Corrado Segre

Sur les invariants simultanés de deux formes quadratiques

Math. Annalen, Vol. **24** (1884), p. 152–156

in: Corrado Segre, Opere, a cura della Unione Matematica Italiana, Volume III, Edizione Cremonese, Roma, 1961, p. 334–338

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Segre_CW_3_334>

L.

SUR LES INVARIANTS SIMULTANÉS DE DEUX FORMES QUADRATIQUES

Extrait d' une lettre adressée à M. J. ROSANES.

« Mathematische Annalen », Band XXIV, 1884, pp. 152-156.

Votre Note « *Erweiterung eines bekannten Satzes auf Formen von beliebig vielen Veränderlichen* » publiée à la pag. 412 du tome XXIII des Mathematische Annalen m'a rappelé certains résultats, qui semblent encore nouveaux et non sans quelque interêt, auxquels j'étais arrivé il y a plus d'une année à propos de la signification des invariants simultanés de deux formes quadratiques, et aussi une difficulté étrange que j'avais trouvée sur cette matière. Permettez que je vous expose ici ces résultats et cette difficulté (à laquelle d'autres recherches m'empêchent à-présent de penser).

C'est par une extension en deux sens de la méthode très élégante dont M. LÜROTH a fait usage (1) pour trouver la signification géométrique des invariants simultanés de deux quadriques de l'espace ordinaire que j'arrive à une interprétation des invariants simultanés de deux formes quadratiques à $n+1$ variables.

Soient $f(xx)$, $\varphi(xx)$ ces deux formes : on sait qu'un système de leurs invariants simultanés se compose des coefficients de la forme binaire en λ, μ qui est le discriminant de $\lambda f + \mu\varphi$, c'est-à-dire que si (en indiquant en général le discriminant d'une forme ψ par $\Delta\psi$) l'on a

$$\Delta\,(\lambda f + \mu\varphi) = J_{n+1,0}\,\lambda^{n+1} + J_{n,1}\,\lambda^{n}\,\mu + J_{n-1,2}\,\lambda^{n-1}\,\mu^{2} + \dots + J_{0,n+1}\,\mu^{n+1},$$

les quantités $J_{n-k+1,k}\,(k=0,1,\dots,n+1)$ (parmi lesquelles $J_{n+1,0} = \Delta f$, $J_{0,n+1} = \Delta\varphi$) forment un système d'invariants simultanés de f et φ.

---

(1) *Ueber Polartetraeder und die Schnittcurve zweier Flächen zweiter Ordnung*, Zeitschrift für M. u. Ph., XIII, 1868, p. 404.

Et on sait aussi (ou l'on démontre en peu de mots) que si

$$f = a_x^2 = a_x'^2 = \ldots, \quad \varphi = b_x^2 = b_x'^2 = \ldots,$$

ces invariants seront représentés symboliquement, à moins de certains facteurs numériques, par

$$(aa'a'' \ldots a^{(n)})^2, \quad (ba'a'' \ldots a^{(n)})^2, \quad (bb'a'' \ldots a^{(n)})^2, \ldots;$$

de sorte que $J_{n,1}$ et $J_{1,n}$ seront vos *invariants harmoniques.* — Soient $x' \ldots x^{(n+1)}$ et $y' \ldots y^{(n+1)}$ deux groupes quelconques de *points* tels que les déterminants $X = | x_i^r |$, $Y = | y_i^s |$ ne soient pas nuls (c'est-à-dire deux groupes qui ne soient pas contenus dans des espaces linéaires à $n - 1$ dimensions). On aura identiquement par deux multiplications successives de déterminants

$$XY\varDelta(\lambda f + \mu\varphi) = | \lambda f(x^r y^s) + \mu\varphi(x^r y^s) | .$$

En supposant à présent que

$$\text{(a)} \qquad f(x^r y^s) = 0 \quad \text{pour} \quad r \gtrless s,$$

et en égalant dans les deux membres de l'identité précédente les coefficients des différentes puissances de λ, μ on aura :

$$\text{(1)} \quad XY \cdot J_{n,1} = \Sigma\, \varphi(x' y') \cdot f(x'' y'') f(x''' y''') \ldots f(x^{(n+1)} y^{(n+1)}),$$

$$\text{(2)} \quad XY \cdot J_{n-1,2} = \Sigma \begin{vmatrix} \varphi(x' y') & \varphi(x' y'') \\ \varphi(x'' y') & \varphi(x'' y'') \end{vmatrix} \cdot f(x''' y''') \ldots f(x^{(n+1)} y^{(n+1)}),$$

. . . .

$$(k) \quad XY \cdot J_{n-k+1,k} = \Sigma \begin{vmatrix} \varphi(x' y') \,.\, \varphi(x' y^k) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \varphi(x^k y') \,.\, \varphi(x^k y^k) \end{vmatrix} \cdot f(x^{(k+1)} y^{(k+1)}) \ldots f(x^{(n+1)} y^{(n+1)}).$$

. . . .

Les égalités (a) signifient que les deux groupes de points x, y sont *polaires* l'un de l'autre par rapport à la forme f, c'est-à-dire que chaque point de l'un de ces groupes est *conjugué* par rapport à f à tous les points de l'autre groupe, excepté celui qui lui correspond (comme ayant le même indice). Cela posé, l'identité (1) nous dit que $J_{n,1} = 0$ est la condition nécessaire et suffisante pour que les équations

$$\varphi(x' y') = 0, \quad \varphi(x'' y'') = 0, \ldots, \varphi(x^{(n+1)} y^{(n+1)}) = 0$$

se vérifient ensemble, c'est-à-dire que si toutes ces équations, moins une, se vérifient, celle-là se vérifie aussi. Donc : *La condition nécessaire et suffisante pour que l'invariant (harmonique)* $J_{n,1}$ *s'annulle est que l'on puisse trouver deux groupes de* $n + 1$ *points polaires l'un de* *l'autre par rapport à* f *et dont les points correspondants soient conjugués par rapport à* φ. Comme cas particulier, en supposant que les deux groupes de points coïncident, on a le théorème que vous avez donné dans la Note que j'ai citée.

En remarquant qu'en général

$$\begin{vmatrix} \varphi(x' y') \cdot \varphi(x' y^k) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \varphi(x^k y') \cdot \varphi(x^k y^k) \end{vmatrix} = 0$$

exprime que les deux espaces linéaires à $k-1$ dimensions joignant $x' \ldots x^k$ et $y' \ldots y^k$ (et que je dirai, par brièveté, *appartenir* respectivement aux deux groupes de points x et y) sont *conjugués* par rapport à la forme φ (en ce sens que chacun d'eux contient un point de l'espace polaire de l'autre), l'identité (2) nous dit que : *L'invariant* $J_{n-1,2}$ *s'annulle lorsqu'on peut trouver deux groupes de* $n+1$ *points polaires l'un de l'autre par rapport à* f *et dont les droites correspondantes soient conjuguées par rapport à* φ. *En particulier cet invariant s'annulle lorsqu'on peut trouver un groupe de* $n+1$ *points polaire de soi-même par rapport à* f *et dont les* $\binom{n+1}{2}$ *droites qui les joignent deux-à-deux soient toutes tangentes à* φ. — Et plus en général l'identité (k) nous dit que : *L'invariant* $J_{n-k+1,k}$ *s'annulle lorsqu'on peut trouver deux groupes de* $n+1$ *points polaires l'un de l'autre par rapport à* f *et dont les espaces à* $k-1$ *dimensions correspondants soient conjugués par rapport à* φ ; *et en particulier lorsqu'on peut trouver un groupe de* $n+1$ *points polaire de soi-même par rapport à* f *et dont les* $\binom{n+1}{k}$ *espaces à* $k-1$ *dimensions qui les joignent* k-*à*-k *soient tous tangents à* φ.

Il n'est pas nécessaire que je vous fasse remarquer que ces propositions donnent déjà des résultats nouveaux pour la théorie du système de deux coniques et de deux quadriques de l'espace ordinaire [2] ; ni que je m'arrête à montrer les applications qu'on peut

---

[2] Je dois dire cependant que la nouvelle interprétation, que l'on obtient ainsi, pour la relation *harmonique* de deux coniques et de deux quadriques ordinaires pourrait aussi s'obtenir comme cas particulier de certains théorèmes sur une relation particulière entre deux corrélations que vous avez donnés dans votre Note *Zur Theorie der reciproken Verwandtschaft* (Journal für Math., 90, pp. 303-321).

Ces théorèmes peuvent d'ailleurs s'obtenir immédiatement par ma méthode. Remarquez en effet que mes calculs n'ont besoin d'aucune modification lorsqu'on en faire à la géométrie de la droite. Ce qu'il m'importe surtout de vous faire remarquer c'est la difficulté dont je vous parlais au commencement. Remarquez que ce que j'ai démontré (avec quelques remarques que j'ai laissées de côté par brièveté) se résume analytiquement dans ceci : « La condition $J_{n-k+1,k}=0$ est *nécessaire* afin que l'on puisse déterminer les quantités $x'_i \dots x_i^{(n+1)}$ et $y'_i \dots y_i^{(n+1)}$ de manière à vérifier les équations

$$f(x^r y^s)=0 \quad \text{pour} \quad r \gtrless s\,,$$

$$\begin{vmatrix} \varphi(x' y') \cdot \varphi(x' y^k) \\ \dots\dots\dots\dots \\ \varphi(x^k y') \cdot \varphi(x^k y^k) \end{vmatrix} = 0\,, \dots,$$

(où au lieu des indices $1, \dots, k$ on doit mettre toutes les combinaisons k-uples de $1, 2, \dots, n+1$) ; ou, pour parler plus exactement encore, si l'on peut déterminer ces quantités de manière à satisfaire à toutes ces équations moins une, celle-ci sera aussi satisfaite précisément lorsque $J_{n-k+1,k}=0$ ». Mais peut-on toujours disposer de ces quantités de manière à satisfaire à toutes ces équations moins une ? Les paramètres disponibles sont $2n(n+1)$ et ces équations sont en

---

fait l'hypothèse plus générale que $f(xy)$ et $\varphi(xy)$ soient deux formes bilinéaires quelconques (non symétriques). Supposez que les x soient des coordonnées de points dans un espace et que les y soient des coordonnées de points, ou bien des coordonnées de *plans*, dans un autre espace et vous aurez ainsi une série de propositions sur les invariants simultanés de deux corrélations ou bien de deux homographies. En particulier si les deux espaces coïncident et $\varphi(xy)=0$ est la condition pour que le point x et le plan y soient unis (condition qui, par un choix convenable des coordonnées, peut être mise sous la forme $\Sigma x_i y_i = 0$), on obtient ainsi des propositions intéressantes sur les invariants d'une homographie, et on peut déduire de celles-ci les propositions dont je parlais sur le système de deux corrélations ou de deux homographies. En me bornant par brièveté aux formes quaternaires, c'est-à-dire à l'espace ordinaire, on a les propositions suivantes, que je crois nouvelles :

La condition nécessaire et suffisante pour que l'invariant $J_{3,1}$ *d'une homographie s'annulle est qu'il existe un couple de tétraèdres correspondants par rapport à l'homographie et dont le premier soit inscrit dans le second.* — En échangeant entre eux les deux espaces homographiques coïncidents on a la condition pour que $J_{1,3}$ soit nul.

La condition nécessaire et suffisante pour que l'invariant $J_{2,2}$ *d'une homographie soit nul est qu'il existe un couple de tétraèdres correspondants tels que les arêtes de l'un coupent les arêtes opposées aux arêtes correspondantes de l'autre.*

La première de ces propositions a pour analogue dans le plan un théorème sur les homographies planes démontré d'une autre manière per M. Pasch dans sa Note : *Zur Theorie der Collineation und der Reciprocität* (Math. Ann., XXIII, p. 426).

tout $n(n+1)+\binom{n+1}{k}$, de sorte qu'il semble qu'afin que l'on puisse déterminer ces paramètres de manière à satisfaire à toutes ces équations moins une on doit avoir (si ces équations sont indépendantes entre elles)

$$n(n+1) \geqq \binom{n+1}{k} - 1 .$$

Or cette relation n'a lieu, pour n quelconque, que si $k=1$ ou bien $k=2$, ou si $k=n$ ou bien $k=n-1$ (3). Donc on peut dire que la condition $J_{n-k+1,k}=0$ est non seulement *nécessaire*, mais aussi *suffisante* pour que l'on puisse trouver les deux groupes de points dont parle mon théorème, *seulement* lorsque $k=1,2,n-1,n$. Mais en général pour des valeurs quelconques de n et de k il est bien vrai que $J_{n-k+1,k}=0$ lorsqu'il existe de tels groupes de points, mais il ne semble plus que l'existence de tels groupes soit nécessaire pour que $J_{n-k+1,k}=0$.

Est-ce qu'il y a (ce qui me semble peu probable) entre les équations considérées des liens en force desquels on puisse toujours les satisfaire toutes moins une, quels que soient n et k? Et dans le cas contraire y a-t-il quelque autre relation géométrique entre les deux formes f et φ que l'on puisse substituer à la mienne de manière à avoir toujours une relation non seulement *suffisante*, mais aussi *nécessaire* pour que l'invariant $J_{n-k+1,k}$ s'annulle?

---

(3) Elle a aussi lieu pour $k=3$ si $n=7$ et pour toutes les valeurs de k si $n=6$ (ou bien $n<6$).

Turin, le 11 Avril 1884.