fine di questa nostra Memoria.

ad $n-1$ dimensioni) ξ' in un altro spazio lineare ad n dimensioni S'. Allora un'equazione bilineare qualunque nelle x_i e ξ'_k,

(1) $$\sum_{ik} a_{ik}\, x_i\, \xi'_k = 0\,,$$

rappresenta un'*omografia*, vale a dire una corrispondenza in cui ad un punto qualunque x di S corrisponde in S' il punto x' avente per equazione in coordinate ξ'_k di piani la (1), cioè il punto di coordinate:

(2) $$\varrho x'_k = \sum_i a_{ik}\, x_i\,,$$

e similmente ad un piano qualunque ξ' di S' corrisponde in S il piano ξ avente la (1) per equazione in coordinate x_i di punti, cioè il piano di coordinate:

(3) $$r\xi_i = \sum_k a_{ik}\, \xi'_k\,.$$

Viceversa, se è dato in S' un punto qualunque x', le coordinate del punto x corrispondente di S si avranno risolvendo le equazioni (2) rispetto alle x_i. Supponendo adunque anzitutto che il determinante

$$A = |a_{ik}|\,,$$

che diremo determinante dell'omografia, non sia nullo, e chiamando A_{ik} il subdeterminante complementare di a_{ik} in A, avremo:

(2') $$\sigma x_i = \sum_k A_{ik}\, x'_k\,,$$

e similmente risolvendo le (3) si ha che il piano ξ' corrispondente al piano ξ sarà dato da:

(3') $$s\xi'_k = \sum_i A_{ik}\, \xi_i\,.$$

Sommando tra loro le (2') moltiplicate per ξ_i, ovvero le (3') moltiplicate per x'_k, si ha per equazione del punto x corrispondente ad x', ovvero del piano ξ' corrispondente a ξ, l'equazione:

(1') $$\sum_{ik} A_{ik}\, \xi_i\, x'_k = 0.$$

Questa equazione bilineare rappresenta adunque l'omografia considerata in modo analogo alla equazione (1). Abbiamo dunque vari modi, sostanzialmente identici, di rappresentare analiticamente la stessa omografia. Si può partire, come abbiamo fatto, da un'equazione bilineare e dedurne le relazioni lineari tra le coordinate di elementi corrispondenti; ma si può anche partire da tali relazioni lineari e dedurne quell'equazione bilineare. Due forme bilineari aggiunte l'una dell'altra rappresenteranno una stessa omografia, ma con uno scambio dei due spazi.

2. La corrispondenza tra i punti x, x' e i piani ξ, ξ' dei due spazi espressa dalle equazioni lineari (2), (2') e (3), (3') è evidentemente tale che, se x ovvero ξ descrivono spazi lineari ad un numero qualunque di dimensioni di punti o di piani contenuti in S, anche x' o ξ' descriveranno spazi lineari ad egual numero di dimensioni contenuti in S', e viceversa. Inoltre anche tra gli elementi di questi spazi corrispondenti così descritti vi sarà corrispondenza omografica. In particolare le punteggiate ed i fasci di piani corrispondenti nei due spazi si corrisponderanno proiettivamente. Più in generale ad uno spazio algebrico di qualunque specie a un numero qualunque di dimensioni contenuto in S, corrisponderà in S' uno spazio algebrico ad altrettante dimensioni e dotato degli stessi caratteri (ordine, classe, singolarità, ecc.), come risulta immediatamente dalla linearità delle equazioni che determinano la omografia.

3. Le cose esposte si modificano quando il determinante A si annulla: in tal caso l'omografia non costituisce più una corrispondenza univoca tra i due spazi. Supponiamo in generale che il determinante A dell'omografia sia nullo insieme coi suoi subdeterminanti degli ordini $n, n-1, \ldots, n-h+2$. Allora la risoluzione delle equazioni (2) e (3) rispetto alle x_i e alle ξ'_k non si potrà più effettuare nel modo prima usato. In tal caso è noto che il sistema delle $n+1$ equazioni lineari:

$$(4) \qquad \sum_i a_{ik}\, y_i = 0$$

è h volte indeterminato, e quindi esiste in S uno spazio lineare P_{h-1} ad $h-1$ dimensioni di punti y che lo soddisfano (per $h=1$ un punto solo), spazio che diremo *singolare* per l'omografia. E similmente le equazioni:

$$(5) \qquad \sum_k a_{ik}\, \eta'_k = 0$$

saranno soddisfatte da tutti i piani η' dello spazio S' appartenenti ad un sistema lineare *singolare* Π'_{h-1} ad $h-1$ dimensioni. Ciò posto siano x, x' due punti corrispondenti qualunque dell'omografia, legati perciò dalle equazioni (2). Moltiplicando queste per η'_k e sommandole si ha:

$$\varrho \sum_k x'_k \eta'_k = \sum_i x_i \sum_k a_{ik} \eta'_k$$

e quindi se η' è un piano singolare qualunque di S', cioè un piano di Π'_{h-1}, sicchè in virtù delle (5) il secondo membro si annulli, dovrà essere:

$$(6) \qquad \sum_k x'_k \eta'_k = 0, \quad \text{oppure} \quad \varrho = 0.$$

Dunque ad un punto qualunque x di S corrisponde ancora per le (2) un punto determinato x', il quale però starà in virtù della (6) su tutti i piani di Π'_{h-1}, e quindi sul sostegno di questo; salvo quando il punto x sia singolare, cioè appartenga allo spazio singolare P_{h-1}, nel qual caso soltanto, le equazioni (2) essendo soddisfatte per $\varrho = 0$ qualunque siano le x'_k, il punto corrispondente x' è completamente indeterminato. Se invece è dato in S' il punto x' di cui si vuole in S il punto x corrispondente, accadrà che se x' non sta sul sostegno di Π'_{h-1}, cioè su tutti i piani singolari η', dovrà essere in virtù delle (6): $\varrho = 0$ e allora le equazioni (2) confrontate colle (4) mostrano che ad x' corrispondono in S tutti i punti y dello spazio singolare P_{h-1} e solo questi; mentre se il punto x' sta simultaneamente su tutti i piani di Π'_{h-1}, allora le equazioni (2), essendo (in forza delle (5) e (6)) legate da h identità distinte, formeranno un sistema h volte indeterminato, tale che i punti x che lo soddisfanno formeranno uno spazio lineare ad h dimensioni, cioè un S_h. Questo S_h dovrà necessariamente passare per P_{h-1}, poichè è chiaro che, qualunque sia x', le equazioni (2) tra le x_i sono sempre soddisfatte da tutti i punti y determinati dalle (4). Similmente si vede dalle equazioni (3) mediante le (4) e (5) che ad un piano qualunque ξ' di S' corrisponde in S un piano ξ determinato passante per P_{h-1}, salvo quando quel piano ξ' sia singolare, cioè appartenga a Π'_{h-1}, nel qual caso il piano corrispondente ξ è affatto indeterminato. Viceversa ad un piano qualunque ξ di S corrispondono in S' soltanto tutti i piani η' dello spazio singolare Π'_{h-1} definito dalle (5), ma se ξ passa per lo spazio singolare di punti P_{h-1}, allora i piani ξ' corrispondenti formano un sistema ad h dimensioni, cioè un Σ'_h, passante per Π'_{h-1}.

4. Una tale omografia si dirà *omografia degenere* o *singolare* di h^{esima} specie. Riassumendo, essa è dunque dotata di uno spazio singolare di punti ad $h - 1$ dimensioni P_{h-1} in S e di uno spazio

singolare di piani ad $h-1$ dimensioni Π'_{h-1} in S', e stabilisce le seguenti corrispondenze:

Ad un punto di S in generale .	un punto di S' posto sul sostegno di Π'_{h-1}
» un punto qualunque di S' .	tutti i punti in S di P_{h-1}
» un punto di S su P_{h-1} . .	tutti i punti di S'
» un punto di S' sul sostegno di Π'_{h-1}	i punti di un S_h passante per P_{h-1}
Ad un piano qualunque di S .	tutti i piani di Π'_{h-1}
» un piano qualunque di S' .	un piano di S passante per P_{h-1}
» un piano di S passante per P_{h-1}	i piani di un Σ'_h passante per Π'_{h-1}
» un piano di S' appartenente a Π'_{h-1}	tutti i piani di S.

È facile dedurne quali enti corrispondano in ciascuno dei due spazi S, S' a sistemi lineari qualunque di punti o di piani contenuti nell'altro. Notiamo piuttosto che gli S_h passanti per P_{h-1} sono gli elementi di uno spazio lineare ad $n-h$ dimensioni, il quale è legato (come risulta tosto dalle proprietà viste delle omografie) da un'omografia non degenere allo spazio lineare ad $n-h$ dimensioni di punti costituente il sostegno di Π'_{h-1}, in guisa che in quest'omografia ad ogni punto di questo sostegno corrisponde quell'S_h che, considerato come luogo di punti, vedemmo corrispondergli nell'omografia degenere considerata tra gli spazi S e S'. Correlativamente quest'ultima omografia determina un'omografia non degenere tra lo spazio lineare ad $n-h$ dimensioni dei Σ'_h passanti per Π'_{h-1} e quello dei piani passanti per P_{h-1}. Invece di quei Σ'_h considerando i loro sostegni, è chiaro che essi stanno sul sostegno di Π'_{h-1} e quest'osservazione mostra facilmente che l'omografia non degenere ora considerata e quella che le corrisponde per dualità, sono conseguenza immediata l'una dell'altra.

Viceversa, abbiansi negli spazi S, S' due sistemi lineari ad $h-1$ dimensioni di punti e di piani P_{h-1}, Π'_{h-1}, e si stabilisca un'omografia non degenere tra gli S_h passanti per P_{h-1} ed i punti del sostegno di Π'_{h-1}, e quindi anche tra i piani passanti per P_{h-1} e (gli S'_{n-h-1} posti su quel sostegno, vale a dire) i Σ'_h passanti per Π'_{h-1}. Sarà così determinata tra S, S' un'omografia degenere di h^{esima} specie, in cui P_{h-1}, Π'_{h-1} sono gli spazi singolari, a un punto del sostegno di Π'_{h-1} corrispondono in S tutti i punti del corrispondente S_h passante per P_{h-1}, e ad un punto qualunque di S' corrispondono solo tutti i punti di P_{h-1}; ecc.

5. L'omografia tra i due spazi distinti S, S' rappresentata dall'equazione bilineare

$$\sum_{ik} a_{ik}\, x_i\, \xi'_k = 0$$

rimane proiettiva a se stessa se si fanno per le x_i e le ξ'_k due sostituzioni lineari qualunque, affatto indipendenti tra loro e di moduli non evanescenti. Queste due sostituzioni si possono anche considerare come cambiamenti dei sistemi di riferimento dei due spazi S, S'. Ora esse si possono sempre determinare in modo che quella equazione prenda quest'altra forma (*canonica*):

$$\sum_i a_i\, x_i\, \xi'_i = 0.$$

In fatti è chiaro anzitutto che questa forma è caratteristica pel caso in cui gli $n+1$ punti (o piani) di riferimento dello spazio S, corrispondano in quell'omografia agli $n+1$ punti (o piani) omologhi di riferimento dello spazio S'. Ora si può sempre fare una tal scelta di punti di riferimento, poichè la sola condizione da soddisfare è che in ciascuno dei due spazi S, S' quegli $n+1$ punti siano indipendenti, cioè non stiano su un piano; condizione a cui si soddisfa, nel caso di un'omografia non degenere prendendo nell'uno dei due spazi gli $n+1$ punti in modo da soddisfarla, con che anche i punti corrispondenti dell'altro spazio la soddisferanno, e nel caso di un'omografia degenere di h^{esima} specie dotata di uno spazio singolare di punti P_{h-1} in S e di uno spazio singolare di piani Π'_{h-1} in S' prendendo degli $n+1$ punti di S h su P_{h-1} e i rimanenti $n-h+1$ ad arbitrio fuori di P_{h-1}, con che i punti corrispondenti di S' saranno (n^0 4) rispettivamente h punti arbitrari di S' non posti sul sostegno di Π'_{h-1} ed $n-h+1$ punti determinati di questo sostegno.

Ogni omografia tra due spazi distinti S, S' si può dunque sempre rappresentare con un'equazione di quella forma particolare, e anzi dalle cose dette dianzi segue che se quell'omografia è degenere di h^{esima} specie lo spazio singolare di punti dello spazio S congiungerà h dei nuovi punti di riferimento di S, e lo spazio singolare di piani di S' avrà il sostegno determinato dal dover congiungere gli $n-h+1$ punti di riferimento di S' non omologhi a quegli h. Ciò risulta pure dal fatto che per definizione l'omografia degenere di h^{esima} specie essendo caratterizzata dall'annullarsi del suo determinante e dei suoi subdeterminanti d'ordine $n-h+2$, affinchè quell'equazione rappresenti una tale omografia occorre e basta che si annullino h dei suoi coefficienti a_i. Quindi un'omografia degenere di h^{esima} specie può sempre rappresentarsi con un'equazione della forma:

$$\sum_{i=1}^{i=n-h+1} a_i\, x_i\, \xi'_i = 0,$$

donde si scorge che lo spazio singolare di punti in S e quello di piani in S', sono composti di quei punti e quei piani che soddisfanno rispettivamente alle equazioni $x_i = 0$, $\xi'_i = 0$, per tutti i valori di i da 1 ad $n - h + 1$.

È chiaro che senza alterare i sistemi di riferimento si può anche scrivere quell'equazione così:

$$\sum_{i=1}^{i=n-h+1} x_i\, \xi'_i = 0.$$

Possiamo dunque conchiudere: Tutte le omografie tra spazi lineari distinti ad n dimensioni o non degeneri, oppure degeneri della stessa specie, sono identiche dal punto di vista proiettivo. Od in altri termini: Un'omografia tra spazi distinti non ha invarianti assoluti.

II.

6. Due equazioni bilineari tra le x_i e le ξ'_k:

(1) $$A_{x\xi'} \equiv \sum_{ik} a_{ik}\, x_i\, \xi'_k = 0, \qquad B_{x\xi'} \equiv \sum_{ik} b_{ik}\, x_i\, \xi'_k = 0$$

rappresentano due omografie tra gli spazi S ed S' e quindi anche un'omografia tra gli elementi dello spazio S. Consideriamo in fatti un punto qualunque x di S e cerchiamone il punto corrispondente x' di S' nell'omografia $A_{x\xi'}$, e poi di questo il punto corrispondente y di S nell'omografia $B_{x\xi'}$. Se, come noi supporremo, il determinante di questa non è nullo, è chiaro che in generale dato il punto x sarà individuato nel modo detto il punto y, e la corrispondenza che così si ottiene nello spazio S tra i suoi punti x, y è omografica, poichè si può rappresentare colla trasformazione lineare:

(2) $$\sum_i a_{ik}\, x_i = \varrho \sum_i b_{ik}\, y_i,$$

e queste equazioni sono, per l'ipotesi fatta, risolubili rispetto alle y_i. In tal modo dunque le equazioni (1) servono a rappresentarci un'omografia tra due spazi sovrapposti ad S mediante la considerazione di uno spazio ausiliario S'.

7. Cerchiamo i punti *uniti* di quest'omografia, cioè quei punti nei quali coincidono due punti corrispondenti x, y. Perchè un punto x sia unito dovrà soddisfare alle equazioni (2) in cui si ponga $y_i = x_i$, cioè

$$\sum_i (a_{ik} - \varrho b_{ik}) x_i = 0. \tag{3}$$

Ora queste equazioni lineari omogenee nelle x_i dànno anzitutto:

$$\Delta(\varrho) \equiv |a_{ik} - \varrho b_{ik}| = 0. \tag{4}$$

Quest'equazione di grado $n+1$ in ϱ avrà $n+1$ radici. Nel caso più generale queste radici saranno tutte distinte e ciascuna di esse sostituita nelle (3) renderà questo sistema di equazioni atto a determinare un punto x, cosicchè vi saranno in generale $n+1$ punti uniti in un'omografia tra due spazi lineari sovrapposti ad n dimensioni. Ma potrà accadere che l'equazione $\Delta(\varrho) = 0$ abbia radici multiple e che alcune di queste annullino anche tutti i subdeterminanti di un certo ordine del determinante $\Delta(\varrho)$. Poniamo ad esempio che la radice ϱ' annulli anche tutti i subdeterminanti d'ordine $n-h+2$ (e quindi anche quelli d'ordine superiore). Allora ponendo nelle equazioni (3) $\varrho = \varrho'$, è chiaro che esse formeranno un sistema h volte indeterminato e determineranno quindi non un solo punto x, ma uno spazio lineare ad $h-1$ dimensioni di punti uniti. Tutti i vari spazi lineari di punti uniti, che così corrispondono alle diverse radici distinte di $\Delta(\varrho)$, e di cui alcuni potranno ridursi a punti isolati, si diranno *spazi fondamentali di punti* dell'omografia (4).

8. A questi spazi fondamentali si può anche giungere nel seguente modo, che ci darà anche altri risultati. Consideriamo l'omografia tra gli spazi S, S' definita dall'equazione bilineare

$$A_{x\xi'} - \varrho B_{x\xi'} \equiv \sum_{ik} (a_{ik} - \varrho b_{ik}) x_i \xi'_k = 0, \tag{5}$$

dove a ϱ si dia un valor qualunque. È chiaro che ad un piano qualunque ξ' di S' corrisponde con quest'omografia nello spazio S un piano, che col variare di ϱ descrive un fascio, avendo per due sue posizioni (corrispondenti a $\varrho = 0$ e $\varrho = \infty$) i due piani ξ, η corrispondenti a ξ' nelle omografie (1). Se si fissano ad arbitrio due valori qualunque per ϱ, le due corrispondenti omografie (5) determine-

(4) Questa denominazione fu già usata in questo senso dal VERONESE (loc. cit., p. 115).

ranno colla loro combinazione un'omografia in S, cosicchè si hanno in tal modo ∞^2 omografie in S. Diremo che la (5) rappresenta col variar di ϱ un *fascio* di omografie tra gli spazi S, S'; e noi vediamo che questo fascio determina nello spazio S un *complesso* di *assi* di fasci di piani, ciascuno dei quali contiene tutti i piani corrispondenti ad un piano di S' rispetto alle omografie del fascio. L'equazione (5) mostra che questi fasci di piani corrispondono proiettivamente al fascio di omografie (cioè alla serie dei valori di ϱ) e quindi anche tra loro. Scelti ad arbitrio in ciascuno di essi due piani corrispondenti a due determinate omografie del fascio, essi si corrisponderanno tra loro in una omografia di spazi sovrapposti ad S, la quale risulta dalla combinazione di quelle due omografie tra S, S'.

9. Ciò posto proponiamoci di cercare tra le omografie del fascio (5) quelle che sono degeneri. Se per un determinato valore di ϱ l'omografia rappresentata dalla (5) è degenere di h^{esima} specie, sarà (n^0 3):

$$\varDelta(\varrho) \equiv |a_{ik} - \varrho b_{ik}| = 0,$$

ed anzi del determinante $\varDelta(\varrho)$ si annulleranno anche tutti i subdeterminanti di $(n-h+2)$-esimo ordine. Abbiamo visto che una tale omografia singolare avrà nello spazio S uno spazio lineare singolare di punti P_{h-1}, composto di tutti quei punti che soddisfanno le equazioni

$$\sum_i (a_{ik} - \varrho b_{ik}) x_i = 0.$$

Confrontando colle equazioni (3) e (4) si vede dunque che ogni spazio fondamentale di punti dell'omografia prima considerata tra punti x, y dello spazio S, è lo spazio singolare di punti di una corrispondente omografia degenere del fascio (5). E che realmente un tale spazio singolare sia fondamentale per la omografia determinata in S dalla combinazione di due omografie qualunque del fascio (5) è chiaro, poichè tutte quelle ∞^2 omografie di S hanno evidentemente gli stessi punti uniti e quindi gli stessi spazi fondamentali. Ora se si prende un punto qualunque x dello spazio singolare dell'omografia degenere del fascio, corrispondente ad un certo valore ϱ' di ϱ, e se ne trova il corrispondente x' in S' rispetto ad un'altra omografia qualunque ϱ_1 del fascio, a questo punto corrisponderà di nuovo x rispetto a quell'omografia degenere; cosicchè x sarà un punto unito della omografia risultante in S dalla combinazione delle omografie ϱ' e ϱ_1, e quindi anche di tutte le ∞^2 omografie considerate.

Tutti gli ∞^n fasci di piani determinati in S dalle coppie di piani corrispondenti in quelle ∞^2 omografie, vale a dire che contengono i piani corrispondenti in S ai piani dello spazio S' rispetto alle omografie del fascio, conterranno anche i piani corrispondenti rispetto alle omografie degeneri di questo, piani che passano per gli spazi singolari di punti corrispondenti a queste omografie. Dunque il complesso degli assi che sono sostegni di quegli ∞^n fasci, si compone di assi *secanti* tutti gli spazi fondamentali di punti delle ∞^2 omografie considerate in S; inoltre i piani che da quegli assi proiettano tutti questi spazi formano gruppi tutti proiettivi tra loro e proiettivi al gruppo delle omografie singolari del fascio (5), cioè al gruppo delle radici dell'equazione $\Delta(\varrho) = 0$.

10. Data nello spazio S l'omografia rappresentata dalle equazioni (1), si può, ove i determinanti di queste non siano nulli, intenderla rappresentata anche dalle forme aggiunte:

$$\Sigma A_{ik}\, \xi_i\, x'_k = 0, \quad \Sigma B_{ik}\, \xi_i\, x'_k = 0,$$

e da questo punto di vista si possono fare ragionamenti analoghi a quelli svolti nei numeri precedenti ed ottenere risultati correlativi a quelli. Anzitutto si troverà che i piani *uniti* di quell'omografia dello spazio S formano vari *spazi fondamentali di piani* di quest'omografia, ciascuno dei quali si compone di piani ξ soddisfacenti alle equazioni

$$\sum_i (A_{ik} - rB_{ik})\, \xi_i = 0,$$

dove per r si ponga una radice dell'equazione

$$|A_{ik} - rB_{ik}| = 0.$$

Considerando poi la *schiera* [5] delle omografie tra gli spazi S e S' rappresentate dall'equazione

$$\sum_{ik} (A_{ik} - rB_{ik})\, \xi_i\, x'_k = 0,$$

[5] È bene avvertire che una schiera di omografie non è sostanzialmente diversa da un fascio di omografie, poichè si muta in un fascio se si scambiano i due spazi S, S'. Così l'equazione $\Sigma(a_{ik} - \varrho b_{ik})\, x_i\, \xi'_k = 0$ pei vari valori di ϱ determina ∞^1 omografie tra gli spazi S, S', tali che i piani corrispondenti in S ad ogni piano ξ' di S' formano un fascio, ed i punti corrispondenti in S' ad ogni punto x di S formano un raggio punteggiato; ma ad ogni punto di S' corrispondono in S i punti di una *curva* razionale (*normale* per lo spazio S) d'ordine n e correlativamente ad ogni piano di S corrispondono in S' i piani di una *svilup-*

dove si faccia variare il parametro r, in essa vi saranno delle omografie degeneri corrispondenti appunto alle diverse radici della suddetta equazione in r, ed aventi per spazi singolari di piani in S appunto gli spazi fondamentali di piani dell'omografia considerata di due spazi sovrapposti ad S. In quella schiera di omografie tra S ed S', ad ogni punto x' di S' corrispondono ∞^1 punti di S formanti un *raggio*, sicchè si avrà in S un *complesso* di raggi, tutti punteggiati proiettivamente tra loro e alla schiera di omografie. Combinando a due a due le omografie tra S e S' di questa schiera si hanno ∞^2 omografie di spazi sovrapposti ad S, tra le quali starà appunto l'omografia prima considerata: queste omografie hanno gli stessi spazi fondamentali di piani, e ogni raggio del complesso considerato taglia i sostegni di questi sistemi di piani in altrettanti punti formanti gruppi tutti proiettivi tra loro ed al gruppo delle radici dell'equazione in r.

Vedremo presto (n$^{\text{i}}$ 12, 13) quali legami passino tra le radici dell'equazione in ϱ e quelle dell'equazione in r, e tra gli spazi fondamentali di punti e gli spazi fondamentali di piani di un'omografia di due spazi sovrapposti ad S.

11. Noi ci proponiamo ora di mostrare come si possano classificare le omografie di spazi sovrapposti. A tal fine notiamo anzitutto che un'omografia qualunque nello spazio S di punti x, può sempre in infiniti modi rappresentarsi con una coppia di equazioni bilineari:

$$\Sigma a_{ik}\, x_i\, \xi'_k = 0, \quad \Sigma b_{ik}\, x_i\, \xi'_k = 0,$$

dove le ξ'_k siano variabili qualunque ed una almeno delle due equazioni, per es. la prima, non abbia determinante nullo. In fatti questa coppia di equazioni equivale, come già notammo, alle seguenti, in cui x, y indicano due punti corrispondenti:

$$\sum_i a_{ik}\, x_i = \varrho \sum_i b_{ik}\, y_i\,,$$

e da queste si ottengono formule della forma

$$x_k \equiv \sum_i d_{ik}\, y_i\,,$$

---

pabile razionale di classe n. Noi diciamo che quell'equazione determina un *fascio*, oppure una *schiera* di omografie tra gli spazi S, S', secondo che abbiamo di mira lo spazio S oppure lo spazio S'.

rappresentanti appunto un'omografia. Viceversa un'omografia qualunque tra punti x, y dello spazio S si può sempre porre, e in un sol modo, sotto quest'ultima forma, e quindi si può in quel senso rappresentare colla coppia di equazioni

$$\Sigma x_k \xi_k = 0, \quad \Sigma d_{ik} x_i \xi_k = 0.$$

Ora se in queste si fa per le variabili ξ_k una sostituzione lineare qualunque, le equazioni così ottenute saranno della forma più generale

$$\Sigma a_{ik} x_i \xi'_k = 0, \quad \Sigma b_{ik} x_i \xi'_k = 0,$$

e rappresenteranno sempre la stessa omografia.

Ma da questo fatto segue una conseguenza importante. Siano date due omografie qualunque, l'una tra due spazi sovrapposti allo spazio S di punti x, l'altra tra due spazi sovrapposti ad uno spazio S_1 di punti z: esse si potranno rappresentare in infiniti modi con due coppie di equazioni

$$\Sigma a_{ik} x_i \xi'_k = 0, \quad \Sigma b_{ik} x_i \xi'_k = 0$$

e

$$\Sigma p_{ik} z_i \zeta'_k = 0, \quad \Sigma q_{ik} z_i \zeta'_k = 0.$$

Orbene la condizione necessaria e sufficiente affinchè si possa con un'omografia tra gli spazi S ed S_1 far corrispondere tra loro quelle due omografie, vale a dire affinchè queste siano proiettivamente identiche, sarà, in virtù delle cose dette, che si possano trasformare linearmente le x_i nelle z_i e le ξ'_k nelle ζ'_k con due sostituzioni qualunque tali che la prima coppia di equazioni bilineari si trasformi nella seconda coppia.

Ora il Weierstrass ha dimostrato (6) che la condizione necessaria e sufficiente perchè si possa effettuare questa trasformazione è che i divisori elementari del determinante $|a_{ik} - \varrho b_{ik}|$ coincidano con quelli del determinante $|p_{ik} - \varrho q_{ik}|$. Dicendo $e_t, e'_t, \ldots, e_t^{(h_t-1)}$ i gradi (in ordine decrescente di grandezza) dei divisori elementari del determinante $|a_{ik} - \varrho b_{ik}|$ corrispondenti ad una stessa radice ϱ_t, e chiamando *caratteristica* l'insieme di questi gradi così raggruppati:

$$[(e_1, e'_1, \ldots, e_1^{(h_1-1)}), (e_2, e'_2, \ldots, e_2^{(h_2-1)}), \ldots, (e_r, e'_r, \ldots, e_r^{(h_r-1)})],$$

noi divideremo le omografie in *classi* a seconda dei loro corrispondenti raggruppamenti dei divisori elementari, vale a dire intende-

(6) *Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen* (Monatsber. Akad. Wiss. Berlin, 1868, 18 Mai, pp. 310-338). V. pp. 325, 326.

remo che due omografie siano della stessa classe quando hanno la stessa caratteristica. Ciò posto noi vediamo da quel teorema di WEIERSTRASS, che una prima condizione affinchè due omografie di spazi sovrapposti siano proiettivamente identiche è che esse appartengano alla stessa classe. In secondo luogo poi le radici ϱ dei due determinanti le quali corrispondono agli stessi gruppi di divisori elementari dovranno essere uguali; però siccome in una qualunque delle due coppie di equazioni si può moltiplicare l'una equazione per una costante senza alterare l'omografia rappresentata da quella coppia, così basterà affinchè le due omografie siano identiche, che le radici corrispondenti di quei determinanti siano tra loro proporzionali. Ciò significa che all'omografia generale di una classe qualunque spetta un certo numero d'invarianti assoluti, i quali sono i rapporti mutui delle radici distinte del determinante corrispondente a quell'omografia: il numero degl'invarianti assoluti distinti di questa è dunque dato dal numero delle radici (cioè dei gruppi di divisori elementari che compaiono nella sua caratteristica) diminuito di 1. La condizione necessaria e sufficiente affinchè due omografie siano proiettivamente identiche sarà dunque: 1^0 che esse appartengano alla stessa classe, 2^0 che esse abbiano gli stessi valori per gl'invarianti assoluti.

Quanto a questi invarianti assoluti di un'omografia, risulta dalle cose viste che essi sono rappresentati geometricamente dai rapporti anarmonici che due piani corrispondenti qualunque della omografia considerata determinano con quei piani del loro fascio, i quali proiettano gli spazi fondamentali di punti dell'omografia (v. n^0 9), perocchè questi piani corrispondono alle radici distinte ϱ del determinante, mentre quei primi due piani corrispondono ai valori $\varrho = 0$ e $\varrho = \infty$ (7).

---

(7) Siano date nello spazio S due quadriche rappresentate dalle equazioni quadratiche $\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$, $\Sigma b_{ik} x_i x_k = 0$ (essendo ora $a_{ik} = a_{ki}$, $b_{ik} = b_{ki}$): risulta dai ragionamenti esposti che le polarità rispetto a queste quadriche dànno, combinate tra loro, un'omografia rappresentata dalle equazioni bilineari $\Sigma a_{ik} x_i \xi'_k = 0$, $\Sigma b_{ik} x_i \xi'_k = 0$ ed avente per conseguenza la stessa caratteristica e gli stessi invarianti assoluti che quella coppia di quadriche. E siccome per un sistema dato qualunque di divisori elementari del determinante $|a_{ik} - \varrho b_{ik}|$ si può sempre trovare una coppia di forme quadratiche corrispondenti $\Sigma a_{ik} x_i x_k$, $\Sigma b_{ik} x_i x_k$ (come mostrò il WEIERSTRASS), così si può sempre trasformare le due equazioni rappresentanti un'omografia nelle equazioni delle polarità rispetto a due quadriche, vale a dire: ogni omografia di spazi sovrapposti si può sempre considerare come risultante dalle polarità rispetto a due quadriche convenientemente scelte (l'una del-

12. Siccome l'omografia rappresentata dalla coppia di equazioni bilineari

$$\Sigma a_{ik}\, x_i\, \xi'_k = 0, \quad \Sigma b_{ik}\, x_i\, \xi'_k = 0,$$

supposte di determinanti A, B non nulli vedemmo (n^0 10) potersi pure rappresentare in modo correlativo colla coppia di equazioni bilineari aggiunte di quelle

$$\Sigma A_{ik}\, \xi_i\, x'^{k} = 0, \quad \Sigma B_{ik}\, \xi_i\, x'_k = 0,$$

così si può domandare quali saranno la classe e gl'invarianti assoluti dell'omografia determinati ancora nel modo detto, ma facendo uso di quest'ultima coppia di equazioni invece che della prima. Ora è facile vedere che quella classe e quegl'invarianti assoluti saranno ancora gli stessi, perocchè si ha identicamente eseguendo il prodotto di tre matrici:

$$\left| p\,\frac{B_{ik}}{B} + q\,\frac{A_{ik}}{A} \right\| a_{ik} \left\| b_{ik} \right| = \left| \sum_{i'k'} a_{i'k}\, b_{ik'} \left(p\,\frac{B_{i'k'}}{B} + q\,\frac{A_{i'k'}}{A} \right) \right|,$$

e notando che $\Sigma_{k'}\, b_{ik'}\, B_{i'k'}$ vale B oppure 0, secondo che i' è uguale o diverso da i, e così che $\Sigma_{i'}\, a_{i'k}\, A_{i'k'}$ vale A ovvero 0, secondo che k' è uguale o diverso da k, diventa:

$$\left| p\,\frac{B_{ik}}{B} + q\,\frac{A_{ik}}{A} \right\| a_{ik} \left\| b_{ik} \right| = \left| p a_{ik} + q b_{ik} \right|.$$

Di qui segue immediatamente che i determinanti

$$\left| p a_{ik} + q b_{ik} \right|, \quad \left| p\,\frac{B_{ik}}{B} + q\,\frac{A_{ik}}{A} \right|$$

non solo sono identici, a meno del fattore AB indipendente da p, q, ma hanno inoltre gli stessi divisori elementari. Quindi real-

---

le quali sarà degenere se l'omografia è degenere), il cui sistema avrà la stessa caratteristica e gli stessi invarianti assoluti della data omografia. Questa proposizione ci pare assai importante; essa conduce facilmente al seguente risultato notevolissimo: La geometria proiettiva di una coppia di quadriche coincide colla geometria proiettiva di un'omografia di spazi sovrapposti, cioè di quell'omografia che risulta dalle polarità rispetto alle due quadriche; tutto il sistema invariantivo della coppia di quadriche non è altro che il sistema invariantivo dell'omografia, e viceversa.

Quanto al significato geometrico della caratteristica e degl'invarianti assoluti, che abbiamo incontrato, di una coppia di quadriche, esso risulta subito dalle cose dette e risulta appunto quale noi l'avevamo dato nella nostra dissertazione di laurea già citata.

mente la caratteristica rappresentante la classe dell'omografia, considerata da questo punto di vista correlativo al primo, sarà ancora la stessa di prima; e quanto poi agl'invarianti assoluti avremo la seguente proposizione:

Data un'omografia qualunque non degenere di due spazi ad n dimensioni sovrapposti, i suoi invarianti assoluti sono quelli del gruppo formato da due piani corrispondenti qualunque e dai piani del fascio di questi i quali passano per gli spazi fondamentali di punti, ovvero quelli del gruppo formato da due punti corrispondenti qualunque e dai punti del loro raggio congiungente, posti sui sostegni degli spazi fondamentali di piani. Gli spazi fondamentali di punti e gli spazi fondamentali di piani formano due figure correlative, e vengono così a corrispondersi in modo tale che i gruppi di piani considerati sono proiettivi ai gruppi considerati di punti: in questa proiettività però ai due piani di ciascuno dei primi gruppi che si corrispondono nel 1^0 e nel 2^0 spazio, corrispondono rispettivamente nei secondi gruppi i due punti che si corrispondono nel 2^0 e nel 1^0 spazio. — Insomma si può dire più concisamente che ogni omografia tra due spazi sovrapposti è correlativa all'omografia ottenuta da questa scambiando i due spazi (8).

13. Abbiamo così incontrato una corrispondenza notevole tra gli spazi fondamentali di punti e di piani di un'omografia non degenere. Possiamo trovare un'altra proprietà importante di questa corrispondenza. Consideriamo un punto unito qualunque x e un piano unito qualunque ξ: soddisferanno, come vedemmo, ad equazioni della forma seguente (ponendo $A_{ik}/A = \alpha_{ik}$, $B_{ik}/B = \beta_{ik}$):

$$(1) \qquad \sum_i (p\ a_{ik} + q\ b_{ik})\ x_i = 0$$

$$(1') \qquad \sum_{i'} (p'\alpha_{i'k} + q'\beta_{i'k})\xi_{i'} = 0,$$

cioè apparterranno rispettivamente agli spazi fondamentali di punti e di piani corrispondenti ai parametri $p : q$ e $p' : q'$. Ora moltipli-

(8) Abbiamo già dimostrato questa proposizione all'incirca nello stesso modo in una breve Nota intitolata: *Teorema sulle relazioni tra una coppia di forme bilineari e la coppia delle loro forme reciproche* (Giornale di matem., 22), nella quale abbiamo anche accennato qualche altra applicazione dello stesso teorema analitico [V. questo volume, p. 229].

cando le (1) per $\alpha_{i'k}$, dove i' sia dato, e le (1') per b_{ik}, dove i sia dato, e sommandole rispetto a k si ha:

$$p \sum_i x_i \sum_k a_{ik} \alpha_{i'k} + q \sum_{ik} x_i b_{ik} \alpha_{i'k} = 0$$

$$q' \sum_{i'} \xi_{i'} \sum_k b_{ik} \beta_{i'k} + p' \sum_{i'k} \xi_{i'} b_{ik} \alpha_{i'k} = 0,$$

ossia:

$$p\, x_{i'} + q \sum_{ik} x_i\, b_{ik}\, \alpha_{i'k} = 0$$

$$q'\, \xi_i + p' \sum_{i'k} \xi_{i'}\, b_{ik}\, \alpha_{i'k} = 0,$$

e moltiplicando la 1ª di queste equazioni per $\xi_{i'}$, e sommandola rispetto ad i', e moltiplicando la 2ª per x_i e sommando rispetto ad i, avremo:

$$p \sum_{i'} x_{i'} \xi_{i'} + q \sum_{ii'k} x_i\, \xi_{i'}\, b_{ik}\, \alpha_{i'k} = 0$$

$$q' \sum_i x_i\, \xi_i + p' \sum_{i'k} x_i\, \xi_{i'}\, b_{ik}\, \alpha_{i'k} = 0,$$

e quindi eliminando la 2ª somma di ambe le equazioni:

$$(pp' - qq') \sum_i x_i\, \xi_i = 0.$$

Dunque si avrà sempre:

$$\sum_i x_i\, \xi_i = 0,$$

quando non sia:

$$pp' = qq'.$$

cioè quando gli spazi fondamentali a cui appartengono il punto x ed il piano ξ non siano corrispondenti (v. n⁰ 12). Abbiamo così la seguente importante proposizione:

Ogni spazio fondamentale di punti sta sui sostegni di tutti gli spazi fondamentali di piani non corrispondenti ad esso.

14. Per conoscere bene le figure formate dagli elementi uniti di un'omografia qualunque, conviene anche notare il fatto che due spazi fondamentali di punti non possono mai tagliarsi (o correlativamente), perocchè se un punto unito x appartenesse a due diversi spazi fondamentali, le equazioni

$$\sum_i (p a_{ik} + q b_{ik})\, x_i = 0$$

dovrebbero verificarsi per due distinti valori di $p:q$ e quindi si verificherebbero pure per qualunque valore di $p:q$, il che non può essere, poichè il determinante $|pa_{ik}+qb_{ik}|$ non può annullarsi identicamente.

15. In ogni spazio fondamentale di punti ciascun punto è un punto unito. Se invece consideriamo un piano unito qualunque, l'omografia data farà corrispondere tra loro omograficamente i suoi punti, sicchè su un tal piano si ha un'omografia *contenuta* nell'omografia data dello spazio. E notiamo che i punti uniti di quell'omografia saranno già noti, poichè è chiaro che essa ha per spazi fondamentali di punti quelli della data omografia che sono contenuti in esso, cioè quelli che non corrispondono allo spazio fondamentale di piani contenente il piano unito che si considera, ed inoltre lo spazio di punti in cui questo piano taglia lo spazio fondamentale corrispondente di punti: altri punti uniti non potrebbero esservi in quell'omografia sul piano, poichè altrimenti essi dovrebbero pure essere punti uniti dello spazio. Lo stesso fatto si presenta se invece di un piano unito si considera l'intersezione di più piani uniti appartenenti ad uno stesso spazio fondamentale di piani. Se infine si considera il sostegno di uno spazio fondamentale di piani, si ha su esso un'omografia contenuta nella data ed avente per spazi fondamentali di punti quelli della data omografia non corrispondenti a quello spazio fondamentale di piani ed inoltre l'intersezione di quel sostegno collo spazio fondamentale corrispondente di punti, quando una tale intersezione esiste.

16. Ma noi possiamo anzi assegnare la caratteristica e gl'invarianti assoluti di ogni omografia contenuta nella data e relativa al sostegno di uno spazio fondamentale di piani. Supponiamo anzitutto che questo spazio fondamentale di piani, e quindi anche il corrispondente spazio fondamentale di punti, corrispondano ad un gruppo di divisori elementari tutti di grado 1, cioè supponiamo che la caratteristica dell'omografia considerata nello spazio S ad n dimensioni sia:

$$[(\overbrace{1,1,\ldots,1}^{h}),(e_2,e_2',\ldots,e_2^{(h_2-1)}),\ldots,(e_r,e_r',\ldots,e_r^{(h_r-1)})]$$

(essendo la somma di tutti i numeri che entrano in questa caratteristica uguale ad $n+1$) e consideriamo il sostegno S_{n-h} ad $n-h$ dimensioni dello spazio fondamentale di piani, ad $h-1$ dimensioni, che corrisponde al 1^0 gruppo di divisori elementari dei gradi $(\overbrace{1, 1, \dots, 1}^{h})$. Dimostreremo che l'omografia che si ha su quel sostegno è rappresentata dalla caratteristica

$$[(e_2, e_2', \dots, e_2^{(h_2-1)}), \dots, (e_r, e_r', \dots, e_r^{(h_r-1)})]$$

colle stesse radici (o meglio cogli stessi rapporti delle radici) della data corrispondenti agli stessi gruppi di divisori elementari, vale a dire cogli stessi invarianti assoluti (meno uno). In fatti è chiaro che per dimostrare questa proposizione noi possiamo, senza alcuna perdita di generalità, supporre che le equazioni rappresentanti l'omografia nello spazio S si siano già poste sotto la forma

$$\rho y_k = \sum_i a_{ik} x_i \qquad (i, k = 1, 2, \dots, n+1) \tag{1}$$

e inoltre che lo spazio considerato S_{n-h} sia rappresentato dalle equazioni:

$$x_{n-h+2} = x_{n-h+3} = \dots = x_{n+1} = 0.$$

Affinchè questo accada, le equazioni (1), le quali ci dànno immediatamente per la corrispondenza tra i piani:

$$\rho' \xi_i = \sum_k a_{ik} \eta_k, \tag{2}$$

dovranno dare per corrispondente al piano di coordinate

$$\eta_1 = \eta_2 = \dots = \eta_{n-h+1} = 0, \; \eta_{n-h+2} = \lambda', \; \eta_{n-h+3} = \lambda'', \dots, \eta_{n+1} = \lambda^{(h)}$$

lo stesso piano, qualunque siano le quantità λ; dal che segue:

$$a_{i,n-h+2} = a_{i,n-h+3} = \dots = a_{i,n+1} = 0$$

per i qualunque, ma però:

$$a_{n-h+2,n-h+2} = a_{n-h+3,n-h+3} = \dots = a_{n+1,n+1} = a.$$

Le equazioni (1) determinano in quel sostegno considerato S_{n-h} un'omografia rappresentata dalle equazioni:

$$\rho y_k = \sum_i a_{ik} x_i \qquad (i, k = 1, 2, \dots, n-h+1) \tag{1'}$$

$$x_{n-h+2} = \dots = x_{n+1} = 0, \quad y_{n-h+2} = \dots = y_{n+1} = 0.$$

Il determinante dell'omografia (1) dello spazio S sarà:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}-\varrho & . & a_{1,n-h+1} & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n-h+1,1} & . & a_{n-h+1,n-h+1}-\varrho & 0 & . & 0 \\ a_{n-h+2,1} & . & a_{n-h+2,n-h+1} & a-\varrho & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n+1,1} & . & a_{n+1,n-h+1} & 0 & . & a-\varrho \end{vmatrix}$$

ed è chiaro che esso ammette le stesse radici ϱ e gli stessi divisori elementari corrispondenti che il determinante

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}-\varrho & . & a_{1,n-h+1} \\ . & . & . \\ a_{n-h+1,1} & . & a_{n-h+1,n-h+1}-\varrho \end{vmatrix}$$

dell'omografia (1') dello spazio S_{n-h}, esclusa però la radice $\varrho = a$, la quale entra solo nel primo determinante ed ha per gruppo corrispondente dei gradi dei divisori elementari $(\overbrace{1, 1, \dots, 1}^{h})$. Così è dimostrata la nostra proposizione.

17. Da essa si può passare facilmente al caso più generale in cui il sostegno considerato S_{n-h} di uno spazio fondamentale di piani, corrisponda ad un gruppo di divisori elementari di gradi qualunque. Supponiamo in fatti che nel caso dianzi considerato sia $h_2 \leqq h$, e siano $\varrho_1 = a$, ϱ_2, ϱ_3, ..., ϱ_r le radici distinte del determinante corrispondenti rispettivamente ai diversi gruppi di divisori elementari. Sullo spazio considerato S_{n-h} vedemmo osservi un'omografia appartenente alla classe rappresentata dalla caratteristica

$$[(e_2, e_2', \dots, e_2^{(h_2-1)}), (e_3, e_3', \dots, e_3^{(h_3-1)}), \dots, (e_r, e_r', \dots, e_r^{(h_r-1)})]$$

ed avente per radici corrispondenti a quei gruppi di esponenti rispettivamente ϱ_2, ϱ_3, ..., ϱ_r. Ora siccome tutte queste radici sono tra loro indipendenti, noi possiamo supporre che ϱ_2 s'avvicini indefinitamente a ϱ_1 fino a coincidere con essa. È chiaro che, per la natura dei divisori elementari, la caratteristica dell'omografia dello spazio S sarà con ciò divenuta:

$$[(e_2+1, e_2'+1, \dots, e_2^{(h_2-1)}+1, \overbrace{1, \dots, 1}^{h-h_2}), (e_3, e_3', \dots, e_3^{(h_3-1)}), \dots, (e_r, e_r', \dots, e_r^{(h_r-1)})]$$

ed avrà per radici corrispondenti rispettivamente ai vari gruppi di esponenti $\varrho_1, \varrho_3, \ldots, \varrho_r$, mentre l'omografia nel sostegno S_{n-h} del 1^0 spazio fondamentale di piani avrà ancora la stessa caratteristica e queste stesse radici. Solo bisognerà notare che mentre prima quest'ultima omografia aveva per spazio fondamentale di punti corrispondente ad $(e_2, e_2', \ldots, e_2^{(h_2-1)})$ uno spazio fondamentale di punti dell'omografia di S corrispondente pure a questo gruppo di esponenti, ora invece questo spazio fondamentale ad $h_2 - 1$ dimensioni sarà venuto a giacere sullo spazio fondamentale di punti ad $h - 1$ dimensioni dell'omografia di S, il quale prima corrispondeva ad $(\overbrace{1, 1, \ldots, 1}^{h})$ ed ora corrisponde ad $(e_2 + 1, e_2' + 1, \ldots, e_2^{(h_2-1)} + 1, \overbrace{1, \ldots, 1}^{h - h_2})$. Noi abbiamo così dimostrato il seguente teorema:

Abbiasi nello spazio S un'omografia avente per caratteristica:

$$[(e_1, e_1', \ldots, e_1^{(h_1-1)}), (e_2, e_2', \ldots, e_2^{(h_2-1)}), \ldots, (e_r, e_r', \ldots, e_r^{(h_r-1)})]$$

e per radici corrispondenti $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_r$ e suppongasi che nella serie degli esponenti del 1^0 gruppo $(e_1, e_1', \ldots, e_1^{(h_1-1)})$ i primi k siano diversi da 1, essendo $k \leq h_1$. Allora a quel 1^0 gruppo, ossia alla radice ϱ_1, corrisponderà uno spazio fondamentale di piani sul cui sostegno S_{n-h_1} la data omografia determinerà un'altra omografia avente per caratteristica:

$$[(e_1 - 1, e_1' - 1, \ldots, e_1^{(k_1-1)} - 1), (e_2, e_2', \ldots, e_2^{(h_2-1)}), \ldots, (e_r, e_r', \ldots, e_r^{(h_r-1)})]$$

e per radici corrispondenti quantità uguali (o meglio proporzionali) a $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_r$ dove $\varrho_2, \ldots, \varrho_r$ corrispondono agli spazi fondamentali di punti dell'omografia di S, i quali sono pure spazi fondamentali di punti (corrispondenti alle stesse radici) dell'omografia di S_{n-h_1}, e dove ϱ_1 corrisponde ad uno spazio fondamentale a $k - 1$ dimensioni di punti di quest'ultima omografia, il quale è intersezione di S_{n-h_1} collo spazio fondamentale di punti dell'omografia di S corrispondente a ϱ_1, cioè corrispondente allo spazio fondamentale di piani di cui S_{n-h_1} è il sostegno.

18. Questo teorema è importantissimo per la classificazione delle omografie, poichè serve a ridurre questo problema all'analogo relativo ad uno spazio ad un numero minore di dimensioni. Converrà sempre applicarlo quando la caratteristica dell'omografia che si considera non si componga tutta di indici uguali ad 1. Quando

si verificasse questo caso, cioè si dovesse studiare l'omografia generale della classe

$$[(\overbrace{1, 1, \dots, 1}^{h_1}), (\overbrace{1, 1, \dots, 1}^{h_2}), \dots, (\overbrace{1, 1, \dots, 1}^{h_r})],$$

i suoi caratteri sarebbero già noti senz'altro. Risulta in fatti dalle cose esposte che una tale omografia ha r spazi fondamentali di piani, rispettivamente ad $h_1 - 1, h_2 - 1, \dots, h_r - 1$ dimensioni: gli spazi fondamentali di piani si costruiranno immediatamente mediante quelli di punti, dopo aver scelto questi ad arbitrio, notando che per es. il 1^0 spazio fondamentale di piani ha per sostegno uno spazio ad $n - h_1 = h_2 + \dots + h_r - 1$ dimensioni di punti, il quale è perfettamente determinato dal dover passare per gli spazi fondamentali di punti diversi dal 1^0. In questo caso nessun sostegno di spazio fondamentale di piani avrà punti comuni col corrispondente spazio fondamentale di punti. Gli $r - 1$ invarianti assoluti di quest'omografia si determineranno nel modo visto colla considerazione dei raggi che congiungono punti corrispondenti, ovvero degli assi d'intersezione di piani corrispondenti: tali raggi tagliano i sostegni degli spazi fondamentali di piani in r punti, che determinano coi 2 punti corrispondenti rapporti anarmonici uguali agl'invarianti assoluti, mentre quegli assi proiettano gli spazi fondamentali di punti con r piani, i quali determinano coi 2 piani corrispondenti presi inversamente quegli stessi rapporti anarmonici. Quelle coppie di punti corrispondenti si possono prendere su un sostegno di spazio fondamentale di piani, ma in questo modo coll'uso di un solo raggio si otterrà un invariante assoluto di meno. E correlativamente ecc. ecc.

In particolare supponiamo $r = 2$, cioè consideriamo l'omografia avente per caratteristica $[(\overbrace{1, 1, \dots, 1}^{h_1}), (\overbrace{1, 1, \dots, 1}^{h_2})]$ (essendo $h_1 + h_2 = n + 1$). Ai due gruppi di divisori elementari che in essa compaiono, corrispondano rispettivamente le radici ϱ_1, ϱ_2; allora a ϱ_1 corrisponderà uno spazio fondamentale di piani, il cui sostegno (ad $n - h_1 = h_2 - 1$ dimensioni) dovrà contenere lo spazio fondamentale di punti ad $h_2 - 1$ dimensioni che corrisponde a ϱ_2 e quindi coinciderà con esso; e similmente il sostegno dello spazio fondamentale di piani corrispondente a ϱ_2 coincide collo spazio fondamentale di punti corrispondente a ϱ_1. Vi sono dunque in questa omografia due spazi di punti rispettivamente ad $h_1 - 1$ e $h_2 - 1$ dimensioni tali, che tutti i loro punti e tutti i piani passanti per essi sono elementi uniti dell'omografia. La congiungente di due punti corrispondenti qualunque taglia quei due spazi in due punti determinanti con quelli un rapporto anarmonico fisso $(\varrho_1 : \varrho_2)$, e l'asse d'intersezione di due piani corrispondenti qualunque è congiunto a quei due spazi mediante altri due piani formanti con quelli lo stesso rapporto anarmonico fisso. Questa quantità costante $(\varrho_1 : \varrho_2)$ è l'unico invariante assoluto della omografia considerata (9).

Dal teorema dimostrato si possono ancora trarre altri corollari. Se nella caratteristica di una omografia vi è un gruppo composto di indici tutti maggiori di 1, allora il corrispondente spazio fondamentale di piani avrà un sostegno, nel quale sarà contenuto lo spazio fondamentale corrispondente di punti, e quindi saranno contenuti tutti gli spazi fondamentali di punti, cioè tutti i punti uniti della data omografia (e correlat.). Un gruppo di divisori elementari tutti del 2^0 grado, cioè $(2, 2, \dots, 2)$ non ha appunto altro significato che questo; ma se nel gruppo entrano anche divisori elementari di grado superiore al 2^0, si ha un'ulteriore particolarizzazione nella figura formata dagli spazi fondamentali e questa particolarizzazione si trova appunto applicando il teorema generale.

In particolare ad un gruppo composto di un solo indice > 1 corrispondono un solo punto unito ed un solo piano unito dell'omografia, i quali stanno l'uno sull'altro, sicchè quel piano contiene tutti i punti uniti di questa e vi è su esso un'omografia avente la caratteristica differente da quella dell'omografia data solo per la diminuzione di un'unità all'indice considerato.

Il sostegno di uno spazio fondamentale di piani coincide col corrispondente spazio fondamentale di punti solo quando, n essendo impari, si ha l'omografia avente per caratteristica $[\overbrace{(2, 2, \dots, 2)}^{(n+1)/2}]$; questo caso si ottiene del resto facendo coincidere le due radici del caso $[\overbrace{(1, \dots, 1)}^{(n+1)/2}, \overbrace{(1, \dots, 1)}^{(n+1)/2}]$.

Infine noteremo che coi vari teoremi da noi trovati si possono avere immediatamente tutte le particolarità di ogni data omografia, e quindi classificare le omografie di spazi sovrapposti a quante si vogliano dimensioni, come vedremo ora su esempi.

---

(9) Queste omografie sono appunto quelle che, come dicevamo sul principio, vennero considerate dal sig. VERONESE (loc. cit., pp. 114, 115) sotto il nome di *collineazioni*.

III.

19. Applicheremo le cose esposte nella 2ª parte al caso in cui il numero n delle dimensioni dello spazio lineare considerato si riduca a 2 od a 3 ([10]). Così otterremo le omografie non degeneri di due piani o di due spazi ordinari sovrapposti ([11]).

I casi che presenta un'omografia [non identica] di due piani ordinari sovrapposti sono i 5 seguenti.

[1 1 1]. Questa è l'omografia generale: essa ha 3 rette e 3 punti uniti, corrispondentisi in modo che ogni retta unita passa pei due punti uniti non corrispondenti. Vi sono 2 invarianti assoluti: i gruppi formati da 2 punti corrispondenti qualunque del 1º e del 2º piano e dai 3 punti d'intersezione della loro congiungente colle 3 rette unite sono tutti proiettivi tra loro e proiettivi ai gruppi formati da due rette corrispondenti qualunque del 2º e del 1º piano e dai 3 raggi del loro fascio che vanno ai 3 punti uniti; i due rapporti anarmonici indipendenti di questi gruppi sono appunto gl'invarianti assoluti dell'omografia.

([10]) Le omografie di due spazi sovrapposti ad 1 dimensione, p. e. di due punteggiate ordinarie sovrapposte, non possono presentare che due casi: l'omografia [1 1] con due punti uniti distinti ed un invariante assoluto (il rapporto anarmonico di questi punti uniti con due punti corrispondenti qualunque), e l'omografia [2] coi due punti uniti coincidenti e priva d'invarianti assoluti. Aggiungiamo che benchè sopra non si parli che di omografie non degeneri, come quelle che sono più importanti, sarebbe facile classificare anche le omografie degeneri, bastando per ciò ricordare le proprietà generali di queste omografie viste nella prima parte e avvertire che la caratteristica e gli spazi fondamentali di un'omografia non degenere appartengono pure come tali ad omografie degeneri, ciascuna delle quali ha per spazio singolare di punti e per spazio singolare di piani una delle coppie di spazi fondamentali di punti e di piani.

([11]) Mentre il presente lavoro si stava stampando, ci venne fatto per caso di trovare che il Cayley aveva già pensato fin da trent'anni sono ad applicare quello che ora chiamiamo metodo dei divisori elementari alla classificazione delle omografie. In fatti egli finiva la sua Nota: *Recherches sur les Matrices dont les termes sont des fonctions linéaires d'une seule indéterminée* (Crelle's J., 50, pp. 313-317) enunciando come tutta la teoria delle omografie di un piano dipenda dai divisori elementari di un determinante, e come vi siano da considerare (oltre al caso dell'identità) i 5 casi che noi appunto esamineremo (e solo incorreva in un'inesattezza dicendo che il nostro caso [2 1], e non il caso [(1 1) 1], è quello dell'omologia). Egli si proponeva di ritornare più tardi su questa teoria; ma in fatto non vi ritornò più.

[2 1]. Due punti uniti e le due rette unite corrispondenti del caso precedente coincidono, sicchè vi è un punto unito che sta sulla corrispondente retta unita corrispondentemente all'indice 2 della caratteristica, e vi è un altro punto unito su questa retta, e una retta unita corrispondente per quel primo punto. Sulla prima retta unita i punti hanno una corrispondenza proiettiva rappresentabile con [1 1] e il cui invariante assoluto (rapporto anarmonico di due punti corrispondenti qualunque coi due punti uniti) è l'invariante assoluto dell'omografia del piano; invece sull'altra retta unita l'omografia tra i suoi punti è rappresentata da [2] cioè ha i due punti uniti coincidenti (v. n^0 17). L'invariante assoluto unico dell'omografia che si considera sul piano, si determina anche come rapporto anarmonico di 2 punti corrispondenti qualunque coi 2 punti d'intersezione della loro congiungente colle due rette unite ecc. ecc.

[3]. I tre punti uniti e le tre rette unite coincidono in un punto ed una retta in posizione unita. Quest'omografia non ha invarianti assoluti.

[(1 1) 1]. Vi è in quest'omografia una punteggiata di punti uniti ed un fascio di rette unite (corrispondenti ad (1 1)), ed inoltre una retta unita fuori di questo fascio, la quale dovendo contenere tutta quella punteggiata di punti uniti ne sarà il sostegno; e similmente un punto unito coincidente col centro di quel fascio di rette unite. Due punti corrispondenti qualunque sono in linea retta con questo centro e due rette corrispondenti qualunque si tagliano sulla punteggiata di punti uniti (v. n^i 9, 10). Quest'omografia, che non è altro che l'ordinaria omologia, ha un invariante assoluto, il quale (dietro il nostro teorema generale sugl'invarianti assoluti delle omografie) è il rapporto anarmonico che due punti corrispondenti del 1^0 e del 2^0 piano determinano col punto d'intersezione della loro congiungente colla punteggiata di punti uniti e col centro del fascio di rette unite, od anche il rapporto anarmonico che due rette corrispondenti qualunque del 2^0 e del 1^0 piano determinano colla retta del loro fascio che va a quel centro e con quell'asse dei punti uniti.

[(2 1)]. Quest'omografia, che non ha invarianti assoluti, è quell'omologia particolare in cui il centro e l'asse d'omologia sono in posizione unita, e si ottiene dal caso precedente supponendo appunto che pel sostegno del fascio di rette unite venga a passare la corrispondente punteggiata di punti uniti.

20. Venendo ora alle omografie [non identiche] nello spazio lineare a 3 dimensioni, esse presentano i 13 casi seguenti.

[1 1 1 1]. Questo è il caso generale, che ammette 4 punti uniti isolati e 4 piani uniti corrispondenti: dati i punti uniti, questi piani sono determinati ciascuno dal passare pei tre punti non corrispondenti. Vi sono 3 invarianti assoluti, che sono i rapporti anarmonici corrispondenti dei gruppi, tutti proiettivi tra loro, composti di due punti corrispondenti qualunque del 1^0 e del 2^0 spazio e dei 4 punti in cui la loro congiungente taglia i 4 piani uniti, ovvero composti di due piani corrispondenti qualunque del 2^0 e del 1^0 spazio e dei 4 piani del loro fascio proiettanti i 4 punti uniti rispettivamente corrispondenti a quei piani uniti.

[2 1 1]. Quest'omografia ha 2 soli invarianti assoluti. Due punti uniti e i due piani uniti corrispondenti coincidono in un punto e un piano incidenti. Questo piano contiene pure gli altri due punti uniti; su esso l'omografia dello spazio determina un'omografia piana avente per caratteristica [1 1 1] ed avente gli stessi due invarianti assoluti che l'omografia dello spazio, mentre sugli altri due piani uniti si hanno omografie aventi per caratteristiche [2 1] (v. n^0 17) e dotate quindi ciascuna di uno solo di questi invarianti assoluti. Considerando due punti corrispondenti qualunque e i punti d'intersezione della loro congiungente coi 3 piani uniti, o correlativamente, si hanno tosto i 2 invarianti assoluti dell'omografia considerata.

[3 1]. Quest'omografia ha un solo invariante assoluto, un punto unito ed il piano unito corrispondente incidenti e un altro punto unito su questo piano col corrispondente piano unito per quel primo punto. Sul primo piano unito si ha un'omografia [2 1] avente lo stesso invariante assoluto che la data, sull'altro piano unito invece si ha un'omografia [3]. Del resto quell'invariante assoluto non è altro che il rapporto anarmonico determinato da due punti corrispondenti qualunque del 1^0 e del 2^0 spazio coi due piani uniti, ossia da due piani corrispondenti qualunque del 2^0 e del 1^0 spazio coi due punti uniti.

[2 2]. Anche quest'omografia ha un solo invariante assoluto e due punti uniti coi due piani uniti corrispondenti. Però in essa entrambi quei punti stanno su questi due piani, cioè la loro congiungente coincide coll'intersezione di questi. Su ognuno dei due piani in questo caso l'omografia determinata dalla data sarà della classe [2 1] ed avrà lo stesso invariante assoluto che la data. Quest'invariante si potrà poi determinare come rapporto anarmonico precisamente come nel caso precedente.

[4]. Quest'omografia non ha invarianti assoluti: per essa vi è un solo punto unito ed un solo piano unito corrispondente

passante per esso; in quel punto e quel piano coincidono i 4 punti e i 4 piani uniti del caso generale.

[(1 1) 1 1]. Questo è il caso generale di una 2ª categoria di omografie. In quelle considerate finora il numero dei punti (e piani) uniti era finito. In quelle che ora considereremo essendovi sempre un gruppo di due divisori elementari corrispondenti ad una stessa radice, vi sarà un raggio r di punti uniti ed un asse ϱ di piani uniti. La congiungente di due punti corrispondenti qualunque taglierà ϱ e l'intersezione di due piani corrispondenti qualunque taglierà r (v. n^i 9, 10). Nel caso generale [(1 1) 1 1] oltre a questi punti e piani uniti vi sono 2 punti uniti isolati, i quali naturalmente dovranno stare sul sostegno ϱ del fascio di piani uniti, e 2 piani uniti corrispondenti passanti per r e di cui ciascuno sarà determinato dal contenere il punto unito isolato che non gli corrisponde. In questo caso generale vi sono 2 invarianti assoluti, che sono i rapporti anarmonici indipendenti del gruppo di due punti corrispondenti qualunque del 1^0 e del 2^0 spazio, e dei 3 punti in cui la loro congiungente taglia ϱ e i due piani uniti isolati, ovvero, ciò che fa lo stesso, del gruppo di due piani corrispondenti qualunque del 2^0 e del 1^0 spazio e dei tre piani del loro fascio passanti per r e pei due punti uniti isolati. Aggiungiamo che su ogni piano unito isolato si ha un'omografia [(1 1) 1], cioè un'omologia ordinaria (con r per asse e il punto d'intersezione con ϱ per centro) e tra i punti dell'asse ϱ si ha un'omografia [1 1]: due degl'invarianti assoluti di queste tre omografie contenute nella data dànno gl'invarianti assoluti di questa.

[(1 1) 2]. In questo caso il raggio r e l'asse ϱ del caso precedente non mutano, i due piani uniti isolati e i due punti uniti corrispondenti vengono a coincidere, sicchè quest'omografia ha solo più un invariante assoluto, che si determina come nel caso precedente.

[(2 1) 1]. Il gruppo d'indici (2 1) mostra che l'asse fondamentale ϱ viene a contenere un punto del raggio fondamentale corrispondente r, vale a dire in questo caso r e ϱ si tagliano. Vi è solo più un punto unito isolato, giacente naturalmente su ϱ e un piano unito isolato passante per r. In questo piano l'omografia dello spazio determina un'omologia [(2 1)], mentre sull'asse ϱ si ha una corrispondenza proiettiva [1 1]. Vi è solo più un invariante assoluto, rapporto anarmonico di due punti corrispondenti qualunque coi due punti in cui la loro congiungente taglia ϱ ed il piano unito isolato, o correlativamente.

[(3 1)]. Quest'omografia non ha invarianti assoluti e si ottiene dalla precedente supponendo che il punto e il piano uniti isolati vengano a coincidere rispettivamente col punto e col piano comuni ad r, ϱ. Non vi sono dunque altri punti o piani uniti all'infuori del raggio fondamentale r e dell'asse fondamentale ϱ. Su questo si ha una corrispondenza proiettiva [2] i cui punti doppi coincidono nel punto $r\varrho$.

[(1 1) (1 1)]. In quest'omografia vi sono, corrispondentemente ai due gruppi (1 1), due raggi fondamentali di punti uniti r, r' e due assi di piani uniti corrispondenti ϱ, ϱ'. Ma i punti di r devono stare su ϱ', quelli di r' devono stare su ϱ: dunque ϱ' coincide con r ed r' con ϱ (v. n^0 18). Le due rette r, ϱ hanno quindi tutti i loro punti e i loro piani per elementi uniti dell'omografia. La congiungente di due punti corrispondenti qualunque deve tagliare gli assi ϱ, ϱ', e così l'intersezione di due piani corrispondenti qualunque deve tagliare i raggi r, r', sicchè quelle congiungenti e queste intersezioni costituiscono una stessa congruenza lineare avente per direttrici r e ϱ. Questa omografia ha un solo invariante assoluto, che è il rapporto anarmonico di due punti corrispondenti qualunque del 1^0 e del 2^0 spazio coi punti in cui la loro congiungente taglia r e ϱ, o, ciò che fa lo stesso (il rapporto anarmonico di due piani corrispondenti del 2^0 e del 1^0 spazio coi piani che congiungono la loro intersezione alle rette ϱ e r, ossia) il rapporto anarmonico di due piani corrispondenti del 1^0 e del 2^0 spazio coi piani del loro fascio passanti per r e ϱ.

[(2 2)]. Questo caso è caratterizzato dall'avere soltanto una retta fondamentale, di cui tutti i punti e i piani costituiscono i punti e piani uniti dell'omografia (n^0 18). Esso si ottiene dal caso precedente supponendo che le due rette r, ϱ vengano a coincidere. Questo mostra che le rette congiungenti i punti corrispondenti od intersezioni di piani corrispondenti di quest'omografia formano una congruenza lineare speciale, le cui due direttrici coincidono in quella retta fondamentale (senza tagliarsi, v. n^0 14). Quest'omografia non ha invarianti assoluti.

[(1 1 1) 1]. In quest'omografia vi sono, non più soltanto ∞^1, ma bensì ∞^2 punti e piani uniti. Vi è cioè, corrispondentemente ad (1 1 1), un piano π di punti uniti ed una stella di piani uniti, il cui centro diremo P; vi è inoltre un punto unito isolato P ed un piano unito isolato π, i quali corrispondono all'indice 1 della caratteristica. La congiungente di due punti corrispondenti qualunque passa per P e quei due punti insieme con P e col punto d'intersezione con π

determinano un rapporto anarmonico costante, che è l'invariante assoluto dell'omografia, ed è pure uguale al rapporto anarmonico che due piani corrispondenti qualunque determinano col piano del loro fascio passante per P e col piano π su cui i piani corrispondenti sempre si tagliano. Come si vede, quest'omografia non è altro che l'omologia ordinaria dello spazio.

[(2 1 1)]. Quest'omografia, priva d'invarianti assoluti, può considerarsi come una omologia in cui il centro P ed il piano π d'omologia vengano ad essere in posizione unita. Le congiungenti i punti corrispondenti passano ancora per P e le intersezioni dei piani corrispondenti stanno su π. Questo caso può anche considerarsi come un caso particolare dell'omografia [(2 2)]: la congruenza lineare speciale, che in questa compariva come formata dalle congiungenti punti corrispondenti ed intersezioni dei piani corrispondenti, viene in questo caso a specializzarsi ulteriormente, scindendosi nel piano rigato π e nella stella di raggi P.

Torino, Novembre 1883.