Corrado Segre

Étude des différentes surfaces du 4e ordre à conique double ou cuspidale (générale ou décomposée) considérées comme des projections de l'intersection de deux variétés quadratiques de l'espace à quatre dimensions

Math. Annalen, Vol. **24** (1884), p. 313–444

in: Corrado Segre, Opere, a cura della Unione Matematica Italiana, Volume III, Edizione Cremonese, Roma, 1961, p. 339–484

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Segre_CW_3_339>

LI.

ÉTUDE DES DIFFÉRENTES SURFACES DU 4^e ORDRE À CONIQUE DOUBLE OU CUSPIDALE (GÉNÉRALE OU DÉCOMPOSÉE) CONSIDÉRÉES COMME DES PROJECTIONS DE L'INTERSECTION DE DEUX VARIÉTÉS QUADRATIQUES DE L'ESPACE À QUATRE DIMENSIONS

« Mathematische Annalen », Band XXIV, 1884, pp. 313-444.

On peut dire que les recherches sur les surfaces du 4e ordre à conique double ont commencé avec le Mémoire de M. KUMMER de 1863 sur les surfaces du 4e ordre contenant des séries de coniques (1), bien qu'on en eût déjà étudié depuis longtemps quelques cas particuliers, comme le tore, la cyclide de DUPIN, etc. M. KUMMER établissait dans un paragraphe de ce Mémoire le fait qu'une surface générale du 4e ordre à conique double est coupée par les plans tangents de 5 cônes quadriques suivant des couples de coniques : ces plans étant les plans bitangents de la surface. Il remarquait aussi que lorsque la surface acquiert un point double (outre ceux de la conique double), celui-ci est le sommet d'un cône quadrique tangent ailleurs à la surface (et non plus bitangent) dont les plans tangents coupent encore celle-ci en des couples de coniques ; et que, lorsque la surface a deux points doubles joints par une droite qui n'appartient pas à la surface, les plans qui passent par cette droite coupent la surface en des couples de coniques. L'année suivante 1864 M. MOUTARD (2) se proposant l'étude des surfaces du 3e et du 4e ordre *anallagmatiques*, c'est-à-dire ne changeant pas par une inversion (trans-

---

(1) *Ueber die Flächen vierten Grades, auf welchen Schaaren von Kegelschnitten liegen*, Monatsber. Akad. Berlin, 1863, pp. 324-336 ; ou bien CRELLE'S J., 64, pp. 66-76.

(2) *Note sur la transformation par rayons vecteurs réciproques* et *Sur les surfaces anallagmatiques du quatrième ordre*, Nouv. Ann. Math., (2) 3, 1864 pp. 306-309 et pp. 536-539.

formation par rayons vecteurs réciproques), était porté à remarquer que les anallagmatiques du 4e ordre sont les surfaces de cet ordre ayant le cercle imaginaire à l'infini pour ligne double et qu'une telle surface est anallagmatique par rapport à 5 inversions différentes: il trouva en outre que les centres de ces inversions sont les sommets des cônes de KUMMER, que la surface est l'enveloppe des ∞^2 sphères orthogonales à l'une des 5 sphères d'inversion et ayant leurs centres sur une quadrique, que les 5 quadriques que l'on obtient ainsi sont homofocales et coupent respectivement ces 5 sphères suivant les 5 quartiques focales qu'a une telle surface du 4e ordre; enfin il s'occupa du système de ∞^1 anallagmatiques du 4e ordre *homofocales*, et il trouva que ces surfaces forment un système triple orthogonal. Peu de jours avant qu'il fît cette dernière découverte, M. DARBOUX la faisait de son côté (3) et dès lors ces espèces de surfaces (auxquelles il étendit le nom de *cyclides*) occupèrent avec fruit ce savant dans une suite de travaux (4) dont il réunit les principaux résultats dans son ouvrage *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques* (5). En Angleterre M. CASEY s'occupant aussi plus tard de ces espèces de surfaces publiait en 1871 le long Mémoire *On Cyclides and Sphero-Quartics* (6), qui en contenait aussi presque toutes les propriétés connues et quelques autres.

En 1868 CLEBSCH, qui, comme l'on sait, occupait alors son grand talent dans les recherches sur la représentation des surfaces

---

(3) Dans la séance du 1er Août 1864 M. SERRET et M. BONNET communiquaient l'un après l'autre à l'Académie des sciences ces découvertes de M. DARBOUX et de M. MOUTARD (Voir le tome 59 des Comptes-rendus, pp. 240-242 et 243-244). Il est vrai que les surfaces considérées par M. DARBOUX ont trois plans de symétrie, mais on en obtiendrait les anallagmatiques plus générales de M. MOUTARD par une inversion. (On remarque aussi dans la Note de M. DARBOUX quelques inexactitudes sur le nombre des droites et sur les focales de ses surfaces, mais on ne les trouve plus dans les travaux postérieurs de ce savant).

(4) Voir surtout les *Recherches sur les surfaces orthogonales* dans les Annales de l'Ecole Normale supérieure de 1865 (et années suivantes) et le *Mémoire sur les surfaces cyclides* dans le tome de 1872 de ces mêmes Annales.

(5) Paris, Gauthier-Villars, 1873. Le contenu du texte de cet ouvrage formait un Mémoire présenté en 1869 à l'Académie des sciences. — Nous pourrions encore citer d'autres travaux sur les cyclides, par exemple ceux de M. LAGUERRE (dans les Nouv. Ann. et le Bulletin de la Société philomatique de Paris); mais nous devons nous borner à parler des recherches qui ont le plus d'importance pour la théorie de ces surfaces et surtout pour le but de notre travail. On trouvera d'ailleurs une liste assez complète de ces travaux dans l'ouvrage cité de M. DARBOUX.

(6) Phil. Trans., 161, 1871, pp. 585-781.

sur un plan, continuait l'étude, que M. KUMMER avait commencée, des surfaces du 4e ordre à conique double générales en partant de la représentation plane d'une telle surface, et il établissait ainsi toute la géométrie des courbes tracées sur cette surface (7). Il retrouvait les 16 droites de la surface (qui avaient déjà été trouvées quatre années auparavant par M. DARBOUX), et en étudiait la disposition, il découvrait les deux séries de coniques dans lesquelles se décompose chacun des systèmes qui correspondent aux 5 cônes de KUMMER, les cubiques et les quartiques gauches de la surface, etc., et les relations qui lient toutes ces courbes entre elles et avec la conique double. Et l'année suivante M. JORDAN ayant remarqué (8) le lien qu'il y a entre le groupe des droites de cette surface et celui de la surface cubique générale, M. GEISER montrait (9) la raison de ce lien soit en comparant les représentations planes des deux surfaces, soit en montrant comment on peut toujours obtenir l'une de ces surfaces de l'autre par une *inversion* (10), résultat auquel était arrivé en même temps M. DARBOUX à propos des cyclides du 4e et du 3e ordre.

Les mêmes raisonnements et les mêmes calculs que CLEBSCH avait faits pour la surface générale du 4e ordre à conique double étaient pas-à-pas appliqués en 1868 et années suivantes par M. KORNDÖRFER à la représentation plane de quelques cas particuliers de cette surface, soit lorsque la conique double est générale, soit lorsqu'elle se décompose en deux droites distinctes ou coïncidentes (11). Les propriétés de quelques-unes de ces espèces particu-

---

(7) *Ueber die Flächen vierter Ordnung, welche eine Doppelcurve zweiten Grades besitzen*, Crelle's J., 69, pp. 142-184.

(8) *Sur les équations de la géométrie*, Comptes rendus, 68, Mars 1869, pp. 656-659 (voir à la p. 659).

(9) *Ueber die Flächen vierten Grades, welche eine Doppelcurve zweiten Grades haben*, Crelle's J., 70, pp. 249-257.

(10) C'est-à-dire une correspondance entre deux points de l'espace qui soient alignés avec un point fixe (*centre* de l'inversion) et conjugués par rapport à une quadrique fixe (quadrique *directrice*). C'est dans ce sens général (introduit, comme l'on sait, dans la science par des travaux de BELLAVITIS, HIRST, GEISER) que nous userons dorénavant le mot *inversion*.

(11) Voir : *Die Abbildung einer Fläche vierter Ordnung mit einer Doppelcurve zweiten Grades und einem oder mehreren Knotenpunkten*, Math. Ann., I, pp. 592-626, et II, pp. 41-64. — *Die Abbildung einer Fläche vierter Ordnung mit zwei sich schneidenden Doppelgeraden*, III, pp. 496-522. — *Die Abbildung einer Fläche vierter Ordnung mit einer Doppelcurve zweiten Grades, welche aus zwei sich schneidenden unendlich nahen Geraden besteht*, IV, pp. 117-134.

lières de surfaces avaient déjà été trouvées auparavant, comme nous l'avons dit au commencement, par KUMMER, et d'autres espèces particulières étaient rencontrées en même temps par MM. DARBOUX et CASEY. Après ces travaux nous ne trouvons plus de vraiment importants que ceux plus récents de M. ZEUTHEN sur les propriétés et sur la forme de la surface générale du 4e ordre à conique double, et de MM. CRONE et TÖTÖSSY sur celle à conique cuspidale (12) (surface qui avait déjà été étudiée par M. CREMONA (13)); et nous arrivons ainsi à la dissertation pour le doctorat de notre ami le Dr. GINO LORIA, écrite l'année passée (14).

Dans ses travaux sur les cyclides M. DARBOUX avait introduit une conception très importante: la considération des points de l'espace comme déterminés par 5 coordonnées homogènes (*pentasphériques*) liées par une relation quadratique. Une cyclide était alors déterminée par une nouvelle équation quadratique ajoutée à celle-ci et M. DARBOUX appliquait très-heureusement cette représentation des cyclides à l'étude de leurs propriétés (15). Peu de temps après MM. LIE (16) et KLEIN (17) généralisaient cette conception et y ajoutaient

---

(12) ZEUTHEN: *Om Flader af fjerde Orden med Dobbeltkeglesnit*, Kopenhagen, 1879. — CRONE: *Om Fladerne af fjerde Orden med Tilbagegangskeglesnit og deres Konturer, med saerligt Hensyn til Realitetsegenskaberne*, Kopenhagen 1881. — TÖTÖSSY: *Ueber die Fläche vierter Ordnung mit Cuspidalkegelschnitt*, Math. Ann., XIX, pp. 291-322. La difficulté de la langue dans laquelle ils sont écrits nous a empêché de prendre connaissance directe des travaux de MM. ZEUTHEN et CRONE.

(13) *Rappresentazione piana di alcune superficie algebriche dotate di curve cuspidali*, Mem. Acc. Bologna, (3) 2, 1872, pp. 117-128.

(14) *Ricerche sulla Geometria della sfera e loro applicazione allo studio ed alla classificazione delle superficie di 4⁰ ordine aventi per linea doppia il cerchio immaginario all'infinito.* Cette dissertation va paraître dans les Mémoires de l'Académie de Turin de la présente année [(2) 36, 1884].

(15) Voir, par exemple, les notes X et suivantes de l'ouvrage cité *Sur une classe remarquable* etc. — Qu'il nous soit permis d'ajouter que nous avons fait récemment une nouvelle application de la détermination d'un point par 5 coordonnées satisfaisant à une relation quadratique à trouver des liens très remarquables, et qui n'avaient pas encore été aperçus, entre les géométries métriques (euclidiennes) des complexes linéaires et des sphères: la géométrie métrique des sphères n'est à ce point de vue qu'un cas particulier de la géométrie métrique des complexes linéaires. (Voir notre Note *Sulle geometrie metriche dei complessi lineari e delle sfere e sulle loro mutue analogie* dans les Atti Acc. Torino, XIX [v. questo volume, p. 262]).

(16) V. *Ueber Complexe, insbesondere Linien-und Kugel-Complexe*, etc., Math. Ann., V, pp. 145-256. On trouve, par exemple, dans ce travail, qui est certainement le premier dans lequel la sphère soit considérée comme l'élément d'un espace, la proposition importante (p. 248) que les points-sphères d'un système homofocal de complexes quadratiques de sphères forment un système homofocal de cyclides.

(17) V. *Ueber Liniengeometrie und metrische Geometrie*, Math. Ann., V, pp. 257-277;

de nouveaux résultats. Enfin il y a quelques années M. REYE [18] avait étudié les complexes quadratiques de sphères et ensuite les cyclides comme intersections de tels complexes avec le complexe quadratique des points-sphères, et avait déduit de cette manière de voir (qui, comme nous l'avons dit, se trouvait déjà dans les recherches citées) plusieurs des propriétés connues de la cyclide générale. Or M. LORIA reprit dans sa dissertation ces idées mais en les développant plus complètement et les adressant à un but nouveau. En effet après avoir exposé plusieurs recherches intéressantes sur la géométrie des sphères et de leurs complexes et congruences linéaires et quadratiques, il passe à l'étude de la cyclide considérée comme la congruence commune à un faisceau de complexes quadratiques de sphères, parmi lesquels il y a le complexe des points-sphères; et non seulement il établit par cette méthode une théorie de la cyclide générale, mais cette méthode même lui donne une classification complète (dans la géométrie des rayons réciproques) des cyclides au moyen des diviseurs élémentaires et en appliquant dans chacun des cas que ceux-ci peuvent présenter le couple d'équations canoniques données par M. WEIERSTRASS. Il trouve par là 18 espèces différentes de cyclides, parmi lesquelles il y a toutes les espèces connues jusqu'à-présent et plusieurs espèces nouvelles : M. LORIA donne pour toutes le nombre et l'espèce des points singuliers, le nombre et la disposition des droites, les cônes de KUMMER, les sphères directrices, les courbes focales et les foyers, etc.

Mais dans son travail notre ami n'a appliqué sa méthode qu'aux cyclides, ou, si l'on veut, aux surfaces du 4e ordre à conique double non décomposée et il a laissé de côté celles à conique cuspidale et celles dont la conique double ou cuspidale se décompose. Et peut-être sa méthode ne serait pas applicable, selon nous, à ces dernières espèces de surfaces, car elle repose surtout sur la géométrie des sphères, sur les relations entre des sphères orthogonales dont une ou plusieurs se réduisent à des points, etc., de sorte qu'il faudrait voir comment ces relations se modifient lorsqu'aux sphères on substitue des quadriques coupant un plan suivant deux droites fixes ou des

---

et aussi le Mémoire *Ueber einen liniengeometrischen Satz*, Göttinger Nachrichten, 20 März 1872 (réimprimé dans le tome XXII des Math. Ann., pp. 234-241).

[18] Voir le dernier paragraphe de l'ouvrage *Synthetische Geometrie der Kugeln und linearen Kugelsysteme*, Leipzig, Teubner, 1879, et le Mémoire qui en est la suite *Ueber quadratische Kugelcomplexe und confocale Cycliden*, Coll. Math. in mem. CHELINI, pp. 241-257.

cônes quadriques se touchant le long d'une génératrice fixe, et nous ne sommes pas sûrs que ces relations ainsi modifiées lui donneraient encore les propriétés des différentes espèces de surfaces. En outre il nous semble qu'il n'y ait pas dans ce travail toute l'unité de méthode désirable, de sorte que certaines questions, comme celles sur les droites et sur les points singuliers des différentes surfaces, sont traitées d'une manière qui a peu de relations avec la pure géométrie des sphères. Remarquons enfin que la voie suivie par M. LORIA s'applique surtout à l'étude de celles parmi les propriétés des cyclides, qui ne changent pas par une transformation par rayons réciproques, et qu'ainsi il a dû exclure de sa considération les particularités de la conique double.

Nous nous sommes proposé dans le Mémoire qui suit de faire une étude suffisamment complète des propriétés de toutes les espèces de surfaces que nous avons nommées par l'application d'une seule méthode très féconde, qui sert à résoudre avec la plus grande facilité *toutes* les questions que l'on peut se poser sur ces surfaces.

Cette méthode consiste dans la considération des surfaces du 4e ordre à conique double ou cuspidale, générale ou décomposée, comme des projections centrales sur l'espace ordinaire de l'intersection de deux variétés quadratiques à 3 dimensions de l'espace linéaire à 4 dimensions. L'idée d'obtenir la géométrie de l'espace ordinaire comme une projection (stéréographique) d'une variété quadratique à 3 dimensions est due à M. DARBOUX, qui cependant ne put l'exposer dans ses travaux, car alors on ne parlait presque pas encore de géométrie projective des espaces à plusieurs dimensions ([19]). M. KLEIN étudia aussi et avec plus de détails cet argument dans son Mémoire de 1871 déjà cité *Ueber Liniengeometrie und metrische Geometrie*; et l'année suivante dans la Note aussi citée *Ueber einen liniengeometrischen Satz* il démontrait un théorème dont on peut tirer comme cas particulier la proposition suivante: *chaque surface du* 4e *ordre à conique double (ou cuspidale) générale ou décomposée en deux droites peut être considérée comme une projection centrale de l'intersection de deux variétés quadratiques à* 3 *dimensions de l'espace à* 4 *dimensions.*

([19]) Voir, par exemple, l'ouvrage cité, p. 164, où il dit: « Comme on n'a pas d'espace à quatre dimensions, les méthodes de projection ne s'étendent pas à la géométrie de l'espace ». Maintenant nous faisons usage de l'espace à quatre dimensions sans nous préoccuper de la question de son existence, que nous regardons comme une question tout-à-fait sécondaire, et personne ne pense qu'on vienne ainsi à perdre de la rigueur.

Cette proposition nous assurait que par notre méthode nous aurions pu obtenir *toutes* les espèces de surfaces du 4e ordre que nous avions en vue, sans aucune exception ; de sorte qu'il suffisait d'étudier les propriétés de l'intersection $F_2^{2.2}$ de deux variétés quadratiques de l'espace à 4 dimensions dans les différents cas qu'elle peut présenter et ensuite en déduire les propriétés de sa projection suivant les différentes positions qu'on peut donner au centre de projection.

De cette manière on trouve toutes les propriétés connues et d'autres inconnues jusqu'à-présent de celles parmi nos surfaces que l'on connaissait déjà et de celles qui sont nouvelles, avec la plus grande simplicité, sans aucun calcul, sans aucun artifice : et cette méthode nous donne même, pour ainsi dire, la raison intime de plusieurs propriétés que l'on avait déjà trouvées, mais non pas complètement expliquées ([20]).

Nous allons citer quelques exemples. M. Korndörfer dans ses travaux après avoir étudié 5 espèces de surfaces à conique double générale passe à 6 espèces de surfaces à conique double décomposée en deux droites distinctes et, en refaisant pour chacune tous les calculs, il obtient pour ces dernières espèces des résultats que le lecteur peut remarquer correspondre parfaitement à ceux obtenus pour les 5 premières espèces et à ceux de Clebsch pour la surface générale : quelle est la raison de cela ? C'est que celles-ci et celles-là ne sont que les projections des 6 mêmes espèces de $F_2^{2.2}$ faites par des centres de projection différents. De même les 3 espèces de surfaces à deux droites doubles coïncidentes étudiées par M. Korndörfer sont des projections de 3 de ces mêmes $F_2^{2.2}$ et de là les

([20]) Nous devons aussi rappeler ici comme contenant des applications très importantes de la méthode de la projection dans les espaces à plusieurs dimensions (et même le premier dans lequel cette méthode soit développée avec soin et reçoive une large et féconde preuve de sa grande importance) le travail connu de M. Veronese : *Behandlung der projectivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Princip des Projicirens und Schneidens,* Math. Ann., XIX, pp. 161-234. — Nous nous permettrons encore de citer une autre application que nous avons faite de cette méthode dans une Note *Sulle rigate razionali in uno spazio lineare qualunque* (Atti Acc. Torino, XIX [queste Opere, I, p. 1]) : cette application consiste dans la démonstration du fait que les représentations planes données par Clebsch (Math. Ann., V, pp. 1-26) des surfaces réglées rationnelles et la classification qu'il en a déduite de ces surfaces s'obtiennent immédiatement par des projections. De même nous verrons que la représentation plane des surfaces du 4e ordre à conique double étudiée par Clebsch (et en conséquence celle des surfaces du 3e ordre) n'est qu'une projection d'une surface de l'espace à 4 dimensions faite par une droite sur un plan.

analogies qu'elles présentent avec des espèces de surfaces précédemment étudiées. De la même manière on voit le lien étroit qu'il y a entre les surfaces à une droite double et une droite cuspidale, à conique cuspidale, et à deux droites cuspidales, et respectivement les surfaces 2^e^, 3^e^ et 4^e^ de celles à conique double générale (ou bien 3^e^, 4^e^ et 5^e^ de celles à deux droites doubles) des Mémoires de M. Korndörfer. — Dans le Mémoire de Clebsch on voit que la conique double de la surface générale semble fonctionner comme appartenant au système de quartiques gauches de 1^e^ espèce de la surface: son image dans la représentation plane de la surface est une cubique appartenant au système des cubiques images de ce système de quartiques, etc.; quelle est la raison intime de cela? C'est que cette conique est justement la projection d'une quartique gauche de l'espace à 4 dimensions. — Enfin, pour donner encore un exemple, en étudiant les deux séries de coniques de la surface à conique double qui correspondent à un même cône de Kummer on trouve qu'il passe entre elles des relations ayant une étroite analogie avec les relations qui lient les deux séries de génératrices d'une quadrique ([21]) : la raison de ce fait sera aussi parfaitement expliquée dans la suite.

Dans ce travail nous nous sommes donc proposé, comme nous l'avons déjà dit, d'obtenir par la méthode de la projection une théorie suffisamment complète de toutes les espèces de surfaces nommées. Nous retrouverons ainsi par notre méthode (qu'on pourrait appeler synthétique en ce sens, qu'elle ne fait pas usage d'équations) toutes les propriétés les plus importantes que l'on connaissait déjà sur ces surfaces en rattachant les résultats projectifs des travaux allemands à ceux métriques sur la cyclide des géomètres français et anglais et de notre ami Loria ([22]); nous trouverons d'autres propriétés qui sont nouvelles et nous ajouterons aux espèces déjà connues de ces surfaces un nombre à-peu-près égal de surfaces nouvelles, de façon que notre classification embrassera plus de 70 espèces de surfaces. Ainsi outre les 18 espèces de surfaces à conique double générale nous trouverons parmi nos surfaces toutes les cinq espèces différentes de surfaces du 4^e^ ordre et de la 3^e^ classe; nous verrons plusieurs e-

---

([21]) M. Laguerre est le premier qui ait remarqué cette analogie (sans en donner l'explication) dans sa Note *Sur les sections circulaires des surfaces anallagmatiques* (Bull. Soc. Philomatique, V, mars 1868, pp. 48-52).

([22]) Les détails historiques dans lesquels nous sommes entrés dans cette introduction nous permettront de ne pas nous arrêter à indiquer toujours pour chacune de ces propriétés à qui elle est due ou bien si elle est nouvelle.

spèces de surfaces à conique cuspidale (dont on peut dire qu'on n'a étudié jusqu'à-présent que la plus générale), lesquelles ne sont que des cas particuliers de surfaces à conique double douée de deux points de contact de deux nappes; nous verrons aussi une série nombreuse de surfaces à deux droites doubles non considérées par M. KORNDÖRFER, par exemple toutes celles qui ont dans le point de rencontre des deux droites doubles un point triple et dont il semble qu'on ne connaisse qu'un seul cas particulier: la surface de STEINER. Ni les surfaces à une droite double et une droite cuspidale, ni celles à deux droites cuspidales ne semblent non plus avoir occupé jusqu'à-présent les géomètres et elles se présenteront naturellement dans notre recherche. Pour chacune de ces différentes espèces de surfaces nous verrons le nombre et la disposition des droites, les séries de coniques, etc., et nous montrerons comment on en obtient la représentation plane de l'ordre moindre. Nous indiquerons pour chaque espèce combien il y a d'inversions qui transforment la surface en elle-même (inversions *fondamentales*). Comme on connait aujourd'hui (même pour la théorie des fonctions) l'importance des transformations qui changent en soi-même un être quelconque (géométrique ou analytique) on ne trouvera pas que nous nous sommes trop étendus en donnant ces inversions pour chacune des différentes espèces de surfaces: d'ailleurs lorsque la surface a parmi les transformations qui la changent en elle-même des homologies, comme il arrive pour les surfaces à conique cuspidale, nous trouverons (toujours par notre méthode) ces homologies parmi les inversions fondamentales. Nous étudiérons aussi avec quelques soins les différentes espèces de points singuliers qui se présentent dans nos surfaces, car notre méthode, nous donnant les sections planes de celles-ci comme projections de quartiques gauches de 1e espèce, nous montre immédiatement quelle singularité présente en un point singulier de la surface une section plane quelconque passant par ce point. De cette manière nous pourrons obtenir directement toutes les propriétés connues (voir, par exemple, le travail de M. ZEUTHEN que nous citerons bientôt) des points-pinces de la conique double, des points-clos de la conique (ou d'une droite) cuspidale, d'un point de contact de deux nappes, etc.

Quant aux cyclides nous donnerons pour les différentes espèces les quartiques focales et les foyers par l'application d'un théorème très général relatif à un espace à un nombre quelconque de dimensions [23], et de là on aura les particularités que présentent les quadriques (ou les coniques) déférentes par rapport aux sphères directrices correspondantes (ou aux cercles directeurs correspondants), et en conséquence le moyen de construire chaque espèce de cyclides comme l'enveloppe de ∞^2 ou de ∞^1 sphères. Notre méthode nous indiquera aussi immédiatement pour chaque espèce de cyclide, et en général pour chaque espèce de surface (même à conique double ou cuspidale décomposée), par quelle espèce de quadriques on peut l'obtenir avec une inversion (lorsqu'une telle transformation est possible, comme il arrive dans la plupart des cas ; et pour toutes les cyclides, celle générale exceptée), ce qui a déjà été fait pour quelques espèces de cyclides par MM. CASEY et DARBOUX, et qui a pour but de donner une méthode élémentaire (l'inversion) pour déduire les propriétés des différentes espèces de nos surfaces de celles des quadriques.

Après avoir étudié des propriétés communes à toutes nos surfaces nous passerons à leur classification (dont on peut voir un tableau à la fin du travail) et à leurs propriétés particulières ; mais dans le dernier paragraphe nous reviendrons à la théorie générale et nous trouverons une propriété, qui nous semble très remarquable, sur une *polarité* par rapport aux cyclides, propriété qui donne en même temps tous les invariants absolus de chaque espèce de cyclides dans la géométrie des inversions. Nous finirons en montrant (sans entrer dans beaucoup de détails sur les questions de réalité, qui nous auraient porté trop loin) comment parmi les 18 espèces de cyclides il y en a seulement 10 qui sont réelles, et la démonstration la plus simple que l'on puisse donner de cette proposition consiste dans l'application d'un théorème analytique important dû à M. KLEIN.

---

(23) Ce théorème, que l'on trouvera au n⁰ 160 de notre Mémoire *Sulla geometria della retta e delle sue serie quadratiche* (Mem. Acc. Torino, (2) 36 [v. questo volume, p. 25]), a déjà été appliqué par nous dans ce Mémoire à montrer comment la classification des complexes quadratiques puisse se déduire de celle des congruences quadratiques, ou vice-versa. — Quant aux quartiques focales et aux foyers M. LORIA les a déjà trouvés dans son travail pour toutes les cyclides, mais comme la plupart de ses résultats là-dessus ne sont qu'énoncés, et comme d'ailleurs ce n'était pas seulement des découvertes nouvelles que nous nous proposions d'exposer, mais aussi une méthode nouvelle pour étudier nos surfaces, nous avons cru qu'il était bien de revenir dans notre travail sur cette question.

La surface quartique à conique double générale ou décomposée en deux droites. Points-pinces de cette conique.

1. Dans un espace linéaire à 4 dimensions R_4 deux variétés quadratiques (24), c'est-à-dire deux F_3^2, se coupent en une surface du 4e ordre $F_2^{2.2}$ par laquelle passe un faisceau de ces variétés. Une telle surface quartique Γ jouit de propriétés très simples analogues à celles des courbes quartiques de 1e espèce: nous en énoncerons ici quelques-unes dont la démonstration est des plus faciles (25).

Parmi les variétés quadratiques qui passent par Γ il y a dans le cas le plus général 5 *cônes de* 1e *espèce*, ou variétés composées de ∞^2 droites passant par un point (*sommet*) et que l'on peut obtenir en projetant par ce point des quadriques générales de R_3. Mais il peut arriver que quelques-uns de ces cônes coïncident, et aussi qu'il y ait dans le faisceau un ou deux *cônes de* 2e *espèce*, variétés composées de ∞^1 plans passant par une droite (*arête*) et que l'on obtient en projetant par cette droite des coniques de R_2; ou enfin que toutes les variétés du faisceau soient des cônes. Nous examinerons séparément plus tard tous ces cas.

Un point quelconque de R_4 a pour espaces polaires relativement au faisceau de F_3^2 les espaces d'un faisceau, dont le soutien est un plan, qu'on peut appeler le *plan polaire* du point par rapport à Γ. Par ce point passe en général une seule variété du faisceau et l'espace qui lui est tangent en ce point est celui qui le joint à son plan polaire. Si le point appartient à Γ ce plan devient le *plan tangent* à Γ dans le même point, c'est-à-dire l'intersection des espaces tangents en ce point aux variétés du faisceau, et en conséquence le lieu des droites tangentes en ce point aux courbes tracées sur Γ et passant par ce point.

Si le point est le sommet de l'un des cônes de 1e espèce (ou un point quelconque de l'arête d'un cône de 2e espèce) du faisceau, ses espaces polaires par rapport aux variétés de celui-ci coïncident; de

(24) Par brièveté dans les dénominations des êtres de l'espace linéaire à 4 dimensions nous nommerons simplement *variété, surface, courbe* les espaces respectivement à 3, 2, 1 dimensions contenus dans celui-ci. La variété, surface, courbe du 1er ordre s'appellera respectivement *espace* (ordinaire), *plan, droite.*

(25) On pourra d'ailleurs trouver la théorie de l'intersection de deux F_{n-1}^2 du R_n dans notre *Studio sulle quadriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni* (Mem. Acc. Torino, (2) 36 [V. questo volume, p. 25]).

sorte que le point n'a plus seulement un *plan*, mais un *espace polaire*. Cet espace contient les sommets (et les arêtes) des autres cônes du faisceau.

2. Maintenant si par un point quelconque P de R_4 on projette la surface quartique Γ, avec ses plans tangents, sur un espace R_3 contenu dans R_4, on obtient une nouvelle surface quartique S, avec ses plans tangents. Soit φ la variété quadratique contenant Γ et passant par P. L'espace π tangent en P à φ coupera φ même en un cône quadrique *ordinaire* (ou à deux dimensions), qui sera coupé en général par l'une quelconque des variétés quadratiques de notre faisceau (et par toutes les autres) suivant une courbe du 4ᵉ ordre et de 1ᵉ espèce [26] k^4 appartenant à Γ et dont les couples de points situés sur les génératrices du cône quadrique seront projetés en les points d'une conique γ^2 de R_3 placée dans le plan d'intersection de R_3 avec π. Donc *la surface* S *projection de Γ dans* R_3 *est une surface du* 4ᵉ *ordre ayant une conique double* γ^2. Pour chaque point de cette conique les deux plans tangents à S seront les projections des plans tangents à Γ dans les deux points de k^4 dont ce point est la projection : ces deux points de k^4 représentent le même point de la conique double γ^2 respectivement dans l'une et dans l'autre des deux nappes de S qui y passent.

3. Parmi les génératrices du cône $\pi\varphi$ il y en a quatre en général qui touchent la courbe k^4 située dans ce cône : leurs points de contact sont les 4 points d'intersection de k^4 avec le plan polaire p de P par rapport à Γ (plan qui est aussi le plan polaire de P par rapport à toutes les quadriques d'intersection de π avec le faisceau de variétés quadratiques considéré, c'est-à-dire à toutes les quadriques de l'espace π qui passent par k^4). Donc *il y a sur la conique double de* S *quatre points dans lesquels les deux nappes se confondent, c'est-à-dire quatre points-pinces*. Pour en trouver les plans tangents il ne suffit plus de projeter par P les plans tangents à Γ dans ces 4 points de k^4 : car, puisque ces points se trouvent sur le plan polaire p de P par rapport à Γ, leurs plans tangents passeront tous les quatre par P et n'auront pour projections sur R_3 que quatre droites passant par les points-pinces et rencontrant S chacune en 4 points confondus dans le point-pince correspondant (puisque les 4 points de rencontre de chaque plan

---

(26) N'ayant jamais à considérer les courbes du 4ᵉ ordre de la 2ᵉ espèce, nous indiquerons souvent avec *quartique* tout-court une quartique de 1ᵉ espèce.

tangent à Γ coïncident dans le point de contact): ces 4 droites sont donc (comme nous nous assurerons aussi par d'autres propriétés) les *tangentes singulières* relatives aux 4 points-pinces ([27]). Soit A l'un quelconque des 4 points d'intersection de p avec Γ et A' sa projection sur R_3, qui sera un point-pince de γ^2: chaque espace passant par le plan a tangent en A à Γ est lui-même tangent en A à Γ et coupe cette surface suivant une quartique ayant en A un point double dont les deux tangentes appartiennent à a. Or ce même espace coupe R_3 suivant l'un quelconque des plans qui passent par la tangente singulière du point-pince A' : donc l'intersection d'un tel plan avec S est la projection de cette quartique faite par le point P qui est dans le plan a des deux tangentes en A à la quartique. *Un plan qui passe par la tangente singulière en un point-pince de la conique double de* S *coupe cette surface suivant une courbe (du* 4e *ordre) ayant en ce point-pince un point de contact de deux branches avec cette tangente singulière pour tangente* ([28]).

([27]) V. ZEUTHEN, *Révision et extension des formules numériques de la théorie des surfaces réciproques*, no 15, Math. Ann., X, pp. 446-546. — Nous retrouvons ci-dessus des propriétés des points-pinces qui ont été données pour des surfaces algébriques quelconques dans ce Mémoire.

([28]) Effectivement la projection plane d'une courbe gauche à point double par un point du plan des deux tangentes présente en général un point de contact de deux branches (*Selbstberührungspunkt*) dans la projection de ce point double. De même on peut démontrer que *tandis que chaque section de* S *passant par un point-pince y a en général un point de rebroussement de* 1e *espèce, chaque section faite par un plan passant par la tangente à la conique double en ce point-pince y a un point de rebroussement de* 2e *espèce.* Car un espace quelconque passant par PA coupe Γ suivant une quartique tangente en A à cette droite et ayant en conséquence pour projection une quartique à point de rebroussement de 1e espèce en A'; mais si cet espace passe en outre par le plan tangent à φ (ou au cône $\pi\varphi$) le long de PA, alors sa quartique d'intersection avec Γ non seulement aura PA pour tangente en A, mais aura un contact quadriponctuel en A avec le plan nommé et la projection de cette quartique aura donc vraiment en A' un point de rebroussement de 2e espèce avec la tangente à la conique double pour tangente (singulière).

Comme nous aurons encore besoin de nous y appuyer, il est bon que nous rappellions ici les différents cas que peut présenter la projection plane d'une quartique gauche de 1e espèce, suivant la position du centre de projection P (que nous supposerons d'ailleurs n'appartenir pas à la courbe, de sorte que la projection soit aussi du 4e ordre), ne pouvant pas citer un autre lieu où ils soient tous exposés complètement. Ces différents cas sont d'ailleurs très intéressants par eux-mêmes, car ils donnent lieu à presque toutes les formes les plus remaquables de points singuliers dont le degré de multiplicité ne surpasse pas 3. Il y a, comme on sait, trois différentes sortes de ces quartiques: celle générale, celle qui a un point double et celle qui a un point de rebroussement. La projection plane d'une quartique générale est une courbe du 4e ordre à deux points doubles, qui sont

Mais si l'espace mené par le plan a est celui tangent en A à la variété φ, alors le centre de projection P se trouvera sur l'une des deux tangentes en A à la quartique d'intersection de cet espace avec Γ, et la projection de cette quartique aura en conséquence en

---

les points de rencontre du plan avec les deux génératrices se croisant en P de la quadrique qui passe par P et qui appartient au faisceau ayant pour soutien la quartique donnée. Mais comme dans chacun des deux systèmes de génératrices de cette quadrique il y en a 4 qui touchent la quartique, si P se trouve sur l'une de ces 8 génératrices ou bien sur l'un de leurs 16 points d'intersection, alors l'un des deux points doubles de la projection ou tous les deux se changeront en des points stationnaires (points de rebroussement de 1e espèce). Si la quadrique du faisceau passant par P devient un cône alors, comme les deux génératrices passant par P coïncident, les deux points doubles de la courbe projection coïncident en un point de contact de deux branches; mais si en outre P se trouve sur l'une des 4 génératrices du cône tangentes à la quartique, alors (comme nous avons déjà vu) la projection de celle-ci aura un point de rebroussement de 2e espèce.

La projection d'une quartique à point double, lorsque la quadrique du faisceau passant par P est générale, a trois points doubles, dont l'un D est la projection du point double M de la quartique. Des deux autres l'un ou tous les deux deviennent stationnaires si P vient à être sur une ou sur deux génératrices tangentes à la quartique. Si P vient à être sur l'une des deux génératrices de la quadrique qui passent par M, c'est-à-dire s'il vient à être sur le plan tangent en M à celle-ci (plan des deux tangentes en M à la quartique), alors la projection D de M devient un point de contact de deux branches, et il y aura encore un autre point double, qui pourra aussi devenir stationnaire. Comme dans le faisceau de quadriques déterminé par la quartique il y a dans ce cas un cône ayant le sommet en M et deux autres cônes, il faudra encore considérer séparément le cas où P se trouve sur le premier cône et celui où il se trouve sur l'un des deux autres. Dans le premier cas la projection de la quartique a en D un point triple dans lequel se croisent en général trois branches distinctes (les projections des deux branches de la quartique qui passent par M et de la branche qui rencontre en un point différent de M la droite PM); mais si le centre de projection P se trouve sur l'une de ces deux génératrices du cône qui sont les tangentes à la quartique en M, alors deux des branches passant par le point triple D se confondent en une seule et ce point triple vient se composer d'un point stationnaire ayant une certaine tangente et par lequel passe une autre branche ayant en ce point une autre tangente. Dans le second cas la projection de la quartique a en D un point double ordinaire et ailleurs un point de contact de deux branches, qui se change en un point de rebroussement de 2e espèce lorsque P vient sur l'une des deux génératrices tangentes à la quartique, qu'il y a dans ce cas sur le cône quadrique passant par P; mais si le centre de projection P se trouve sur la génératrice de ce cône qui passe par M, alors évidemment dans le point D de la projection se confondront un point de contact de deux branches et un point double ordinaire, c'est-à-dire on aura un *point d'osculation de deux branches* (point dans lequel se confondent trois points doubles dont les droites qui les joignent

A' un point triple par lequel passent une branche ayant en ce point un point de rebroussement de 1e espèce dont la tangente est l'intersection de R_3 avec le plan tangent le long de la génératrice PA au cône d'intersection de l'espace avec φ (plan qui sera donc tangent le long de PA à φ et en conséquence aussi au cône $\pi\varphi$, de sorte qu'il coupera R_3 suivant la tangente en A' à γ^2) et une autre branche dont la tangente en A' est l'intersection de R_3 avec le plan a des tangentes en A' à la quartique considérée, c'est-à-dire est la tangente singulière en A'. Donc : *Parmi les plans qui passent par la tangente singulière en un point-pince celui qui contient aussi la tangente en ce point à la conique double coupe la surface* S *suivant une courbe ayant en ce point-pince un point triple, où il y a un point de rebroussement dont la tangente est cette tangente à la conique double et par lequel passe une autre branche ayant pour tangente la tangente singulière du point-pince.* — Ce plan, qui est évidemment le lieu des droites rencontrant dans le point-pince trois fois la surface S, s'appelle, pour le distinguer des autres plans passant par la tangente singulière et qui peuvent tous être considérés comme des plans tangents dans le point-pince, le *plan tangent singulier* de ce point.

---

tendent vers une même limite).

Si la quartique gauche a un point stationnaire M et le centre de projection P est un point quelconque d'une quadrique générale du faisceau, la projection aura aussi un point stationnaire dans la projection D de M et aura en outre deux points doubles dont l'un ou tous les deux deviendront aussi des points de rebroussement de 1e espèce si P se trouve sur une ou deux génératrices tangentes à la quartique. Mais si P se trouve sur l'une des deux génératrices qui passent par M, alors dans le point stationnaire D viendra coïncider l'un des deux points doubles, c'est-à-dire D deviendra un point de rebroussement de 2e espèce pour la courbe projection et celle-ci aura encore un point double (ou stationnaire). Si la quadrique du faisceau qui passe par P est le cône qui a le sommet en M, alors la projection de la quartique aura en D un point triple provenant d'un point stationnaire par lequel passe une autre branche de la courbe ; mais si P est justement sur celle des génératrices de ce cône qui est tangente en M à la quartique, alors cette branche vient se confondre avec celle qui contient le point stationnaire et on a un point triple dont les trois tangentes coïncident (et dont l'apparence est presque, comme l'on sait, celle d'un point ordinaire). Si enfin P se trouve sur l'autre cône du faisceau, alors la projection aura en D un point stationnaire, et ailleurs un point de contact de deux branches, qui viendra coïncider avec D si P se porte sur la génératrice passant par M : dans ce dernier cas le point D deviendra pour la courbe un *point de rebroussement de 3e espèce*, c'est-à-dire un point singulier provenant de la coïncidence d'un point de rebroussement de 2e espèce avec un point double.

Nous voyons donc que les 4 plans tangents singuliers qui appartiennent aux 4 points-pinces de γ^2 sont les intersections de R_3 avec les espaces tangents à φ dans les 4 points d'intersection de p avec Γ. Or ces espaces se coupent suivant une droite passant par P (la droite polaire du plan p par rapport à φ) puisque ces points sont dans un plan p appartenant à π: donc les 4 plans tangents singuliers se coupent dans le point d'intersection de cette droite avec R_3. *Les plans tangents singuliers des* 4 *points-pinces de la conique double de* S *passent par un même point.*

4. Si la variété quadratique φ du faisceau, qui passe par le centre de projection P, est un cône de 1e espèce, alors il se présente quelques particularités dans ce que nous avons dit. L'espace π qui lui est tangent en P coupera ce cône φ en deux plans se coupant suivant la droite joignant P au sommet de ce cône, et la quartique k^4 d'intersection de cet espace π avec Γ se décomposera en deux coniques k_1^2, k_2^2 de ces plans, lesquelles auront deux points communs et seront projetées par P sur R_3 suivant deux droites d_1, d_2 se coupant en un point, et dans lesquelles se décompose en ce cas la conique γ^2: comme chaque point de l'une de ces droites est la projection de deux points de la conique correspondante, la surface S aura d_1, d_2 pour droites doubles, c'est-à-dire *la conique double de* S *se décomposera en deux droites.* Par le point P passent deux tangentes à chacune des coniques k_1^2, k_2^2: donc *sur chaque droite double de notre surface il y a deux points-pinces.* Ces points auront encore des tangentes singulières, que l'on trouvera de la manière vue, et les plans passant par ces tangentes jouiront encore des mêmes propriétés que dans le cas général; le plan tangent singulier qui correspond à l'un de ces points-pinces sera le plan qui joint sa tangente singulière à la droite double sur laquelle il se trouve.

Le point de rencontre des plans tangents singuliers des 4 points-pinces se réduit dans ce cas au point de rencontre des deux droites doubles, comme le montre d'ailleurs la construction que nous en avons donnée. La même méthode, dont nous nous sommes servis pour reconnaître la nature des sections de S faites par des plans qui passent par un point-pince, montre que la section faite par un plan qui passe par le point de rencontre des deux droites doubles (projection d'une quartique gauche par un point P d'un cône quadrique — appartenant à φ — qui la contient) a dans ce point un contact de deux branches avec une droite du faisceau déterminé par d_1, d_2 pour tangente commune. D'ailleurs cela résulte aussi du fait que pour une telle section coïncident les deux points doubles qu'une section plane quelconque a sur d_1 et d_2.

Nous verrons plus tard comment les deux droites doubles d_1, d_2 viennent coïncider lorsque la variété φ devient un cône de 2e espèce.

Séries de coniques de la surface; cônes de Kummer.

5. Chacun des cônes quadriques passant par Γ contient ∞^1 *plans générateurs*, et s'il est de 1e espèce ces plans forment deux séries: deux plans d'une même série ne se coupent que dans le sommet, tandis que deux plans de différentes séries se coupent suivant une *droite génératrice* du cône (car on obtient tous ces plans générateurs en projetant les deux séries de génératrices d'une quadrique par un point extérieur à l'espace qui contient celle-ci). Or chaque plan générateur d'un tel cône est coupé par une autre variété quelconque de notre faisceau (et en conséquence par toutes ces variétés) suivant une conique appartenant à Γ. Vice-versa chaque conique de Γ est sur un plan générateur d'un cône du faisceau puisque la variété du faisceau, qui passe par un point quelconque de ce plan placé hors de la conique, devra contenir tout ce plan et en conséquence se réduire à un cône. Donc la surface Γ contient ∞^1 coniques, qui forment autant de *systèmes* qu'il y a de cônes dans le faisceau, et chaque système se compose, s'il correspond à un cône de 1e espèce, de deux *séries* différentes. Comme deux plans générateurs de deux cônes différents du faisceau se coupent en général en un point qui appartiendra à Γ, nous voyons que deux coniques de Γ appartenant à des systèmes différents se coupent en un seul point. Au contraire il suit de ce que nous avons dit que deux coniques appartenant au même système correspondant à un cône de 1e espèce se coupent en deux points si elles sont de deux séries différentes, tandis qu'elles ne se coupent pas (ou se coupent seulement dans le sommet du cône correspondant, si ce sommet appartient à Γ) lorsqu'elles sont de la même série. — Dans le cas le plus général il y aura donc sur Γ (v. n^0 1) 5 systèmes de coniques décomposés chacun en deux séries, et correspondants aux 5 cônes de 1e espèce du faisceau (dont aucun n'a alors le sommet sur Γ).

En projetant par un point quelconque P sur R_3, les plans des coniques de Γ se projettent au moyen d'espaces passant par P et respectivement par les différents sommets des cônes du faisceau. Un tel espace passant par P et par un plan générateur de l'un de ces cônes contiendra aussi un plan générateur de différente série, sur lequel il y aura une autre conique de Γ: cet espace sera tangent au cône le long de la droite d'intersection de ces deux plans générateurs (droite sur laquelle se coupent en deux points les deux coniques de Γ appartenant à ces plans), et cette droite se trouvera en conséquence dans l'intersection de ce cône avec l'espace polaire de P par rapport à lui, intersection qui se compose d'un cône quadrique ordinaire, dont les plans tangents appartiennent aux espaces tangents considérés menés par P au cône à 3 dimensions. Mais si P appartient justement à celui-ci (n^0 4), ce cône quadrique ordinaire se réduit au couple de plans générateurs qui passent par P et qui coupent R_3, comme nous avons vu, suivant les deux droites doubles d_1, d_2 de S. Les espaces tangents menés par P au cône F_3^2 coupent donc dans ce cas R_3 suivant les deux faisceaux des plans passant par d_1, d_2; et des deux coniques de Γ, que chacun d'eux contient, l'une est fixe (k_1^2 ou k_2^2) et se projette suivant d_1 ou d_2, et seulement l'autre varie. Donc, en supposant successivement que le centre de projection P ait une position tout-à-fait générale par rapport à Γ et qu'il soit pris sur l'un des cônes du faisceau, nous avons les propositions suivantes.

La surface générale du 4^e ordre à conique double contient 5 *couples de séries de* ∞^1 *coniques. Les plans des coniques des deux séries d'un même couple enveloppent un cône quadrique, dont chaque plan tangent coupe la surface suivant deux coniques appartenant respectivement aux deux séries du couple et se coupant (outre que dans deux points de la conique double) en deux points situés sur la génératrice de contact de ce plan avec le cône. Les génératrices de ces* 5 *cônes et leurs plans tangents sont donc doublement tangents à la surface ; nous appellerons ces cônes les cônes de* Kummer *de la surface. — Deux coniques de celle-ci ne se coupent pas si elles appartiennent à une même série, se coupent en deux points si elles appartiennent aux deux séries d'un même couple et se coupent en un seul point si elles appartiennent à des séries de différents couples.*

Les mêmes choses valent parfaitement si la conique double de la surface se décompose en deux droites ; seulement alors au lieu de 5 *il n'y aura que* 4 *cônes de* Kummer *proprement dits, le cinquième se réduisant au couple des deux droites doubles considérées comme enveloppes de plans, car outre les* 4 *couples de séries de coniques qui correspondent aux* 4 *cônes de* Kummer *proprement dits il y a sur la surface deux autres séries de coniques situées dans les plans passant par les* *deux droites doubles. Ces 5 couples de séries de coniques présentent les mêmes relations que dans le cas précédent* (29).

6. Nous pouvons établir facilement une proposition remarquable qui lie les sommets des cônes de KUMMER avec les points pinces de la conique double. Considérons le lieu des droites polaires du plan p (polaire de P relativement à Γ) par rapport aux variétés quadratiques de notre faisceau. Puisque par rapport à une quelconque de ces variétés le point P a un espace polaire passant par p, les droites polaires de p passeront toutes par P et formeront en conséquence un cône. Un espace quelconque mené par p coupe le faisceau de F_3^2 suivant un faisceau ordinaire de quadriques et les pôles de p par rapport à celles-ci forment, comme l'on sait, une cubique gauche dont les cordes sont les droites polaires des points de p par rapport à ce faisceau. Donc nous concluons que le lieu des droites polaires du plan p par rapport au faisceau de F_3^2 est un cône cubique ayant P pour sommet (30) et qui est coupé suivant deux génératrices par chacun des plans polaires par rapport à Γ des points de p, parmi lesquels il y a les 4 plans tangents à Γ dans les points d'intersection de p avec Γ (ou avec k^4). En outre comme les droites polaires de p par rapport aux cônes de notre faisceau passent par leurs sommets, ce cône cubique passera aussi par ceux-ci. Et les 3 points d'intersection de ce cône avec p seront des points de contact de ce plan p avec des variétés du faisceau, c'est-à-dire ils seront les trois points diagonaux du quadrangle déterminé dans le plan p par les 4 points d'intersection avec Γ. En coupant donc le cône cubique considéré aver R_3 nous avons pour la surface S le théorème suivant :

Les sommets des cônes de KUMMER, *les points diagonaux du quadrangle des points-pinces de la conique double, et le point d'intersection des plans tangents singuliers de ces points-pinces sont sur une même*

---

(29) Dans ce cas, où la variété φ qui passe par P est un cône, les coniques de Γ placées dans les plans générateurs de φ de même système que le plan contenant k_2^2 coupent k_1^2 en deux points en ligne droite avec le sommet de φ : comme par ce sommet passent deux seules tangentes à k_1^2 on a que *parmi les plans qui passent par une droite double de notre surface il y en a deux pour lesquels la conique d'intersection avec la surface est tangente à cette droite double.*

(30) A la même conclusion on parviendrait en remarquant que le cône dont il s'agit est le cône qui projette par le point P la courbe lieu des pôles de l'espace π par rapport aux variétés du faisceau et cette courbe est, comme on voit facilement, une courbe du 4e ordre passant par P (et *normale* pour R_4).

cubique gauche. Cette cubique a pour 4 *cordes les tangentes singulières de ces points* (31).

Si la surface S est générale et sa conique double ne se décompose pas, on a ainsi 9 points et 4 cordes d'une cubique; si la conique double se décompose, l'un des sommets des cônes de KUMMER, l'un des points diagonaux du quadrangle des points-pinces et le point d'intersection des plans tangents singuliers de ces points se confondent en le point d'intersection des deux droites doubles, de sorte qu'on a seulement plus 7 points et 4 cordes d'une cubique. — Nous verrons plus tard deux propriétés communes respectivement aux différents points et aux différentes cordes de cette cubique.

Droites et cubiques de la surface.

7. Cherchons à présent les droites de Γ. Soit r une droite de Γ: comme elle appartiendra aussi à un cône quelconque f de notre faisceau de F_3^2 sans passer par son sommet (il peut arriver qu'elle passe par le sommet seulement dans des cas particuliers que nous considérerons plus tard), le plan qui la joint à ce sommet appartiendra lui-même au cône f; et puisque ce plan coupe Γ suivant la droite r il la coupera encore suivant une autre droite r' et sera en conséquence tangent dans le point d'intersection de ces deux droites à toutes les F_3^2 du faisceau. L'espace polaire du sommet de f par rapport à tout ce faisceau coupe donc f suivant une quadrique telle que la génératrice qui passe par le point rr' et qui est l'intersection du plan rr' avec cet espace sera tangente aux quadriques d'intersection du même espace avec les F_3^2 du faisceau, c'est-à-dire tangente à la quartique (commune à toutes ces quadriques) d'intersection de cet espace polaire et de Γ. Vice-versa si en un point de cette quartique la tangente à celle-ci est une génératrice de la première quadrique, le plan générateur de f qui la contient sera tangent aux autres F_3^2 du faisceau dans ce point et coupera en conséquence Γ suivant deux droites r, r' se croisant en ce point. Or on sait que dans une quadrique il y a en général pour chaque série

(31) La première partie de cette proposition est due, pour le cas le plus général, à CLEBSCH (Mém. cité, p. 165), tandis que la seconde parait nouvelle. Notre démonstration montre aussi comment on devra modifier l'énoncé dans des cas plus particuliers, pour quelques-uns desquels M. KORNDÖRFER a étendu le théorème de CLEBSCH par des calculs identiques à ceux de ce savant.

de génératrices 4 génératrices tangentes à une quartique (de 1e espèce) tracée sur cette quadrique. Nous concluons donc :

Dans le cas le plus général la surface Γ contient 16 droites telles que chacune est coupée par d'autres 5 d'entre elles. Par rapport à l'un quelconque des 5 cônes du faisceau de F_3^2 ces 16 droites se divisent en 8 couples, chaque couple se composant de deux droites appartenant à un plan générateur de ce cône, quatre couples à 4 plans générateurs d'une série et les autres quatre à 4 plans générateurs de l'autre série. — En projetant par un point quelconque nous avons pour la surface S :

Une surface du 4e ordre générale, à conique double générale ou décomposée en deux droites, contient 16 *droites* (simples) *dont chacune est coupée par d'autres* 5, *et qui forment* 5.8 *couples de droites se coupant, de manière que chaque cône de* KUMMER *a* 8 *plans tangents contenant chacun l'un de ces couples :* 4 *des couples ainsi obtenus forment des coniques de l'une série et les autres* 4 *des coniques de la série conjuguée dans le couple de séries de coniques de la surface qui correspondent au cône de* KUMMER. *De là on tire toutes les relations qui lient les* 40 *couples de droites entre eux et avec les* 10 *séries de coniques. Ainsi des deux quatraines de ces couples de droites qui correspondent à un même cône de* KUMMER *deux couples d'une même quatraine n'ont pas de points communs, tandis que deux couples de différentes quatraines se coupent en deux points. Etc. etc.* (32).

Si la conique double est décomposée en deux droites on a comme cas particulier que par chacune de ces droites passent 4 *plans contenant* 4 *couples de droites* (simples) *de la surface, de sorte que* 8 *de ces droites rencontrent une droite double et les autres* 8 *rencontrent l'autre.*

Nous ne nous arrêterons pas sur les autres manières de grouper entre elles les 16 droites, car celle que nous avons vue est la plus importante.

8. Proposons-nous maintenant de trouver les cubiques de Γ. On sait qu'une cubique est toujours contenue dans un espace (au moins). Or un espace qui contienne une cubique de Γ devra encore couper Γ suivant une droite et vice-versa chaque espace qui passe par une droite de Γ coupe encore cette surface suivant une cubique, appuyée en deux points à cette droite (car la cubique et la droite doivent

(32) V. CLEBSCH, loc. cit., p. 145.

former une quartique de 1e espèce). Comme par une droite il passe ∞^2 espaces, il y aura donc sur Γ 16 systèmes de ∞^2 cubiques, dont chaque système correspondra à l'une des 16 droites de la surface. L'espace qui contient une de ces cubiques, et en conséquence la droite correspondante, est coupé par une autre droite de la surface en un point qui appartient à la cubique s'il n'appartient pas à la première droite. Donc en projetant sur R_3 par un point quelconque P et en remarquant que dans chaque système de ∞^2 cubiques de Γ il y en a ∞^1 placées dans des espaces qui passent par P:

Dans une surface générale du 4e ordre à conique double, générale ou décomposée en deux droites, il y a 16 systèmes de ∞^2 cubiques gauches qui correspondent aux 16 droites de la surface : dans le système qui correspond à l'une de ces droites il y a ∞^1 cubiques planes situées dans des plans passant par cette droite. Les ∞^2 cubiques gauches de ce système coupent en deux points cette droite correspondante, en aucun point les 5 droites de la surface qui s'appuient sur celle-ci et en un point les autres 10 droites de la surface.

Deux cubiques quelconques de même système se coupent en un seul point, de sorte que par deux points de la surface passe une cubique bien déterminée de chaque système. Deux cubiques de systèmes différents ont trois ou deux points communs suivant que les deux droites correspondantes à ces systèmes se coupent ou non (33). — En effet considérons dans R_4 l'espace qui contient une cubique de Γ et en conséquence aussi une droite r: on voit tout-de-suite que cet espace (et par conséquent cette cubique) sera déterminé si on l'assujettit à passer, outre que par r, par deux points quelconques donnés de Γ. En outre une autre cubique du même système coupera cet espace en 3 points dont deux seront sur r et un, en conséquence, sur la première cubique. Au contraire si l'on considère avec celle-ci une cubique d'un autre système correspondant à une droite coupant ou ne coupant pas r, alors comme cette nouvelle cubique ne coupera pas ou bien coupera en un point r, elle coupera encore l'espace contenant la première cubique, c'est-à-dire celle-ci même en 3 ou respectivement en 2 points. Cela prouve justement (en projetant sur R_3) notre dernier énoncé.

Remarquons que le fait que les ∞^2 cubiques d'un système sur Γ, ou bien sur l'une quelconque de ses projections dans R_3, jouissent de la propriété que deux d'entre elles se coupent en un point et qu'il y en a une déterminée qui passe par deux points donnés de

---

(33) V. Clebsch, loc. cit., p. 155.

la surface nous prouve que toute la géométrie plane projective vaut pour cette surface, pourvu qu'aux droites du plan on substitue ce système de cubiques sur la surface. Ainsi on pourra établir un système de coordonnées (*projectives* en un sens nouveau) de points sur la surface et on peut obtenir de cette manière très simplement une représentation de la surface sur un plan, à laquelle nous parviendrons plus tard avec autant de simplicité par une projection.

Quartiques de la surface et quadriques doublement tangentes.

9. Chacun des ∞^4 espaces contenus dans R_4 coupe Γ suivant une quartique de 1e espèce. Deux de ces quartiques se coupent en 4 points, placés dans le plan d'intersection des deux espaces qui les contiennent, et par lesquels passent ∞^1 autres quartiques (appartenant au faisceau des espaces qui passent par ce plan). Mais par 4 points quelconques de Γ il ne passe en général qu'un espace déterminé et en conséquence aussi une seule quartique. — Les espaces de R_4 coupent la variété quadratique φ du faisceau qui passe par P dans des quadriques, qui sont projetées par P sur R_3 suivant des quadriques passant par la conique double de S. Donc :

Sur chaque surface du 4e *ordre à conique double, générale ou décomposée,* S *il y a* ∞^4 *quartiques de* 1e *espèce, qui sont l'intersection de* S *avec les* ∞^4 *quadriques passant par la conique double. Par* 4 *points quelconques de* S *il passe une quartique bien déterminée, mais deux quartiques quelconques se coupent en* 4 *points (placés dans un plan) par lesquels il en passe encore* ∞^1, *et dont trois déterminent parfaitement le quatrième.*

Un espace quelconque coupe la quartique (générale ou décomposée en deux coniques) k^4, dont la projection est la conique double de S, en 4 points situés dans le plan d'intersection de cet espace avec l'espace π qui contient k^4 : les 4 autres points de k^4 placés avec ceux-là respectivement en ligne droite avec P seront aussi sur un plan (car ils correspondent à ceux-là dans une homologie harmonique de l'espace π, ayant P pour centre et p pour plan d'homologie), et il passera en conséquence par les uns et par les autres deux faisceaux d'espaces, c'est-à-dire deux systèmes de ∞^1 quartiques. Donc :

Chacune des ∞^4 *quartiques de* 1e *espèce de* S *coupe la conique double en* 4 *points dont* 3 *suffisent pour déterminer le quatrième ;*

et par 4 tels points sur les mêmes nappes de la surface passent ∞^1 *de ces quartiques, tandis que par les 4 mêmes points, mais sur les autres nappes passant par eux, passe un autre système de* ∞^1 *quartiques* (34).

10. Parmi les espaces de R_4 ceux qui touchent l'un quelconque des cônes quadriques passant par Γ coupent ce cône en deux plans et Γ en deux coniques de ces plans, dans lesquelles se décompose la quartique de Γ située dans un tel espace: les deux points communs à ces deux coniques sont des points de contact d'un tel espace avec Γ et ils sont sur une même génératrice du cône considéré et en conséquence sur une même droite avec le sommet de ce cône. En projetant par un point quelconque sur R_3:

A chaque cône de KUMMER *de la surface correspond, parmi les* ∞^4 *quadriques passant par la conique double, un système de* ∞^2 *quadriques doublement tangentes à* S : *l'une quelconque de ces quadriques touche* S *en deux points alignés avec le sommet du cône de* KUMMER *correspondant et coupe en conséquence* S *en deux coniques se coupant en ces points et appartenant respectivement aux deux séries de coniques de la surface qui correspondent à ce cône. Réciproquement, si l'on prend dans les deux séries de coniques de* S *qui correspondent à un même cône de* KUMMER *deux coniques quelconques, elles appartiendront à une quadrique passant par la conique double de* S (*et doublement tangente à* S) (35).

11. Nous avons considéré au n^0 précédent un cas dans lequel une des ∞^4 quartiques de Γ acquiert deux points doubles et nous avions déjà examiné au n^0 8 l'autre cas dans lequel cela arrive. Considérons maintenant les quartiques qui ont un seul point double. En un point quelconque M de Γ il y a, comme nous avons déjà dit, un plan tangent m, qui est l'intersection du faisceau des espaces tangents en M aux variétés du faisceau des F_3^2 passant par Γ. Un tel espace coupe la variété correspondante en un cône quadrique ordinaire ayant M pour sommet et les autres variétés en un faisceau

(34) V. CLEBSCH, loc. cit., p. 162.

(35) Il est bien entendu que ces propriétés, comme presque toutes celles que nous trouvons (tant que nous n'avertissons pas du contraire), ont lieu, comme le montre leur démonstration, non seulement pour la surface S la plus générale, mais aussi pour tous les cas particuliers, soit que sa conique double soit générale, soit qu'elle se décompose.

de quadriques ayant m pour plan tangent en M; donc il coupe Γ en une quartique ayant en M un point double dont les tangentes sont les droites d'intersection de m avec la variété quadratique considérée. En faisant varier celle-ci et en conséquence son espace tangent en M on voit que le faisceau des espaces passant par m coupe Γ suivant ∞^1 quartiques ayant en M un point double et que les couples des tangentes en ce point à ces courbes sont les couples de droites d'une involution, dans lesquels le plan m coupe le faisceau de F_3^2. Dans cette involution il y a deux droites doubles qui correspondent à deux variétés tangentes à m le long de ces deux droites. En remarquant encore que dans le faisceau d'espaces passant par m il y en a qui passent par les sommets des cônes du faisceau de F_3^2, il y en a un qui touche en M la variété φ passant par le centre de projection P et il y en a un enfin qui passe par P, et en se rappelant en outre que le faisceau des espaces tangents aux F_3^2 en un point quelconque de Γ correspond projectivement au faisceau de ces variétés nous concluons que:

Un point quelconque M *de la surface* S *est double pour* ∞^1 *quartiques de* 1e *espèce de la surface, qui sont l'intersection de celle-ci avec un faisceau de quadriques passant par la conique double et tangentes en* M *à* S: *les couples de tangentes en* M *à ces quartiques forment dans le plan tangent en* M *à* S *une involution dont les deux droites doubles sont les tangentes aux deux quartiques qui ont en* M *un point de rebroussement. A cette involution appartiennent les couples de tangentes aux couples de coniques de la surface (des différents couples de séries) qui passent par* M, *en outre le couple des droites qui s'appuient sur la conique double, et le couple des tangentes à l'intersection de la surface avec son plan tangent en* M *(c'est-à-dire des tangentes principales relatives à ce point). — Tous ces couples de l'involution, excepté le dernier, forment un groupe de couples qui reste projectif à soi-même lorsqu'on fait varier le point* M *sur* S. *En d'autres termes si en un point quelconque* M *de* S *on mène les différentes quadriques passant par la conique double et tangentes en ce point et en un autre à* S, *elles formeront avec le cône qui a* M *pour sommet et qui passe par la conique double un groupe de quadriques d'un faisceau et les rapports anharmoniques de ce groupe sont les mêmes, quel que soit le point* M *de la surface* ([36]).

([36]) La première partie de ce théorème est due à CLEBSCH (loc. cit., p. 161); la seconde n'est qu'une modification d'un théorème de M. DARBOUX sur les normales aux cyclides (V. le *Mémoire sur les surfaces cyclides,* Ann. école norm.

Ce théorème a lieu quelle que soit la surface S. Si elle est tout-à-fait générale et si sa conique double ne se décompose pas, on a ainsi des groupes de 6 éléments qui restent projectifs entre eux, c'est-à-dire l'on a ainsi 3 rapports anharmoniques indépendants qui seront des invariants absolus de la surface. Si la conique double se décompose en deux droites, au lieu de 5 il y aura seulement plus 4 quadriques (proprement dites) doublement tangentes à la surface; c'est-à-dire dans l'involution des tangentes aux dix coniques de S qui passent par un point quelconque de cette surface le couple des tangentes aux deux coniques placées dans des plans passant par les droites doubles de la surface est aussi le couple, que nous considérions aussi, des deux droites qui s'appuient sur la conique double: au lieu de 6 éléments d'un groupe on en a seulement plus 5 et on a de cette manière seulement 2 invariants absolus de la surface.

12. Les quadriques doublement tangentes nous donnent une manière de construire la surface S au moyen de faisceaux projectifs de quadriques. En effet dans R_4 l'un quelconque des cônes du faisceau de F_3^2 est le lieu des plans d'intersection des espaces correspondants de deux faisceaux projectifs dont les soutiens sont deux plans générateurs de l'autre système du cône. Or ces espaces coupent φ suivant des quadriques qui seront projetées sur R_3 suivant des quadriques doublement tangentes à S et passant par sa conique double. On trouve ainsi le théorème suivant:

Si dans la surface à conique double S *quelconque on prend deux coniques appartenant à la même série, on peut considérer* S *comme le lieu des coniques d'intersection des surfaces correspondantes de deux faisceaux projectifs de quadriques passant par la conique double et ayant pour soutiens (outre celle-ci) respectivement ces deux coniques.*

---

sup., (2) 1, p. 277; ou bien l'ouvrage cité, p. 281). — Nous pouvons retrouver ici par nos méthodes un autre résultat dû à CLEBSCH. Proposons-nous de chercher le lieu d'un point de S, ou bien de Γ, pour lequel les deux droites doubles de l'involution considérée, c'est-à-dire les deux tangentes en ce point à des quartiques y ayant un point de rebroussement, coïncident. La droite dans laquelle ces deux droites doubles coïncident devra appartenir à chaque couple de l'involution, et comme ces couples se composent des droites d'intersection du plan tangent à Γ dans le point considéré avec les F_3^2 du faisceau, cette droite devra appartenir à ces F_3^2 et en conséquence aussi à Γ. Donc seulement pour les points situés sur les droites de Γ ou de S il arrive que les deux tangentes cuspidales considérées coïncident.

Les ∞^1 coniques qu'on obtient ainsi forment la série conjuguée à celle qui contient celles-ci, et les quadriques des deux faisceaux appartiennent au système correspondant de quadriques doublement tangentes à S *et passant par la conique double* ([37]).

On voit bien quelles légères modifications il faut faire à cet énoncé dans les cas particuliers où S est la projection d'une surface Γ contenue dans un cône quadrique de 2e espèce, cas sur lesquels nous reviendrons d'ailleurs plus tard. Il s'ensuit que *toutes* les surfaces appartenant à la catégorie qui nous occupe peuvent être construites au moyen de deux faisceaux projectifs de quadriques. Et vice-versa deux faisceaux projectifs de quadriques ayant une conique commune donnent toujours lieu par les intersections des quadriques correspondantes à l'une de nos surfaces.

Quadriques inscrites dans la surface. Inversions fondamentales.

13. Le centre de projection P a par rapport aux variétés du faisceau de F_3^2 des espaces polaires qui forment un faisceau dont le soutien est le plan p. Soit f l'une quelconque de ces variétés : l'espace polaire de P par rapport à elle la coupe suivant une quadrique qui coupe Γ suivant la quartique d'intersection de cet espace avec Γ. Dans un point quelconque de cette quartique le plan tangent à la quadrique appartient à l'espace tangent dans le même point à f, espace qui passe par P et dans lequel est aussi le plan tangent dans ce point à Γ: donc ces deux plans sont projetés par P sur R_3 suivant un même plan. C'est-à-dire la projection de cette quadrique est une quadrique touchant la surface à conique double S le long d'une quartique. Cette quadrique et cette quartique passent par les 4 points-pinces de la conique double, puisque dans

---

([37]) La possibilité de construire une surface du 4e ordre à conique double au moyen de deux faisceaux projectifs de quadriques semble avoir été remarquée pour la première fois par M. H. DURRANDE (*Sur les surfaces du quatrième ordre*, Comptes-rendus, 70, 1870, pp. 920—922). Voir aussi le n0 23 du Mémoire de M. STURM : *Ueber Flächen mit einer endlichen Zahl von Geraden*, Math. Ann., IV, pp. 249-283. — Mais il est étrange que l'on n'ait pas encore pensé à déduire de cette construction par les méthodes de la géométrie de position une théorie synthétique complète de cette espèce de surfaces : il nous semble qu'une telle étude n'aurait pas manqué d'intérêt.

R_4 l'espace polaire de P par rapport à f passe par le plan p dont les 4 points d'intersection avec Γ ont pour projections ces points-pinces. — Remarquons aussi que cet espace polaire coupe φ en une quadrique qui est projetée sur R_3 suivant une quadrique passant par la quartique considérée et contenant la conique double. Le pôle du plan de celle-ci par rapport à cette quadrique est la projection du pôle de p par rapport à la première quadrique, c'est-à-dire l'intersection de R_3 avec la droite polaire du plan p par rapport à φ, car cette droite passe par P et contient ce pôle. Or cette droite ne varie pas si f varie dans le faisceau de F_3^2 et elle coupe R_3 dans le point de rencontre des plans singuliers des 4 points-pinces de S (voir à la fin du n⁰ 3). Donc :

A la surface S *sont inscrites* ∞^1 *quadriques, qui la touchent le long de* ∞^1 *quartiques passant par les 4 points-pinces de la conique double, et dont il passe une seule par chaque point de la surface. Ces quartiques appartiennent à* ∞^1 *quadriques passant par la conique double et par rapport auxquelles le plan de celle-ci a pour pôle le point de rencontre des plans tangents singuliers dans les 4 points-pinces de la conique double* (38).

Cette proposition reste quelle que soit l'espèce de la surface S : cependant si la conique double se décompose en deux droites la dernière remarque devient inutile, car il est bien évident que par rapport aux quadriques passant par ces deux droites le plan de celles-ci a pour pôle leur point d'intersection.

Si pour la variété f on prend successivement les différents cônes du faisceau de F_3^2 on trouve de nouveau, comme quadriques inscrites dans S, les différents cônes de KUMMER, dont nous voyons ainsi qu'ils passent par les 4 points-pinces de la conique

(38) Aussi pour cette proposition (dans le cas où la surface S est générale) la première partie est due à CLEBSCH (loc. cit., p. 163) et la deuxième à M. DARBOUX (ouvr. cité, p. 110). On peut encore établir une autre propriété des quadriques inscrites dans S due à ce dernier savant. Considérons une quadrique inscrite dans une quelconque de ces ∞^1 quadriques (celle qui correspond à la variété f dans R_4) : elle sera projetée par P au moyen d'un cône quadrique (à 3 dimensions) qui touchera f tout le long d'une conique (dont la projection est la conique de contact des deux quadriques de R_3), dont le plan sera en conséquence le plan double d'un couple d'espaces passant par l'intersection de ce cône avec f; donc cette intersection se décomposera en deux quadriques coupant Γ suivant deux quartiques. En projetant de nouveau sur R_3 nous avons que : *chaque quadrique inscrite dans l'une quelconque des quadriques inscrites dans la surface* S *coupe cette surface suivant deux quartiques.*

double et que les points de contact avec la surface S forment sur chacun d'eux une quartique appartenant au système considéré.

On peut se demander avec CLEBSCH quel est le lieu des points dans lesquels deux coniques de la surface appartenant aux deux séries d'un même couple se touchent : cela équivaut à se demander quel est le lieu des points de contact de S avec les tangentes simples qu'on peut lui mener par le sommet d'un cône de KUMMER. Or dans R_4 parmi les génératrices de l'un des cônes du faisceau de F_3^2 celles qui touchent Γ la touchent dans les points dans lesquels elle est coupée par l'espace polaire du sommet du cône relativement à tout le faisceau, c'est-à-dire dans les points d'une quartique. On voit donc que dans la surface S le lieu cherché est aussi une quartique.

14. Considérons encore l'espace polaire du sommet d'un cône du faisceau des F_3^2 : cet espace coupe φ suivant une quadrique qui est projetée par P sur R_3 suivant une quadrique passant par la conique double de S et ayant pour pôle du plan de cette conique la projection du sommet considéré ; cette quadrique coupe S suivant la quartique jadis considérée et a une autre propriété importante par rapport à S. Un plan quelconque mené par P et par le sommet du cône coupe φ suivant une conique sur laquelle les deux points d'intersection avec l'espace polaire de ce sommet sont conjugués harmoniquement par rapport aux deux couples des points d'intersection avec les deux génératrices du cône contenues dans ce plan. Comme cette conique est projetée sur R_3 suivant une droite passant par le sommet du cône de KUMMER correspondant au cône F_3^2 considéré nous avons que :

A chaque cône de KUMMER *de* S *correspond une inversion, dans laquelle cette surface* S *se transforme en soi-même : cette inversion a pour quadrique directrice une quadrique passant par la conique double et ayant pour pôle du plan de celle-ci le sommet du cône de* KUMMER *correspondant et a pour centre d'inversion ce sommet même. Sur chaque droite passant par ce sommet les* 4 *points d'intersection avec la surface* S *forment deux couples de points d'une involution dont les points doubles sont les points d'intersection avec cette quadrique* [39].

---

[39] Si le centre de projection P de Γ se trouve sur l'espace polaire du sommet d'un cône du faisceau, la projection de la quadrique d'intersection de cet espace avec φ se réduit à un plan et la surface S a l'inversion fondamentale correspondante réduite à une homologie harmonique ayant ce plan et son pôle par rapport à la conique double pour plan et pour centre de l'homologie (ce point du plan de la conique double est le sommet d'un cône de KUMMER).

Nous appellerons *inversions fondamentales* pour la surface S les inversions qui la transforment en elle-même. Pour la surface générale, soit que sa conique double soit générale, soit qu'elle se décompose en deux droites, il y a donc 5 inversions fondamentales. Mais dans ce dernier cas le raisonnement même que nous avons tenu nous prouve qu'on a les particularités suivantes:

Si la conique double de S *se décompose en deux droites, alors* 4 *des inversions fondamentales ont pour quadriques directrices des cônes contenant ces droites (et ayant en conséquence pour sommet leur point d'intersection) et pour centres d'inversion les sommets des* 4 *cônes de* KUMMER *proprement dits (ces centres ayant encore pour plan polaire relativement aux cônes directeurs correspondants le plan de la conique double); tandis que la cinquième inversion fondamentale a pour quadrique directrice une quadrique générale passant par les droites doubles et pour centre d'inversion le point d'intersection de celles-ci (c'est-à-dire un point de la quadrique directrice).*

Représentation de la surface sur un plan [40].

15. Pour avoir une représentation plane univoque de la surface S il suffit évidemment de faire la représentation sur un plan de la surface Γ dont elle est la projection. La méthode que nous exposerons à présent est générale et sert pour tous les cas: ici nous considérerons avant tout le cas dans lequel Γ soit tout-à-fait générale, de sorte que par sa projection S sur R_3 elle nous donne les surfaces les plus générales du 4e ordre à conique double générale ou décomposée en deux droites.

Cette méthode consiste à projeter Γ par l'une quelconque de ses droites sur un plan R_2. Soit d cette droite: chaque plan passant par d coupe deux F_3^2 quelconques de notre faisceau en deux droites (outre d) qui se coupent en un point de Γ; c'est-à-dire

(40) Tous les résultats que nous trouverons dans ce paragraphe s'accordent parfaitement avec ceux de CLEBSCH: mais nous les obtenons d'une manière évidemment plus générale (à notre point de vue) et plus simple. Que l'on remarque, par exemple, avec quelle facilité on a la représentation de la conique double et les propriétés de cette représentation sans faire aucun usage de fonctions elliptiques (ce qui se rattache d'ailleurs à la méthode connue pour étudier les cubiques planes, qui consiste à les considérer comme projections de quartiques gauches de 1e espèce).

chaque plan par d coupe encore Γ en un point, et il coupe d'ailleurs aussi R_2 en un point. En faisant correspondre entre eux ces deux points nous aurons la représentation plane univoque de Γ et de la surface S. Les 5 droites de Γ qui coupent d seront projetées par autant de plans en 5 points *fondamentaux* de R_2; les autres 10 droites seront projetées par d suivant des droites au moyen d'espaces dont chacun, contenant deux droites de Γ qui ne se coupent pas, contiendra encore 2 autres droites de Γ coupant celles-ci: donc les projections des 10 droites considérées de Γ sont les droites qui joignent deux-à-deux les 5 points fondamentaux de R_2. Quant à la droite d même sa projection sur R_2, ou, pour mieux dire, la projection de l'ensemble de ses points infiniment voisins sur Γ, sera une courbe passant par les 5 points fondamentaux et dont l'ordre est le nombre des points de Γ infiniment voisins à d situés dans un espace passant par d: or comme un tel espace coupe Γ suivant une quartique de 1e espèce décomposée en cette droite et en une cubique qui la coupe en deux points, il y a dans cette intersection deux de ces points infiniment voisins à d. Donc l'image de d dans R_2 est la conique qui passe par les 5 points fondamentaux. De même *pour la surface* S *une droite aura dans le plan* R_2 *pour image cette conique, les* 5 *droites qui la coupent auront pour images les* 5 *points fondamentaux, et les autres* 10 *droites auront pour images les droites qui joignent ces points fondamentaux deux-à-deux.*

16. Nous avons déjà remarqué que les espaces passant par d coupent Γ suivant les ∞^2 cubiques d'un système. Donc dans notre représentation *aux droites du plan correspondent dans la surface* S (ou Γ) *les* ∞^2 *cubiques d'un système.*

Un espace quelconque coupe Γ dans une quartique qui rencontre en un point d et chacune des 5 droites appuyées sur d; donc *aux* ∞^4 *quartiques de* 1e *espèce de la surface* S *correspondent sur le plan les* ∞^4 *cubiques passant par les* 5 *points fondamentaux.* Cela s'accorde avec le fait que l'espace contenant une quartique quelconque de Γ (et cette quartique même en conséquence) coupe chaque cubique en 3 points.

Parmi les espaces de R_4 ceux qui passent par le point P coupent Γ suivant les quartiques qui correspondent aux sections planes de S, et ce système de ∞^3 quartiques sur Γ est tel que par 3 points quelconques de Γ il en passe une bien déterminée; donc *parmi les* ∞^4 *cubiques de* R_2 *passant par les* 5 *points fondamentaux il y en a une série linéaire de* ∞^3 *qui sont les images des sections planes de* S.

Les coniques de Γ sont projetées par d sur R_2 suivant des coniques si elles ne coupent pas d, suivant des droites si elles coupent d. Or pour l'un quelconque des cônes du faisceau de $F_3^2 d$ forme avec l'une des 5 droites qui la coupent une conique appartenant à un plan générateur du cône : les coniques appartenant aux autres plans générateurs de la même série ne coupent pas ces deux droites, tandis que celles-ci sont coupées par les coniques appartenant aux plans générateurs de l'autre série. En remarquant en outre que ces coniques-ci ne coupent pas les 4 autres droites appuyées sur d, tandis que celles-là les coupent nous concluons que : *à chaque couple de séries de coniques de la surface* S *correspondent dans* R_2 *respectivement les coniques passant par* 4 *des* 5 *points fondamentaux et les droites passant par le cinquième.*

Ajoutons que si la conique double de S se décompose en deux droites les coniques dans lesquelles S est coupée par les plans qui passent par l'une ou l'autre de ces droites forment l'un des 5 couples de séries de coniques, de sorte qu'aux coniques placées dans les plans qui passent par une droite double correspondent les droites qui passent par un certain parmi les 5 points fondamentaux et aux coniques des plans qui passent par l'autre droite double correspondent dans R_2 les coniques qui passent par les 4 autres points fondamentaux.

Nous avons vu que les cubiques de Γ appartenant au système qui correspond à d ont pour images les droites de R_2. Les cubiques du système, qui correspond à l'une des 5 droites coupant d, ne coupent en aucun point d et coupent en un point les autres 4 de ces 5 droites (n^0 8), et sont en conséquence projetées sur R_2 par d suivant des cubiques ayant un point double dans l'un des 5 points fondamentaux et passant par les 4 autres. Enfin les cubiques du système qui correspond à l'une quelconque des autres 10 droites de Γ ne coupent pas les deux droites appuyées sur celle-ci et sur d, mais coupent d et les autres 3 droites appuyées sur d : donc elles sont projetées sur R_2 suivant des coniques passant par 3 points fondamentaux. On a donc ainsi les images de toutes les cubiques appartenant à Γ, c'est-à-dire de toutes les cubiques appartenant à la surface S.

17. Mais passons à étudier l'image de la conique double de S. Supposons avant tout que cette conique ne se décompose pas. Alors la conique double est, comme nous avons vu, la projection faite par le point P de la quartique k^4 d'intersection de Γ avec

l'espace π tangent en P à la variété quadratique φ. Donc en se rappelant ce que nous avons trouvé pour images des quartiques de Γ appartenant à des espaces passant par P dans le plan R_2 : *l'image de la conique double de* S *est une cubique passant par les* 5 *points fondamentaux et appartenant à la série linéaire des* ∞^3 *cubiques images des sections planes de* S. — Les couples de points de k^4 qui correspondent aux points de la conique double (sur deux nappes) sont en ligne droite avec P: si donc P' est le point d'intersection de R_2 avec le plan dP, point qui sera l'image de l'autre point d'intersection avec k^4 de la droite qui joint P au point $d\pi$, nous aurons que : *sur la cubique de* R_2 *qui est l'image de la conique double de* S *deux points, qui soient les images d'un même point de cette conique double dans les deux nappes qui y passent, sont en ligne droite avec un point fixe* P′ *de la cubique, point qui est l'image du point d'intersection de la droite correspondant à* d *avec la conique double mais considéré dans la nappe de* S *qui ne passe pas par cette droite.*

Deux couples de points de k^4 alignés avec P sont dans un plan passant par P et par lequel passe un faisceau d'espaces coupant Γ suivant un système de quartiques projetées par P suivant des quartiques planes de S et par d suivant des cubiques de R_2. Donc : *deux couples de points de la cubique image de la conique double alignés avec* P′ *forment avec les* 5 *points fondamentaux un système de* 9 *points d'intersection d'un faisceau de cubiques appartenant au système linéaire des* ∞^3 *cubiques images des sections planes de* S.

Aux 4 points d'intersection de k^4 avec p correspondent les 4 points-pinces de la conique double ; donc : *les* 4 *tangentes menées par le point* P′ *à la cubique image de la conique double la touchent dans les* 4 *points images des points-pinces de la conique double.* Etc. etc.

Supposons maintenant que la conique double se décompose en deux droites d_1, d_2, de manière que, comme nous avons vu, l'un des cinq points fondamentaux, 1, soit le centre d'un faisceau de droites images des coniques de la surface S situées dans les plans qui passent par l'une d_1 des droites doubles, tandis que les coniques passant par les quatre autres points fondamentaux 2, 3, 4, 5 seront les images des coniques de S situées dans les plans par d_2. Nous avons vu que d_1, d_2 sont les projections par P des deux coniques k_1^2, k_2^2 dans lesquelles se décompose dans ce cas la quartique k^4. Or la droite d de Γ coupe dans nos hypothèses k_2^2 et ne coupe pas k_1^2. Donc la projection de k_2^2 sur R_2 est une certaine droite r_2 passant par le point 1 et la projection de k_1^2 est une conique c_1 par 2, 3, 4, 5. Les couples de points de k_2^2 ou de k_1^2 alignés avec P ont pour projections sur R_2 des couples de points de r_2 et de c_1 formant deux involutions dont la dernière a le pôle sur r_2, puisque ces involutions ont commun un couple qui correspond aux deux points (alignés avec P) d'intersection de k_1^2 et k_2^2. Donc: *l'image de la droite double* d_2 *de* S *est une certaine droite* r_2 *passant par le point fondamental* 1 *et celle de la droite double* d_1 *est une conique* c_1 *passant par les quatre autres points fondamentaux: à chaque point de* d_1 *ou de* d_2 *correspondent deux points conjugués dans une involution sur* c_1 *ou sur* r_2 *et ces deux involutions contiennent le couple des points d'intersection de* c_1 *et* r_2, *couple qui correspond au point d'intersection des deux droites doubles* d_1 *et* d_2; *les points doubles de ces deux involutions sur* c_1 *et sur* r_2 *correspondent aux points-pinces de* d_1 *et de* d_2.

18. En supposant que le plan R_2 soit dans l'espace R_3 on voit en projetant la construction, par laquelle nous obtenions la représentation plane de Γ et en conséquence de S, par le point P sur R_3 qu'on peut obtenir cette représentation plane de S sans sortir du R_3 qui la contient en faisant correspondre un point de cette surface S et un point du plan représentatif R_2 lorsque la droite qui les joint coupe la conique double et une droite fixe (la projection de d) de la surface; ou, dans le cas où cette conique se décompose en deux droites, lorsque la droite qui joint ces deux points coupe l'une des deux droites doubles et une droite fixe de la surface qui ne s'appuie pas sur cette droite double [41]. Cependant il y a des cas particuliers de nos surfaces dans lesquels cette méthode n'est plus applicable (par exemple pour la représentation de la surface de Steiner), tandis que notre méthode s'applique toujours.

Cyclides et leurs séries homofocales. Sphères directrices et quadriques déférentes [42].

19. Supposons que la variété φ qui passe par le centre de projection P ne soit pas un cône, c'est-à-dire que la conique double de la surface S ne se décompose pas en deux droites. Alors dans l'espa-

---

[41] V. Clebsch, *Ueber die Abbildung algebraischer Flächen*, Math. Ann., I, p. 256.

[42] Presque tous les résultats que l'on trouvera dans ce paragraphe étaient déjà contenus dans les travaux cités, et réunis surtout dans l'ouvra-

ce R_3 nous prendrons cette conique pour *absolu euclidien*, et nous appellerons *cyclide* cette surface S, *sphère* chaque quadrique passant par cette conique, *plan à l'infini* le plan de celle-ci, etc. etc. Nous pourrons alors énoncer plus simplement plusieurs des résultats obtenus. Ainsi la cyclide S contiendra en général 5 couples de séries conjuguées de cercles, et à chaque couple correspondra un système de ∞^2 sphères doublement tangentes à la surface et coupant celle-ci suivant deux cercles. Il y aura ∞^1 quadriques inscrites dans S, parmi lesquelles les 5 cônes de KUMMER, et toutes ces surfaces seront homocycliques, car elles couperont l'absolu dans ses 4 points-pinces relatifs à S: les quartiques de contact de ces ∞^1 quadriques avec S appartiendront respectivement à ∞^1 sphères ayant pour centre commun le point de rencontre des plans tangents singuliers de ces points-pinces. Il y aura en général 5 inversions ordinaires par rapport auxquelles la cyclide correspond à soi-même et les centres (des sphères directrices) de ces inversions seront les sommets des 5 cônes de KUMMER. Etc. etc.

Les sphères de R_3 pourront être considérées comme les projections faites par P des sections de φ déterminées par les espaces de R_4. Le centre d'une sphère est la projection du pôle de l'espace correspondant par rapport à φ. Deux sphères sont *orthogonales*, c'est-à-dire conjuguées harmoniquement relativement aux deux sphères nulles (cônes) de leur faisceau, lorsque les deux espaces correspondants seront conjugués par rapport à φ, c'est-à-dire lorsque l'un de ces espaces contiendra le pôle de l'autre.

Or les sommets des cônes quadriques passant par Γ sont conjugués deux-à-deux par rapport à φ, de sorte que l'espace polaire de chacun d'eux passe par tous les autres ; d'ailleurs cet espace coupe φ en une quadrique dont la projection est (n^0 14) une *sphère directrice* de la cyclide S (c'est-à-dire d'une inversion fondamentale pour S). Donc: *Les sphères directrices de* S *sont deux-à-deux orthogonales entre elles.*

De plus les sphères doublement tangentes d'un système étant la projection des intersections de φ avec les espaces passant par le sommet de l'un de ces cônes et tangents à ce cône, espaces qui seront en conséquence conjugués à l'espace polaire de ce sommet par

---

ge de M. DARBOUX et dans le Mémoire de M. CASEY. Mais on verra encore ici la bonté de notre méthode, qui nous fera retrouver en peu de pages presque toute la théorie exposée dans ces travaux.

rapport à φ, nous avons que: *les ∞^2 sphères doublement tangentes à la cyclide appartenant à un même système sont orthogonales à la sphère directrice correspondante.*

Le lieu des pôles de ces espaces tangents au cône par rapport à φ est une quadrique (la quadrique polaire du cône par rapport à φ), dont la projection est le lieu des centres des sphères considérées. Donc: *Le lieu des centres des sphères doublement tangentes à la cyclide appartenant à un même système est une quadrique.* On a ainsi pour la cyclide générale 5 quadriques qu'on appelle *déférentes*; en d'autres termes: *La cyclide générale peut être considérée de 5 manières diverses comme l'enveloppe des ∞^2 sphères orthogonales à une sphère fixe (directrice) et ayant les centres sur une quadrique fixe (déférente).*

20. Passons maintenant aux *cyclides homofocales.* Si l'on prend les variétés polaires des F_3^2 d'un faisceau contenant φ par rapport à φ même on aura un *système* de ∞^1 F_3^2 ayant pour espaces tangents communs une série d'espaces doublement infinie et de la 4e classe, que nous indiquerons par Δ et qui se compose des espaces tangents à φ dans les points de la base du faisceau. Toutes les propriétés de ce système de F_3^2 s'obtiennent de celles connues du faisceau. Ainsi le lieu des pôles d'un espace quelconque par rapport à ce système de variétés est une droite. Il y a en général dans le système une seule variété qui touche un espace donné, mais 4 qui passent par un point donné. Il y a dans le cas le plus général 5 variétés du système se réduisant comme lieux de points à 5 espaces doubles et comme enveloppes d'espaces tangents à 5 quadriques situées dans ces espaces (corrélatif aux 5 cônes de 1e espèce d'un faisceau général); cependant il peut arriver que quelques-unes de ces variétés coïncident, ou bien qu'il y ait aussi une ou deux coniques dans le système (corrélatif aux cônes de 2e espèce qui peuvent se présenter dans un faisceau). Etc.

Les variétés du système coupent φ en ∞^1 surfaces $F_2^{2.2}$, parmi lesquelles est la base du faisceau de F_3^2 dont ce système est le système polaire [43]. Ces surfaces sont projetées par P sur R_3 suivant

[43] Voir à ce propos le dernier paragraphe de notre Mémoire cité au n⁰ 1, où nous avons étudié un système analogue de ∞^1 $F_{n-2}^{2.2}$ sur une F_{n-1}^2 du R_n. La démonstration directe du fait qu'un tel système peut être obtenu de ∞^1 manières différentes comme l'intersection de cette F_{n-1}^2 avec le système des F_{n-1}^2 polaires par rapport à elle de celles d'un faisceau ayant pour base l'une quelcon-

un système de cyclides dont nous allons étudier les propriétés. Chacun des ∞^2 espaces de Δ touche les variétés du système (parmi lesquelles il y a φ) dans les points d'une droite et les ∞^2 droites que l'on a ainsi forment une *variété développable* (circonscrite au système des variétés quadratiques) que nous indiquerons aussi par Δ. On reconnait immédiatement (par exemple au moyen du principe de correspondance sur une droite quelconque de R_4) que cette variété est dans le cas le plus général de l'ordre 12 et on voit en outre qu'elle touche chacune des variétés quadratiques du système, par exemple φ, suivant la $F_2^{2.2}$ d'intersection avec la variété infiniment voisine dans le système, et la coupe en outre suivant une surface qui dans le cas le plus général est de l'ordre $2.12 - 2.4 = 16$ et qui se compose évidemment de ∞^1 droites. Considérons l'une quelconque de ces droites: elle est le lieu des points de contact des variétés du système avec un certain espace; donc la surface d'intersection de φ avec la variété qui a un point quelconque de cette droite pour point de contact a pour plan tangent en ce point le plan d'intersection de l'espace tangent en ce point à φ avec l'espace considéré (tangent dans le même point à cette variété), espace qui est tangent à φ, comme nous l'avons dit, en un autre point de cette droite: ce plan est donc le plan tangent à φ tout le long de cette droite. Donc pour chacune des ∞^1 droites d'intersection de la variété Δ avec φ il y a un même plan tangent aux surfaces d'intersection de φ avec les variétés du système dans les points de contact de ces surfaces avec cette droite. Mais les plans qui touchent φ le long d'une droite sont projetés par P sur R_3 suivant des plans tangents à l'absolu, car un tel plan coupe l'espace π suivant une droite tangente au cône $\pi\varphi$ dans le point dans lequel la droite de contact coupe π. Donc nous concluons que le système des cyclides qui sont les projections des intersections de φ avec le système considéré de variétés quadratiques est un système de surfaces *homofocales*, c'est-à-dire inscrites dans une même développable avec l'absolu: chaque plan de cette développable touche l'absolu et le système des cyclides dans les points d'une droite. Dans le cas le plus général l'ordre de la surface lieu de ces droites (projection de la série de ∞^1 droites d'intersection de φ avec la variété Δ), c'est-à-dire l'ordre de la développable *focale*, est 16.

---

que de ces $F_{n-2}^{2.2}$ a été donnée plus tard pour l'espace ordinaire dans notre Note *Su una trasformazione irrazionale dello spazio*, ecc. (Giornale di matem., XXI [Vedi questo vol., p. 234]) par une méthode qui s'étend immédiatement au cas de n quelconque.

Dans R_4 la surface réglée d'intersection de φ avec la variété Δ touche l'une quelconque des variétés quadratiques du système dans les points qu'elle a communs avec la variété du système qui lui est infiniment voisine et avec φ, points qui forment une courbe de l'ordre 8, et ne peut encore couper la variété même que dans des droites, dont le nombre sera en général $2 . 16 - 2 . 8 = 16$. Donc *la développable focale circonscrite à un système de cyclides homofocales coupe chacune de celles-ci dans ses* 16 *droites, c'est-à-dire elle est le lieu des droites contenues dans ces cyclides.*

21. La variété développable Δ circonscrite au système des F_3^2 a les quadriques appartenant à ce système pour quadriques *doubles*, c'est-à-dire par chaque point d'une telle quadrique passent deux génératrices de cette variété; car par le plan tangent en ce point à la quadrique passent deux espaces tangents à une autre variété du système et en conséquence à toutes. Si par exception il y a parmi les F_3^2 du système une qui se réduise comme enveloppe d'espaces à une conique, alors celle-ci est aussi *double* pour Δ, mais dans cet autre sens que par chacun de ses points passent ∞^1 génératrices de Δ, lesquelles forment un cône quadrique ordinaire (comme on voit de la même manière). Chaque quadrique double coupe la variété φ suivant une quartique dont la projection sur R_3 sera une quartique située sur une sphère directrice et double pour la développable focale du système de cyclides, c'est-à-dire une courbe dans chaque point de laquelle se croisent deux génératrices de cette développable: nous l'appellerons *quartique focale* des différentes cyclides. S'il y a aussi dans la variété développable une conique double, elle coupera φ suivant 4 points (dont quelques-uns peuvent coïncider et) dont les projections sur R_3 seront 4 points d'un cercle (*directeur*) tels que par chacun d'eux passent ∞^1 génératrices de la développable focale formant le cône quadrique qui par ce point projette l'absolu, c'est-à-dire la développable se décomposera en 4 cônes quadriques et en une autre développable; nous appellerons ces 4 points *foyers* des différentes cyclides [44]. — Dans le cas le

---

(44) *Foyer* sera donc pour nous un point tel que la sphère nulle dont il est le centre soit tangente à la surface le long d'une courbe; tandis que M. Darboux et d'autres savants appellent *foyer* le centre d'une sphère nulle ayant seulement deux points de contact avec la surface, c'est-à-dire un point quelconque des *courbes focales* de la surface.

plus général une cyclide (et toutes celles du système homofocal qui la contient) a 5 quartiques focales et n'a pas de foyers : cependant il y a, comme nous verrons, des cyclides particulières pour lesquelles ces quartiques focales coïncident ou pour lesquelles il y a un ou deux quaternes de foyers.

Les quadriques appartenant à notre système de F_3^2 (doubles pour Δ) sont les surfaces polaires des cônes quadriques passant par l'une (quelconque) de nos $F_2^{2.2}$, et ont en conséquence pour projections les quadriques déférentes de la cyclide projection de celle-ci (n^0 19). Donc en se rappelant en outre ce que nous avons vu jadis et au commencement du n^0 20 on a que :

Toutes les cyclides d'un système homofocal ont les mêmes sphères directrices, formant elles-mêmes (comptées deux fois) des cyclides du système : chaque quartique focale est l'intersection de l'une de ces sphères avec les quadriques déférentes correspondantes pour les cyclides du système, de sorte que toutes ces quadriques déférentes forment un faisceau.

22. Les quadriques polaires des cônes quadriques passant par Γ appartiennent, comme nous avons vu, à un système de variétés quadratiques inscrites dans la même variété développable Δ avec φ, c'est-à-dire dans la variété enveloppée par les espaces tangents à φ dans les points de Γ : par le point P passe une série de la 4e classe de ∞^1 de ces espaces et les espaces qui la composent sont tangents à toutes les variétés de ce système et en conséquence aussi aux quadriques, touchent φ dans les points d'intersection de Γ avec l'espace π et ils touchent en conséquence la quartique k^4. Or comme les projections de ces quadriques polaires faites par P sont les quadriques déférentes de la cyclide projection de Γ nous aurons que : *les quadriques déférentes d'une même cyclide sont homofocales, étant inscrites dans une même développable avec l'absolu, c'est-à-dire dans la développable des plans tangents à la cyclide dans les points de l'absolu* ([45]).

On peut aussi établir une autre propriété des quadriques déférentes. Dans R_4 sur l'espace polaire du sommet de l'un des cônes passant par Γ sont les sommets des autres 4 cônes, lesquels sont

([45]) En conséquence les coniques focales communes aux quadriques déférentes sont des courbes focales *singulières* ou *doubles* pour la cyclide. (V. CASEY, loc. cit., p. 635 ; et DARBOUX, loc. cit., p. 152).

conjugués deux-à-deux par rapport à toutes les variétés du faisceau, et en conséquence aussi par rapport à φ, c'est-à-dire à l'intersection de φ avec cet espace, et par rapport au premier cône et à sa quadrique polaire relativement à φ. Donc en projetant sur R_3: *Les centres de 4 quelconques des sphères directrices d'une cyclide générale forment un tétraèdre conjugué par rapport à la cinquième sphère directrice et à sa quadrique déférente.* — On voit bien quelles modifications on devra apporter à ce théorème lorsque la cyclide n'est plus générale, de sorte qu'il n'y a plus 5 sphères directrices (et quadriques déférentes) distinctes. Ce même théorème résulterait d'ailleurs aussi du fait que ces 4 centres de sphères directrices sont les sommets des cônes quadriques passant par la quartique intersection de la cinquième sphère et de sa quadrique déférente, puisqu'une inversion déterminée par l'une des 4 premières sphères doit changer en elle-même cette quartique focale (46).

---

(46) Pour montrer encore par un exemple comment notre méthode nous permet de résoudre toutes les questions que l'on peut poser sur les cyclides proposons-nous de déterminer le lieu des centres des sphères qui coupent la cyclide projection de la surface Γ de φ, non pas en une quartique quelconque (outre l'absolu) mais en une conique sphérique. L'espace τ coupant φ dans une quadrique dont la projection soit une telle sphère devra être tel que la projection du sommet de l'un des cônes quadriques ordinaires qui passent par la quartique $\Gamma\tau$, c'est-à-dire de l'un T des (4) points de contact de τ avec une variété du faisceau (Γ), soit le centre de cette sphère, c'est-à-dire coïncide avec la projection du pôle T' de τ par rapport à φ : en d'autres termes il faut que les trois points PTT' soient en ligne droite. Donc les espaces polaires de ces 3 points par rapport à φ appartiendront à un faisceau, c'est-à-dire l'espace polaire de T par rapport à φ passe par le plan $\pi\tau$. Or l'espace polaire (tangent) de T par rapport à une autre variété du faisceau (Γ) est par hypothèse τ, donc π est aussi l'espace polaire de T par rapport à une variété de ce faisceau, de sorte que T est un point de la courbe quartique normale qui est le lieu des pôles de l'espace π par rapport à toutes les variétés du faisceau et dont la projection sur R_3 est une cubique gauche dont nous avons déjà vu plusieurs propriétés (v. n° 6). Donc en se rappelant aussi ces propriétés nous voyons que : *le lieu des centres des sphères coupant la cyclide suivant des coniques sphériques est une cubique gauche qui passe par les centres des sphères directrices, par le centre et par les points à l'infini des axes des quadriques déférentes*, etc. (V. Darboux, loc. cit., p. 168, ou bien le *Mémoire sur les surfaces cyclides* déjà cité, p. 281).

Nous pouvons aussi trouver une propriété remarquable et que nous croyons nouvelle, commune aux cordes de cette cubique. Nous avons vu en effet au n° 6 que ces cordes sont les intersections de R_3 avec les plans polaires (par rapport à Γ) des points du plan polaire de P. Que l'on considère l'un quelconque de ces points et son plan polaire : l'espace qui les joint coupera Γ suivant une quar-

23. Revenons à notre système de variétés quadratiques inscrites dans la même variété développable. Par chaque point de R_4 il en passe en général 4 dont les espaces tangents en ce point sont conjugués par rapport à toutes les variétés du système. En particulier donc par un point de φ il passe 3 des $F_2^{2.2}$ d'intersection de φ avec les variétés du système et leurs plans tangents, qui appartiennent à l'espace tangent en ce point à φ, seront conjugués par rapport à φ, c'est-à-dire au cône quadrique d'intersection de cet espace avec φ. Donc en projetant sur R_3 : *Par chaque point de l'espace il passe 3 cyclides d'un système homofocal et leurs plans tangents en ce point sont deux-à-deux orthogonaux.*

De là il suivrait, à cause du théorème de DUPIN, que *chaque cyclide d'un système homofocal est coupée par les autres suivant ses lignes de courbure.* Mais nous n'avons pas même besoin de recourir à ce théorème pour prouver cette proposition. Car, si f, f', f'' sont les autres variétés quadratiques du système qui dans R_4 passent par un point de φ, il suit de ce que nous avons dit que le plan tangent en ce point à la surface $f\varphi$ est coupé par les plans tangents au même point aux surfaces $f'\varphi, f''\varphi$ en deux droites conjuguées par rapport à f et à φ, et en conséquence aussi par rapport aux autres variétés quadratiques du faisceau. Les projections de ces deux droites seront (comme nous avons déjà eu l'occasion de le remarquer au n^0 11) deux droites tangentes en un point à la cyclide projection de $f\varphi$ et conjuguées harmoniques soit par rapport aux tangentes principales, soit par rapport aux tangentes qui coupent l'absolu, c'est-à-dire orthogonales. Donc ces deux droites seront les tangentes aux deux lignes de courbure de cette cyclide qui passent par ce point. Mais elles sont aussi les tangentes en ce point aux deux courbes d'intersection de cette cyclide avec les deux cyclides homofocales qui y passent (projections de $f'\varphi, f''\varphi$) : donc notre

---

tique par rapport à laquelle ce point et ce plan sont pôle et polaire. Donc la projection de cette quartique par P, qui est un point de ce plan, sera une quartique plane homologique harmonique par rapport à la projection du pôle et à la droite d'intersection de R_3 avec le plan polaire comme centre et axe d'homologie. Ou en d'autres termes : *il y a sur chaque cyclide ∞^2 sections planes symétriques par rapport à un axe, et les ∞^2 axes de symétrie que l'on obtient ainsi sont les cordes de notre cubique.* (Il est d'ailleurs facile de voir qu'il n'y a pas d'autres sections planes symétriques et que celles-ci sont produites par des plans, enveloppant en général une surface de la 12e classe et appartenant à un complexe de 12e degré de sphères coupant la cyclide suivant des courbes ayant un plan de symétrie).

proposition est prouvée. — En particulier chaque cyclide du système est coupée suivant une ligne de courbure par toutes les sphères directrices.

Remarquons pour finir que par le centre de projection P passeront aussi en général trois des $F_2^{2.2}$ d'intersection de φ avec les variétés du système. Les projections de ces trois $F_2^{2.2}$ sur R_3 seront des cyclides cubiques (47). Comme les cônes quadriques passant

(47) De ces espèces de cyclides, c'est-à-dire en général des surfaces du 4e ordre à conique double décomposées en surfaces cubiques avec le plan de celle-ci nous ne nous occuperons jamais, pour plus de brièveté. Nous supposerons donc toujours que le centre de projection des $F_2^{2.2}$ que nous considérons ne soit pas sur celles-ci.

Cependant la méthode d'étudier les surfaces cubiques qui consisterait à les considérer comme projections sur R_3 des $F_2^{2.2}$ de R_4 faites par un point de celles-ci présenterait plusieurs avantages dignes de remarque. Ainsi la représentation plane, que nous avons donnée aux nos 15 et suiv., de la $F_2^{2.2}$ générale donnerait immédiatement la représentation plane connue, à six points fondamentaux, de la surface cubique. La classification que nous ferons des $F_2^{2.2}$ donnerait immédiatement, en prenant le centre de projection en des positions différentes sur ces surfaces, la classification *complète* des surfaces cubiques; par exemple pour la $F_2^{2.2}$ générale, suivant qu'on prendrait le centre de projection dans l'un quelconque de ses points, ou bien sur l'une de ses droites, ou sur un point commun à deux de ses droites, on obtiendrait pour projection la surface cubique générale ou bien celles à un ou à deux points coniques (espèces I, II et IV dans la classification de M. SCHLÄFLI). L'étude, que nous avons faite dans le cas général et que nous ferons dans les cas particuliers, de la disposition des droites contenues dans la $F_2^{2.2}$ nous donnerait la disposition des droites contenues dans les différentes surfaces cubiques. Notre méthode serait féconde particulièrement dans ces propriétés des surfaces cubiques qui ont égard à une droite déterminée de la surface. Nous donnerons quelques exemples de telles propriétés déduites de cette manière, en nous bornant cependant aux surfaces cubiques générales.

Soit donc Γ la $F_2^{2.2}$ générale et S la surface cubique générale qui en est la projection, faite par un point quelconque P de Γ. Il est clair qu'outre les projections des 16 droites de Γ, S ne contiendra d'autres droites que l'intersection d du plan p tangent en P à Γ avec R_3 et les intersections de R_3 avec les 5 couples de plans générateurs passant par P des 5 cônes du faisceau (Γ). La surface S a donc $16+1+10=27$ droites. De plus les 10 dernières (projections des coniques de Γ placées dans ces 10 plans générateurs) se trouvent par couples dans 5 plans passant par d, c'est-à-dire dans les plans d'intersection de R_3 avec les espaces tangents en P aux 5 cônes nommés, car ces espaces (qui passent tous par p) contiennent justement les 5 couples de plans générateurs de ces cônes qui passent par P. Les sommets M_i de ces cônes auront pour projections les 5 points C_i d'intersection des 5 couples de droites de S situées dans des plans passant par d: or ces 5 points C_i jouissent par rapport à la surface cubique S de propar l'une de ces $F_2^{2.2}$, et en conséquence par P, ont leurs quadriques polaires par rapport à φ tangentes à π, les projections de celles-ci sur R_3 seront tangentes au plan à l'infini, c'est-à-dire: *Dans un système de cyclides homofocales il y a en général 3 cyclides cubiques. Les quadriques déférentes d'une cyclide cubique sont toutes des paraboloïdes.* Etc. etc.

Classification des surfaces du 4e ordre à conique double.

24. Une $F_2^{2.2}$ quelconque de R_4 a une *caractéristique* qui en donne les particularités projectives les plus importantes et qui se compose des degrés des diviseurs élémentaires du déterminant d'une

---

priétés très-remarquables, qui se déduisent facilement de celles des points M_i. Un espace quelconque passant par p coupe Γ en une quartique ayant un point double en P et projetée suivant une conique d'intersection de S avec un plan quelconque passant par d. Le cône ordinaire projetant cette quartique par P est l'intersection de l'espace considéré avec l'une des variétés du faisceau (Γ). Or les 5 points M_i forment un système polaire de soi-même par rapport à chacune de ces variétés: donc l'espace considéré est coupé par la droite $M_i M_k$ et par le plan $M_l M_m M_n$ (où $iklmn$ sont les 5 indices différents dans un ordre quelconque) en un point et une droite qui sont conjugués par rapport au dit cône quadrique ordinaire. En projetant: *Les 5 points* $\mathrm{C_i}$ *de la surface cubique* S *sont tels que dans chaque plan passant par la droite* d *les intersections avec la droite joignant deux quelconques de ces points et avec le plan joignant les trois autres sont pôle et polaire par rapport à la conique d'intersection avec* S. Cette proposition est due, comme l'on sait, à M. PICQUET (Voir aussi STURM: *Zur Theorie der Flächen dritter Ordnung,* Crelle's J., 88).

L'espace passant par $M_k M_l M_m M_n$ coupe Γ en une quartique, située dans des cônes ayant ces points pour sommets, et le long de laquelle Γ est touchée par des tangentes passant par M_i. Donc: *Les cônes circonscrits à la surface cubique par les* 5 *points* $\mathrm{C_i}$ *la touchent respectivement le long de* 5 *quartiques* $\mathrm{c_i^4}$ *dont chacune appartient à des cônes quadriques ayant les sommets dans les* 4 *points non correspondants parmi les* 5 $\mathrm{C_i}$. — Un espace quelconque est coupé par les 5 espaces joignant quatre-à-quatre les 5 points M_i suivant 5 plans qui déterminent un pentaèdre *conjugué* par rapport à chacune des quadriques d'intersection de ce premier espace avec l'une quelconque des variétés du faisceau (Γ) (en entendant par pentaèdre *conjugué* par rapport à une quadrique un pentaèdre tel que chacun des 10 sommets ait le plan polaire par rapport à celle-ci passant par l'arête opposée). De là on a en projetant sur R_3: *Une quelconque des* ∞^4 *quartiques (de* 1e *espèce) de la surface cubique* S *qui correspondent à la droite* d *(c'est-à-dire qui ne la coupent pas) coupe les* 5 *quartiques particulières* $\mathrm{c_i^4}$ *en* 5 *quaternes de points situés respectivement en* 5 *plans qui déterminent un pentaèdre conjugué par rapport à toutes les quadriques passant par la quartique considérée. (En variant cette quartique ce pentaèdre change aussi, mais ses* 10 *sommets sont toujours sur les* 10 *droites* $\mathrm{C_i C_k}$). — Cette proposition remarquable parait être nouvelle.

F_3^2 indéterminée du faisceau des variétés quadratiques passant par cette surface (en supposant avant tout que ce déterminant ne soit pas identiquement nul). Ces diviseurs élémentaires correspondent aux cônes de ce faisceau ; la somme de leurs degrés est égale à 5. A un cône de 1e espèce correspond un seul diviseur élémentaire et en conséquence un seul degré de la caractéristique, tandis qu'à un cône de 2e espèce correspondent deux diviseurs élémentaires et deux degrés que nous mettrons entre crochets ([48]). En projetant cette $F_2^{2.2}$ sur R_3 par un point P on obtient une surface du 4e ordre à conique double, à laquelle nous donnerons la même caractéristique : seulement si la variété φ du faisceau qui passe par P est un cône de 1e ou de 2e espèce nous mettrons une barre horizontale au-dessus du degré ou du couple de degrés qui correspond à ce cône dans la caractéristique ([49]). De cette manière, p. e., la caractéristique $[1\ 1\ 1\ 1\ 1]$ appartiendra à la surface à conique double la plus générale, et $[\overline{1}\ 1\ 1\ 1\ 1]$ à la surface générale parmi celles dont la conique double se décompose en deux droites. Chaque espèce de $F_2^{2.2}$ nous donne différentes espèces de nos surfaces à conique double suivant la position que l'on donne au centre P de projection, et en particulier suivant que la variété φ passant par P n'est pas un cône, ou bien est tel ou tel autre des cônes du faisceau. Une surface quelconque ne change pas d'espèce lorsqu'on la transforme par une inversion, dont la quadrique directrice est coupée suivant la conique double de la surface donnée par le plan polaire du centre de l'inversion par rapport à elle (car une $F_2^{2.2}$ ne change pas d'espèce par une homologie harmonique).

25. Si φ n'est pas un cône, la projection de la $F_2^{2.2}$ par P peut être considérée comme une cyclide et on peut parler de ses focales, de ses foyers et de son système homofocal. On voit immédiatement que les cyclides d'un système homofocal ont la même caractéristique. Quant aux quartiques focales et aux foyers, comme chaque quartique est l'intersection d'un faisceau de quadriques, parmi

---

([48]) Nous exclurons toujours de notre considération les cas dans lesquels la surface du 4e ordre se décompose en deux quadriques ; en conséquence dans le faisceau des F_3^2 il ne pourra pas y avoir de couple d'espaces.

([49]) Avec cette notation les surfaces étudiées par KORNDÖRFER (ayant égard surtout à leur représentation plane) sont les suivantes : $[2\ 1\ 1\ 1]$, $[2\ 2\ 1]$, $[(1\ 1)\ 1\ 1\ 1]$ $[(1\ 1)\ 2\ 1]$, $[(1\ 1)\ (1\ 1)\ 1]$; $[\overline{1}\ 1\ 1\ 1\ 1]$, $[\overline{1}\ 2\ 1\ 1]$, $[\overline{1}\ 2\ 2]$, $[\overline{1}\ (1\ 1)\ 1\ 1]$, $[\overline{1}\ (1\ 1)\ 2]$, $[\overline{1}\ (1\ 1)\ (1\ 1)]$; $[\overline{(1\ 1)}\ 1\ 1\ 1]$, $[\overline{(1\ 1)}\ 2\ 1]$, $[\overline{(1\ 1)}\ (1\ 1)\ 1]$.

lesquelles il y a la sphère directrice correspondante (et sa quadrique déférente), et comme chaque quaterne de foyers est l'intersection d'un faisceau de coniques, parmi lesquelles il y a le *cercle directeur* correspondant (et sa *conique déférente*, v. n⁰ 64), on peut donner soit à la quartique, soit au quaterne de foyers, une caractéristique dont le sens est tout-à-fait analogue à celui déjà expliqué de la caractéristique d'une $F_2^{2.2}$ et que l'on sait déjà interpréter géométriquement [50]. Dans cette caractéristique, dans laquelle la somme des degrés est respectivement 4 ou 3, nous mettrons une barre sur le degré ou couple de degrés qui correspond à la sphère directrice ou au cercle directeur (si la sphère dégénère en un cône, ou le cercle en un couple de droites). Cela posé l'on a le théorème suivant que nous ne nous arrêterons pas à démontrer, car il est contenu dans un théorème plus général relatif à un espace à n dimensions, que nous avons donné ailleurs [51].

La caractéristique d'une quartique focale d'une cyclide s'obtient de la caractéristique de celle-ci en y diminuant d'une unité et en barrant le degré qui correspond à la sphère directrice contenant cette quartique. — La caractéristique d'un quaterne de foyers d'une cyclide s'obtient de la caractéristique de celle-ci en y diminuant d'une unité chacun des deux degrés du couple qui correspond au cercle directeur contenant ce quaterne. — Dans la caractéristique de la quartique focale ou du quaterne de foyers les degrés non barrés correspondent à des cônes quadriques ou respectivement couples de droites (contenant cette quartique ou ce quaterne de foyers) ayant leurs sommets précisément dans les centres des sphères directrices qui correspondaient à ces mêmes degrés dans la caractéristique de la cyclide.

26. Nous commencerons par considérer tous les cas dans lesquels par la $F_2^{2.2}\,\Gamma$ il ne passe aucun cône quadrique de 2e espèce, c'est-à-dire dans les caractéristiques il n'y a aucun couple de degrés, mais seulement des degrés isolés. Quant à la signification de ces degrés contenus dans la caractéristique nous nous appuierons sur des propositions établies ailleurs pour les $F_{n-2}^{2.2}$ du R_n [52]. Un degré différent de 1 correspond à un point double M de Γ, qui est le

---

(50) Voir par exemple la 3e édition de l'*Analytische Geometrie des Raumes* de HESSE, p. 518 (note de M. GUNDELFINGER).

(51) V. le n⁰ 160 du Mémoire cité dans la note (25) à la p. 349.

(52) V. le § 3 de la 2e Partie du Mémoire cité dans la seconde note au n⁰ 1 [note (25)].

sommet du cône f du faisceau qui correspond à ce degré. Ce point double de la surface Γ a un cône quadrique ordinaire tangent, qui est l'intersection de f avec l'espace tangent commun en ce point à toutes les variétés du faisceau. Si le degré dont il s'agit est 2, ce cône tangent est général, mais s'il est > 2 alors ce cône se décompose en deux plans, car f devient aussi tangent à cet espace: le point double M de Γ devient *biplanaire*. Si le degré est 3, il n'y a pas d'autres particularités, mais s'il est 4, alors la droite d'intersection de ces deux plans vient appartenir à Γ, et s'il est 5 il se présente en outre le fait que l'un de ces deux plans est tangent à φ, et en conséquence à Γ, tout le long de cette droite d'intersection des deux plans. — Pour les projections S de Γ sur R_3 on a ainsi immédiatement les différents cas, car le cône quadrique tangent à Γ en un point double a pour projection le cône tangent dans le point double correspondant de S.

Remarquons aussi que par un tel point double de Γ passent en général 4 droites de Γ (distinctes ou non) car l'espace tangent en ce point aux variétés du faisceau coupe celles-ci en un faisceau de cônes quadriques ordinaires ayant ce point pour sommet (et parmi lesquels il y a le cône tangent à Γ dans ce point): les 4 génératrices communes à ces cônes sont justement les 4 droites de Γ passant par ce point double. — En projetant sur R_3 on voit qu'aussi par un point double de S passent 4 droites (distinctes ou coïncidentes) de cette surface.

On peut demander si (outre ces 4 droites) il passe par le point double de S des droites ayant un contact quadriponctuel dans ce point avec la surface. Cela équivaut à demander si dans R_4 par la droite qui joint P au sommet M de f il passe des plans dont les 4 points d'intersection avec Γ coïncident en M. Un plan passant par P et par une génératrice du cône quadrique tangent en M à Γ coupe f en cette génératrice et une autre droite qui rencontre φ dans le quatrième point d'intersection de ce plan avec Γ (les autres 3 coïncidant en M): pour que ce point coïncide aussi avec M il faut donc que cette seconde génératrice de f coïncide avec la première, c'est-à-dire que le plan touche f le long de cette génératrice. L'espace polaire de P par rapport à f coupe donc le cône tangent à Γ dans les deux seules génératrices dont les plans tangents à f satisfassent aux conditions imposées. Il y a donc en général deux tangentes quadriponctuelles, qu'on construit de la manière dite. En se rappelant en outre que le cône de Kummer ayant la projection de M pour sommet est la projection du cône d'intersection de

f avec l'espace polaire de P par rapport à f même, on voit immédiatement que: *le point double de* S *a un cône tangent qui est touché par le cône de* KUMMER *dont ce point est le sommet le long de deux droites qui sont des tangentes quadriponctuelles à* S *en ce point.*

Lorsqu'il y a dans la surface S deux points doubles correspondants à deux degrés (ou groupes de degrés) de la caractéristique, la droite qui les joint appartient à la surface, car la même chose arrive dans la surface Γ pour les deux points doubles dont ceux-là sont les projections (puisqu'ils sont conjugués par rapport à toutes les F_3^2 du faisceau et sont en conséquence joints par une droite appartenant à toutes ces variétés). En outre il y a le long de cette droite de S, ou de la droite correspondante de Γ, un plan tangent fixe: en effet les deux espaces qui touchent dans les deux points doubles considérés de Γ toutes les F_3^2 du faisceau se coupent en un plan tangent le long de la droite joignant ces points à chacune de ces variétés et en conséquence aussi à Γ.

27. Ce que nous avons trouvé dans le n^0 précédent a lieu quelle que soit la variété φ qui passe par P, et doit être modifié seulement si celle-ci est précisément le cône f correspondant à un degré > 1 de la caractéristique et ayant en conséquence pour sommet un point double M de Γ. Dans ce cas la projection de ce point M sera le point de rencontre D des deux droites doubles de S, et ce point sera maintenant triple pour S, car un plan passant par P et par M coupe le cône φ en deux droites dont une seule mobile, qui contient outre M un seul autre point de Γ; ce point mobile coïncidant aussi avec M si cette droite mobile appartient au cône tangent en M à Γ: en conséquence dans R_3 chaque droite passant par le point D coupe S trois fois en ce point et une seule fois ailleurs. Nous voyons en outre que *le cône cubique tangent à* S *dans le point triple* D *(cône des tangentes quadriponctuelles) se décompose dans le plan des deux droites doubles* (v. n^0 4) *et un cône quadrique contenant les deux droites doubles et les* 4 *droites simples de* S *qui passent par* D; ce cône quadrique est la projection du cône quadrique tangent en M à Γ.

28. Si l'on fait abstraction des points de la conique double, il est clair que chaque point double de la surface S, projection quelconque de Γ, doit être la projection d'un point double de Γ. D'ailleurs chaque point double de Γ est le sommet d'un cône de 1e espèce du faisceau des F_3^2 passant par Γ, ou bien un point de

l'arête d'un cône de 2e espèce de ce faisceau; car le cône qui projette Γ par un point double n'a dans chaque plan passant par ce point que deux génératrices, c'est-à-dire il est un cône quadrique (du faisceau), de 1e ou de 2e espèce.

Nous allons appliquer tout de-suite cette proposition. Mais comme nous aurons à considérer souvent dorénavant les transformées de nos surfaces du 4e ordre par des inversions ayant toujours des quadriques directrices passant par la conique double (générale ou décomposée) de celles-ci et par rapport auxquelles le centre de l'inversion est le pôle du plan de cette conique, nous entendrons toujours que les inversions pour lesquelles nous ne dirons pas le contraire satisfassent à cette condition. Cela posé, considérons une $F_2^{2.2}$ quelconque Γ sur la variété quadratique φ et supposons seulement qu'elle ne soit pas de l'espèce la plus générale, c'est-à-dire qu'elle ait un point double M. En projetant Γ par un point P de φ sur R_3 nous avons une surface du 4e ordre à conique double S, laquelle aura en outre un point double D, projection de M. Quel effet a sur S une inversion ayant D pour centre? Comme nous avons vu (n^0 14) cela équivaut à trouver la surface correspondant à Γ dans l'homologie harmonique qui transforme φ en soi-même et qui a un certain point de la droite PM pour centre, et ensuite à projeter la nouvelle surface par P sur R_3. Or cette même homologie harmonique transforme dans le cône (à 3 dimensions) qui projette cette nouvelle surface par P le cône qui projette Γ par M, d'où il suit que (comme l'espace R_3 ne passe ni par P ni par M, comme nous pouvons évidemment supposer) ces deux cônes coupent R_3 suivant deux figures projectives ([53]). Donc puisque, par ce que

---

([53]) Nous avons ainsi en même temps démontré que : *lorsqu'on considère dans l'espace à* 3 (*ou à* n — 1) *dimensions deux figures qui soient les projections d'une même figure d'une variété quadratique de l'espace à* 4 (*ou à* n) *dimensions faites par deux points différents de cette variété comme centres, on peut obtenir l'une de ces figures de l'autre au moyen d'une inversion et d'une homographie, que l'on peut même supposer être une homologie harmonique ayant le même centre que l'inversion.* — M. Klein avait déjà vu l'effet d'un changement du centre de projection lorsqu'on considère la géométrie du R_{n-1} comme la projection de la géométrie sur une $M_{n-1}^{(2)}$ du R_n (*Liniengeometrie und metrische Geometrie*, Math. Ann., V, p. 266); mais nous avons aimé à retrouver synthétiquement ce qu'il avait prouvé analytiquement. Il nous semble en outre qu'il n'ait pas bien reconnu que dans la transformation considérée il y a non seulement une inversion, mais la combinaison d'une inversion avec une homographie (qui *ne change pas* en général l'absolu de l'inversion en soi-même).

nous avons dit au commencement, le cône qui projette Γ par M est un cône quadrique, et puisque les propriétés des figures qui nous importent sont celles projectives, nous concluons que: 1° *la transformée de* S *par une inversion ayant le point double* D *pour centre est une quadrique*; 2° *toutes les particularités de cette quadrique en elle-même et par rapport à la conique double de* S *peuvent s'obtenir en considérant cette quadrique et cette conique comme l'intersection de* R_3 *avec le cône du faisceau déterminé par* Γ *ayant* M *pour sommet (ou pour un point de l'arête) et avec le cône quadrique ordinaire d'intersection de* φ *avec son espace tangent en* M. — Ainsi pour chaque espèce de surface S en même temps que nous reconnaitrons les particularités d'un quelconque D de ses points singuliers par l'examen du cône du faisceau des F_3^2 qui a pour sommet (ou pour un point de l'arête) le point singulier correspondant de Γ nous verrons aussi quelles particularités présente une quadrique par laquelle on puisse obtenir S au moyen d'une inversion ayant D pour centre ([54])

29. La nature des diviseurs élémentaires montre que les propriétés des différentes espèces de surfaces peuvent se déduire les unes des autres par des considérations de limites, en supposant que deux racines correspondant à deux diviseurs élémentaires différents pour une espèce viennent coïncider, de sorte que la nouvelle espèce aura un diviseur élémentaire de degré somme des degrés de ceux-là, etc. Cependant cette méthode des limites ne mène pas toujours facilement aux résultats, de sorte que nous nous bornerons à en faire application à la détermination de la classe des différentes surfaces. — La classe de la surface S est le nombre des espaces tangents à Γ que l'on peut mener par un plan quelconque passant par P: ce nombre correspond par dualité à l'ordre de la développable Δ circonscrite à un système de F_3^2, que nous considérions au n° 20. Et comme nous avons vu alors que dans le cas général cet ordre est 12, de même nous concluons que: *La surface générale du*

([54]) Nos raisonnements montrent qu'il faut seulement excepter le cas dans lequel, φ étant un cône, M en serait le sommet (ou un point de l'arête), car alors les inversions dont il s'agit deviennent illusoires. Cela signifie que seulement pour les surfaces du 4e ordre qui, outre la conique double, générale ou décomposée en deux droites (se coupant ou non en un point triple, et distinctes ou coïncidantes), n'ont pas d'autres points doubles, on ne peut pas les obtenir en transformant par des inversions convenables des quadriques convenables.

4e *ordre à conique double générale ou décomposée en deux droites est de la classe* 12 ([55]).

Mais si la surface S n'est plus générale, mais acquiert des points doubles, c'est-à-dire si sa caractéristique n'est plus [1 1 1 1 1] ni $[\overline{1}\ 1\ 1\ 1\ 1]$, alors la classe de S n'est plus 12, mais elle diminue en correspondance. Un point conique et un point biplanaire ordinaire (ou *de* 1e *espèce*) correspondent, comme nous avons vu, aux degrés 2 et 3 de la caractéristique et ils abaissent, comme on sait, la classe de 2 et respectivement de 3 unités. Et de là il suit que, comme un degré 4 ou 5 peut être considéré comme provenant de la coïncidence des racines correspondantes à deux degrés 2, 2 ou bien 2, 3, ils correspondront à des points biplanaires qui abaissent la classe de S de 4 ou respectivement de 5 unités (et que nous appellerons *de* 2e ou *de* 3e *espèce*). De même nous verrons qu'au groupe (1 1) de deux degrés appartenant à une même racine correspondent deux points coniques de S et en conséquence un abaissement de 4 unités pour la classe; et qu'au groupe (2 1) correspond un point biplanaire provenant de la coïncidence de ces deux points coniques et abaissant en conséquence aussi la classe de 4 unités, c'est-à-dire de la 2e espèce. Enfin nous verrons qu'aux groupes (3 1) et (4 1) correspondent des points uniplanaires de S; et puisque ces groupes peuvent être considérés comme provenant de la coïncidence des racines correspondant aux degrés 2 et (1 1), ou 3 et (1 1), ces points uniplanaires (dont le premier sera donc équivalent à trois points doubles coniques coïncidents, et le second à deux points coniques et un point biplanaire de 1e espèce) produiront un abaissement de la classe respectivement de 6 ou de 7 unités (et nous les appellerons respectivement *de* 1e et *de* 2e *espèce*). Etc. etc. ([56]).

Il est indispensable de se rappeler ces remarques pour comprendre de quelle manière nous avons pu, dans la classification que nous ferons de nos surfaces, assigner tout-de-suite, sans aucun cal-

---

([55]) Puisque l'ordre de Δ coïncide toujours avec la classe de notre surface S on voit en répétant le raisonnement fait au nº 20 sur l'intersection de Δ avec φ qu'on a la proposition suivante: *pour une cyclide quelconque de classe* n *la développable focale est de l'ordre* $2n - 8$.

([56]) Nous ne savons pas si l'on a déjà remarqué ce fait étrange que M. Casey dans son Mémoire (loc. cit., pp. 660-661) trouve par un raisonnement tout-à-fait inexact que la cyclide générale [1 1 1 1 1] est de la classe 16 et qu'en conséquence les cyclides [2 1 1 1], [3 1 1], et [2 2 1], [(1 1) 1 1 1] sont respectivement des classes 14, 13 et 12.

cul, pour chaque espèce la classe correspondante. Ajoutons encore la remarque suivante, dont nous ferons aussi tacitement un usage continuel. Nous avons dit que la classe de la projection de Γ faite par P est égale au nombre des espaces tangents à Γ, que l'on peut mener par un plan quelconque passant par P. De là il suit que toutes les surfaces obtenues en projetant Γ par les points d'un plan, ayant une position générale par rapport à Γ, ont la même classe. Donc, bien que la classe de la projection de Γ puisse diminuer en donnant au centre de projection P des positions particulières par rapport à Γ, toutefois nous serons sûrs que la classe ne diminue pas lorsque les conditions imposées à P sont telles que dans chaque plan de R_4 il y ait quelque point qui les satisfasse, c'est-à-dire lorsqu'on astreind P seulement à appartenir à une variété ou à une surface quelconques données. Par exemple si, au lieu de prendre P quelconque (auquel cas l'on aurait une surface quartique à conique double), on le prend sur l'un des cônes contenant Γ (de sorte que la conique double se décompose) ou bien sur Γ même (de sorte que l'on obtient une surface cubique), la surface obtenue ainsi aura la même classe que dans le premier cas. Ce principe nous a donné les classes de presque toutes nos surfaces.

30. Il faut encore que nous fassions une remarque générale pour toutes les espèces de surfaces que nous allons étudier séparément. Nous avons vu qu'en général une surface quelconque parmi celles dont nous nous occupons a dans la conique double 4 points-pinces; mais il peut très bien arriver que quelques-uns de ceux-ci coïncident entre eux. Lorsqu'on transforme par inversion une S de nos surfaces (en prenant, bien entendu, la quadrique directrice de la manière dite au n^0 28) on obtient une autre surface S_1 de la même espèce, dont les points-pinces de la conique double correspondent aux 4 points dans lesquels la quartique d'intersection de S avec le cône projetant la conique double par le centre de l'inversion coupe le plan polaire de ce centre par rapport au faisceau des quadriques passant par cette quartique (les couples de points de cette quartique alignés avec le centre de l'inversion se transformant dans les points de la conique double de S_1). De là il suit que si l'on prend le centre de l'inversion en un point quelconque de la développable circonscrite à S et à sa conique double (développable focale), ou en un point des courbes doubles de cette développable, ou en un point de sa courbe de rebroussement, ou enfin en un point stationnaire de cette courbe, des 4 points-pinces de S_1 deux coïnci-

deront, ou bien ils coïncideront deux-à-deux en deux points, ou bien trois de ces 4 points, ou enfin tous les quatre, coïncideront en un seul. On voit ainsi en même temps que toutes les propriétés de S qui n'ont pas de relation immédiate avec les points-pinces de la conique double ne cesseront d'avoir lieu pour S_1 : nous pourrons donc nous dispenser de considérer les particularisations de nos surfaces qui ne dépendent que des points-pinces et nous nous bornerons à reconnaitre ici quelles singularités ultérieures présente un point A' dans lequel soient venus coïncider deux ou trois points-pinces. Dans ces cas la quartique k^4, dont la projection par P sur R_3 est la conique double de notre surface, aura un point A double ou stationnaire (dont la projection sera A') et le plan tangent au cône $\pi\varphi$ le long de PA sera justement le plan tangent en A à Γ. Donc (v. n⁰ 3) *pour le point-pince* A′ *la tangente singulière coïncide avec la tangente à la conique double.* Un espace quelconque passant par ce plan sera tangent en A à une variété du faisceau et il coupera Γ en une quartique ayant en A un point double avec les deux tangentes dans ce plan et appartenant à un cône quadrique ayant ce plan pour plan tangent le long de la génératrice PA (le cône d'intersection de cet espace avec φ). Parmi ces espaces il y en a deux qui coupent Γ en des quartiques à point stationnaire en A : l'un de ces deux espaces est évidemment celui qui touche en A la variété φ et qui coupe en conséquence Γ en une quartique ayant en A un point stationnaire dont la tangente est PA ; l'autre de ces deux espaces est π dans le second des cas que nous étudions. Donc (en appliquant quelques-unes des propositions de la dernière note au n⁰ 3) nous avons que : *Chaque plan passant par la tangente singulière au point-pince particulier* A′ *coupe la surface suivant une quartique ayant en* A′ *un point d'osculation de deux branches avec cette droite pour tangente commune. Parmi ces plans le plan tangent singulier coupe la surface en une courbe ayant en* A′ *un point triple à trois tangentes coïncidentes, et un autre plan détermine une section ayant en* A′ *un point de rebroussement de 3ᵉ espèce. Mais ce dernier plan coïncide avec le plan de la conique double dans le second des deux cas considérés.*

Ajoutons enfin que lorsque les points-pinces coïncident deux-à-deux (ou lorsqu'ils coïncident tous les quatre) le plan de la conique double est tangent à l'un des cônes de Kummer le long de la droite joignant les deux points-pinces distincts et la conique double appartient aux deux séries de coniques qui correspondent à ce cône ; car dans ce cas k^4 se décompose en deux coniques.

31. Le cas {1 1 1 1 1} (57) pour Γ, qui donne les surfaces les plus générales à conique double générale ou décomposée en deux droites, a déjà été étudié complètement dans les paragraphes précédents. Nous passerons donc aux autres cas, et comme plusieurs des propriétés de ces surfaces générales ont encore lieu, comme nous avons prouvé, pour celles qu'on obtient dans ces cas, nous nous bornerons aux propriétés qui se modifient de l'un cas à l'autre : les méthodes que nous avons développées, et les avertissements que nous avons donnés dans les différents nos de ce paragraphe nous donneront d'ailleurs immédiatement ces propriétés. Ainsi nous avons déjà vu comment on peut étudier les points doubles des nouvelles espèces de surfaces en considérant les points correspondants de Γ. Ainsi les inversions fondamentales s'obtiennent encore immédiatement pour ces différentes surfaces, car elles correspondent aux points ayant le même espace polaire par rapport aux F_3^2 passant par Γ, c'est-à-dire aux sommets des cônes quadriques passant par Γ; on peut cependant exclure ces sommets qui sont des points doubles de Γ car on voit bien que l'inversion provenant d'un tel point sera illusoire. Nous verrons aussi comment dans chaque cas on détermine les droites de Γ et leur distribution par des considérations analogues à celles qui nous ont permis d'étudier les 16 droites du cas général, mais encore plus faciles : de là nous aurons donc les droites des surfaces projections de Γ dans les différents cas. De même la méthode pour obtenir les représentations planes des différentes surfaces nous servirait encore : seulement il faudra remarquer que généralement l'on pourra prendre de plusieurs manières diverses la droite de Γ par laquelle on projette Γ sur un plan et qu'en conséquence l'on obtiendra autant de représentations planes différentes. Nous nous bornerons en conséquence pour ne pas trop allonger ce travail à donner encore les représentations planes dans deux ou trois cas.

{2 1 1 1}.

32. Dans le cas {2 1 1 1} la surface Γ a un point double M, sommet d'un cône f du faisceau de F_3^2, lequel se trouve sur toutes ces variétés. Par ce point passent, comme nous avons vu (n0 26), 4 droites de Γ contenues dans le cône quadrique ordinaire tangent en ce point à Γ. Si dans Γ il y a une autre droite, le plan qui la

(57) Pour distinguer les caractéristiques des $F_2^{2\cdot 2}\,\Gamma$ de celles des surfaces S de R_3 qui en sont les projections nous mettrons celles-ci entre [ ], et celles-là entre { }.

joint à M devra appartenir au cône f et il coupera une autre variété du faisceau, et en conséquence Γ même, dans cette droite et dans une autre droite, qui devra nécessairement passer par M. *Cette considération nous montre immédiatement, soit dans ce cas, soit dans ceux qui suivront, quelles sont les droites de la surface Γ (qui ne passent pas par M).* Par chacune des 4 droites passant par M passent deux plans générateurs de f: sur chacun d'eux il y aura encore une droite de Γ. Donc Γ contient encore 8 droites qui deux-à-deux coupent les 4 droites passant par M. — Dans le faisceau il y a encore, outre f, 3 autres cônes qui auront en M pour espace tangent l'espace tangent commun à toutes les variétés du faisceau. Pour l'un quelconque de ces cônes le plan qui en joint le sommet à une des droites de Γ sera un plan générateur et devra en conséquence contenir encore une autre de ces droites: donc dans chacun des deux systèmes de plans générateurs il y a un plan qui contient deux des 4 droites de Γ passant par M et il y en a deux autres dont chacun contient 2 des autres 8 droites de Γ. On voit ainsi quelle est la distribution des droites de Γ: chacune des 4 qui passent par M est coupée par les autres trois et par deux des 8 autres, chacune de ces 8 est coupée par une des 4 et par trois des 8. — En projetant par un point P sur R_3 nous avons la distribution des droites de la projection S de Γ.

33. [2 1 1 1] *Surface de la* 10^e *classe à conique double générale et un point double conique.* On obtient cette surface S comme projection de Γ si la variété φ qui passe par P n'est pas un cône. Ce point conique D est la projection du point double M de Γ: il passe par lui 4 droites de S, et il y a en outre sur S d'autres 8 droites liées à ces 4 de la manière que nous avons déjà dite. — Cette surface S a 4 cônes de KUMMER dont un *singulier* ([58]) ayant le sommet en D: pour les 3 cônes non singuliers les couples de séries de coniques de S présentent les mêmes relations qu'en général et il y a dans

([58]) Nous appelons *cône de* KUMMER chaque cône quadrique dont les plans tangents coupent une de nos surfaces suivant des couples de coniques, soit que ce cône soit bitangent à la surface, soit lorsqu'il a pour sommet un point singulier de la surface et ne lui est plus que simplement tangent (car, comme nous l'avons dit au commencement, M. KUMMER a aussi considéré ces dernières espèces de cônes); mais dans ce dernier cas nous appellerons *singulier* le cône de KUMMER. — Lorsqu'un cône de KUMMER est singulier les ∞^2 quadriques qui passent par la conique double (générale ou décomposée) et par deux coniques appartenant respectivement aux deux séries qui correspondent à ce cône ne sont plus doublement chacune de ces séries une conique décomposée en 2 droites passant par le point D et deux coniques décomposées chacune en 2 droites ne passant pas par D; pour le cône de KUMMER singulier les coniques des deux séries présentent cette particularité qu'elles passent toutes par le point double D de la surface et il y a dans chaque série 4 coniques décomposées en une droite passant par D et une autre droite.

A chacune des $4+8$ droites de S correspond encore, comme dans le cas général, une série de ∞^2 cubiques (coupant en deux points cette droite). Les cubiques qui correspondent aux droites passant par le point double D passent aussi par D (59).

---

tangentes à la surface S mais simplement tangentes, car l'un de leurs deux points de contact avec celle-ci est venu dans le point double qui est le sommet du cône de KUMMER. — Dans l'étude des différentes espèces de nos surfaces nous n'aurons pas besoin d'énumérer pour chaque espèce les systèmes de ∞^2 quadriques passant par la conique double et par deux autres coniques (et en conséquence les manières de générer la surface par deux faisceaux projectifs de quadriques), car lorsque nous aurons donné les différents couples de séries de coniques nous aurons en même temps donné ces systèmes de quadriques.

(59) Si le centre de projection P de Γ est sur l'espace tangent en M au faisceau, la projection D de M ira sur la conique double; et comme chaque espace passant par PM coupera Γ en une quartique ayant M pour point double et l'intersection avec l'espace tangent en M pour plan des tangentes (plan qui passera en conséquence par P), on voit que le point D de la conique double (dans lequel se confondront 2 des 4 points-pinces) sera un *point de contact de deux nappes* de la surface, car chaque plan passant par D coupera la surface en une courbe ayant en D un point de contact de deux branches. Les tangentes en D à ces courbes forment le plan tangent (ou, pour mieux dire, le plan des tangentes quadriponctuelles) en D à la surface; ce plan est l'intersection de R_3 avec l'espace tangent en M au faisceau, et, comme cet espace coupe Γ en 4 droites passant par M et contient les sommets des 3 cônes du faisceau qui n'ont pas M pour sommet, ce plan coupera la surface suivant 4 droites passant par D (ce qui suivait aussi du fait que D devait être, d'après ce que nous avons dit, un point quadruple pour l'intersection du plan avec la surface) et il contiendra en outre les sommets des 3 cônes de KUMMER non singuliers. On retrouve ainsi immédiatement les propriétés de cette surface qui ont été données par M. CREMONA (*Sulla superficie di quart'ordine dotata di una conica doppia*, Rend. Ist. Lombardo, (2) 4, 1871, pp. 159-162). D'ailleurs cette surface s'obtient de la surface générale [2 1 1 1] par une inversion au moyen de laquelle le point conique va se poser sur la conique double. On pourrait aussi dans les espèces de surfaces que nous considérons ensuite supposer qu'un quelconque des points doubles (ou plusieurs d'entre eux) aillent se poser sur la conique double, mais cet exemple que nous avons donné suffira pour montrer au lecteur quelles particularisations recevraient par cela les propriétés de la surface, et nous nous bornerons à considérer encore dans la suite deux ou trois cas dans lesquels les particularisations qu'on obtient ainsi sont encore plus remarquables.

Si on considère la surface S comme une cyclide, alors elle aura correspondentement aux 3 cônes de Kummer non singuliers 3 sphères directrices d'inversions fondamentales pour S proprement dites, et correspondentement au cône de Kummer singulier une sphère directrice singulière, c'est-à-dire réduite à un cône dont le point double D de S est le sommet: la correspondance de S à soi-même par rapport à une inversion ayant une telle sphère directrice n'a plus aucun sens. Quant aux focales de la cyclide (v. n⁰ 25), celles qui appartiennent aux 3 sphères directrices propres sont des quartiques $[2\,1\,1]$, c'est-à-dire ayant un point double en D (point par lequel passent ces sphères) et appartenant chacune à deux cônes quadriques ayant les sommets dans les centres des deux sphères directrices propres sur lesquelles elle ne se trouve pas; et celle qui appartient à la sphère singulière est une quartique $[\overline{1}\,1\,1\,1]$, c'est-à-dire une quartique tout-à-fait générale placée dans 3 autres cônes ayant pour sommets les centres des 3 premières sphères.

Il suit de là que les quadriques déférentes des 3 premières sphères les touchent dans le point double D de S (tandis que la quadrique déférente de la sphère directrice nulle a une position tout-à-fait générale par rapport à celle-ci). On peut aussi prouver cela en remarquant que comme dans R_4 un des cônes du faisceau différents de f touche en M l'espace tangent en ce point à φ, l'espace polaire de son sommet par rapport au faisceau coupe φ en une quadrique passant par M et la quadrique polaire du même cône par rapport à φ appartiendra à cet espace polaire et aura en M pour plan tangent l'intersection de cet espace avec l'espace tangent à φ, c'est-à-dire le même plan tangent que la première quadrique. Or les projections de ces deux quadriques sont respectivement une sphère directrice et sa quadrique déférente: donc ces deux surfaces se toucheront dans la projection D de M. — Ainsi les ∞^2 sphères dont la cyclide S peut être considérée comme l'enveloppe forment 4 séries, dont 3 se composent chacune des sphères orthogonales à une sphère fixe et ayant leurs centres sur une quadrique tangente à cette sphère, et dont une se compose de sphères passant par un point fixe et ayant leurs centres sur une quadrique fixe.

Cette cyclide s'obtient par une inversion faite sur une quadrique générale à centre (v. n⁰ 28).

34. $[\overline{1}\,2\,1\,1]$ *Surface de la* 10ᵉ *classe à deux droites doubles et un point conique.* (En disant *deux droites doubles* nous sous-enten-

drons toujours qu'elles se coupent). Nous obtenons cette surface en supposant que φ soit un des 3 cônes différents de f du faisceau (Γ). La distribution des droites simples sera donc encore la même que pour la surface précédente; en outre chacune des droites doubles sera coupée par 2 des 4 droites sortant par le point conique et par 4 des 8 autres, lesquelles 4 seront par couples sur 2 plans passant par cette droite double. Les cônes de KUMMER non singuliers de la surface sont seulement plus 2 (outre celui qui se décompose dans les deux droites doubles comme enveloppes de plans). Quant aux inversions fondamentales de cette surface, on voit de la même manière que pour la surface générale à deux droites doubles qu'il y en a 2 dont les centres sont les sommets des 2 cônes de KUMMER non singuliers et dont les quadriques directrices sont deux cônes (passant par les deux droites doubles), tandis qu'il y en a une dont le centre est le point d'intersection des deux droites doubles et dont la quadrique directrice est une quadrique générale (contenant ces deux droites) passant avec ces deux cônes directeurs par le point conique de la surface. — On obtient une telle surface en transformant une quadrique par une inversion à cône directeur.

Pour cette surface et pour toutes celles, que nous rencontrerons dans la suite, ayant deux droites doubles et des points doubles, il y a un cas particulier remarquable: celui dans lequel un point double va coïncider avec le point de rencontre des deux droites doubles (nous avons déjà examiné dans la dernière note le cas plus général dans lequel ce point double va sur l'une des droites doubles). Dans notre cas cela équivaut à projeter la surface Γ par un point P qui soit en ligne droite avec M et l'un des 3 autres sommets de cônes du faisceau. Un espace passant par cette droite coupe Γ en une quartique ayant un point double en M, et le centre de projection P se trouve en ligne droite avec ce point double et un autre sommet de cône quadrique ordinaire passant par cette quartique. Donc (v. la note au n^0 3) dans ce cas: *chaque plan passant par le point* D *d'intersection des deux droites doubles coupe la surface* S *en une quartique ayant en* D *non plus seulement un point de contact de deux branches, mais bien un point d'osculation de deux branches, avec la tangente singulière dans le plan des droites doubles* ([60]).

([60]) On voit aussi que dans ce cas les 4 points-pinces des deux droites doubles coïncident dans le point d'intersection de celles-ci. Réciproquement notre méthode nous montre immédiatement que, si dans la surface générale à deux droites doubles les 4 points-pinces coïncident, on aura justement la surface par-

Parmi ces plans ceux qui touchent un certain cône quadrique (de KUMMER) ayant le sommet en D coupent la surface en des couples de coniques s'osculant en ce point. Toutes les propriétés de cette surface s'obtiennent d'ailleurs, comme nous l'avons dit, comme cas particuliers de celles de la surface générale $[\overline{1}\,2\,1\,1]$: les 4 droites de celle-ci sortant du point conique viennent maintenant coïncider par couples avec les deux droites doubles, de sorte que notre surface n'a plus, outre celles-ci, que 8 droites. Etc.

35. $[\overline{2}\,1\,1\,1]$ *Surface de la* 10^e *classe à deux droites doubles se croisant en un point triple.* Cette surface correspond au cas dans lequel le centre de projection P de Γ se trouve sur le cône f du faisceau correspondant au degré 2 (61). Elle a, comme nous avons déjà remarqué (n^0 27), un cône quadrique de tangentes quadriponctuelles dans le point triple (outre le plan des droites doubles) et ce cône contient les deux droites doubles et les 4 autres droites de la surface passant par ce point. Outre celles-ci la surface contient 8 droites, dont chacune est dans un plan avec l'une des deux droites doubles et l'une des 4 premières droites simples. La surface a encore 3 cônes de KUMMER (non singuliers) à chacun desquels correspondent deux séries conjuguées de coniques ayant entre elles les relations connues. A chacune de ces séries de coniques appartient un couple de droites parmi les 4 droites qui passent par le point triple et deux couples de droites parmi les autres 8. La surface a 3 inversions fondamentales ayant pour centres les sommets des 3 cônes

---

ticulière considérée ci-dessus; tandis que pour la surface générale à conique double nous avons vu (n^0 30) que la coïncidence des 4 points-pinces n'entrainait pas un abaissement dans la classe.

(61) On voit donc que cette surface n'est pas un cas particulier de la surface à deux droites doubles $[\overline{1}\,2\,1\,1]$. On aurait pu penser que cette surface à point triple pouvait être obtenue en faisant venir dans le point d'intersection des deux droites doubles un ou plusieurs points coniques d'une surface quelconque à deux droites doubles; mais cela n'est pas, car nous avons vu au contraire au n^0 précédent qu'en faisant coïncider le point conique de la surface $[\overline{1}\,2\,1\,1]$ du [=avec le] point d'intersection des droites doubles, ce point devient un point d'osculation de deux nappes (dénomination expliquée par ce que nous avons dit précédemment). Les deux surfaces $[\overline{1}\,2\,1\,1]$ et $[\overline{2}\,1\,1\,1]$ sont tout-à-fait différentes entre elles (*identiques* seulement en ce sens, qu'elles sont les projections d'une même $F_2^{2\cdot 2}$) et elles ne peuvent pas se rattacher comme cas particulier l'une à l'autre. — Les mêmes choses valent pour tous les cas analogues qui se présenteront dans la suite.

de KUMMER et ayant des cônes quadriques directeurs. Elle *n'est pas* la transformée par inversion d'une quadrique.

On obtient aussi pour cette surface un cas particulier remarquable en faisant coïncider (dans le point triple) les 3 points-pinces des droites doubles. En se rappelant notre méthode pour déterminer ces points-pinces, on voit que cela arrive lorsqu'on prend P sur l'intersection de f avec l'espace tangent en M au faisceau, c'est-à-dire sur le cône quadrique ordinaire tangent en M à Γ. Donc alors la projection de ce cône se réduit à un plan. Chaque espace passant par PM coupe Γ en une quartique ayant en M un point double [dont] PM est une tangente. Donc : *lorsque les* 4 *points-pinces coïncident, le cône tangent dans le point triple se décompose dans le plan des droites doubles compté deux fois et un autre plan contenant les* 4 *droites simples de la surface qui passent par ce point triple ; de sorte que chaque section plane passant par ce point y a un point stationnaire, avec la tangente dans le premier plan, par lequel passe une autre branche tangente au second plan.*

36. Pour avoir la représentation des 3 surfaces ainsi obtenues dans les trois nos précédents sur un plan R_2 projetons Γ sur celui-ci par l'une des droites de Γ: nous obtiendrons deux représentations différentes suivant que cette droite passe ou ne passe pas par le point double M de Γ.

Dans le premier cas, les 3 autres droites passant par M seront projetées en trois points 1, 2, 3 du plan situés en ligne droite, puisque elles sont dans un espace passant par l'axe de projection ; les deux autres droites de Γ coupant cet axe auront pour images deux autres points quelconques 4, 5 du plan, et les autres six droites de Γ auront pour images dans le plan les six droites qui joignent ces deux points fondamentaux 4, 5 aux trois premiers 1, 2, 3. La droite 1 2 3 joignant ceux-ci est l'image du point conique M de Γ ou bien des points coniques des différentes surfaces considérées, car elle est la projection du cône tangent en M à Γ. Dans chaque espace passant par l'axe de projection il y a outre M un seul point de Γ infiniment voisin à cet axe : donc l'image de cette droite de la surface est la droite joignant les points fondamentaux 4, 5, outre la droite 1 2 3 comme image du point conique. Les 3 couples de séries de coniques ne passant pas par ce point ont pour images les faisceaux de droites de centres 1, 2, 3 avec les faisceaux de coniques passant par 2 3 4 5, 1 3 4 5, 1 2 4 5 respectivement. Le couple de séries de coniques passant par le point conique a pour image le couple de faisceaux de droites ayant les deux points 4 et 5 pour centres. — Nous avons ainsi en même temps les représentations planes des 3 espèces de surfaces ; on verrait aussi sans difficulté ce que sont les images de leurs cubiques, quartiques, etc.

Quant aux images des lignes doubles, pour la surface [2 1 1 1], dont la conique double ne se décompose pas, l'image de celle-ci sera, comme en général, une cubique passant par les points fondamentaux (comme projection d'une quartique de Γ) et dont les points sont conjugués deux-à-deux de la même manière. Pour la surface $[\overline{1}\ 2\ 1\ 1]$ dont la conique double se décompose en deux droites les coniques placées dans les plans passant par ces droites doubles ont pour images, p. e., le faisceau 1 de droites et le faisceau 2 3 4 5 de coniques, et les deux droites doubles une droite et une conique de ces faisceaux respectivement, etc. Enfin pour la surface $[\overline{2}\ 1\ 1\ 1]$ à point triple dans lequel se croisent deux droites doubles les deux séries de coniques passant par ce point et appartenant en conséquence à des plans passant par ces droites ont pour images les deux faisceaux de droites 4 et 5 : une droite de chacun de ces faisceaux est l'image d'une droite double de la surface (en y ajoutant, si l'on veut, la droite 1 2 3, qui est l'image du point triple).

Si pour axe de projection de Γ on prend une droite de Γ ne passant pas par le point double M, alors comme elle est coupée par une droite passant par ce point et par d'autres trois droites nous aurons sur R_2 quatre points fondamentaux 1, 2, 3, 4 correspondants à ces quatre droites. L'espace tangent à f le long de la droite représentée par 1 contient aussi l'axe de projection et coupe R_2 suivant une droite 1 1 passant par 1, droite qui contient les images des points de Γ infiniment voisins à la droite représentée par 1 (images qui coïncident dans le point de cette droite qui est infiniment voisin à 1 et que nous représenterons aussi par 1) et qui est en même temps l'image de la droite de Γ appuyée sur celle-ci mais différente de l'axe de projection et de celles qui passent par M. Il s'ensuit que les images des quartiques de 1[e] espèce de Γ (ou de S) touchent la droite 11 dans le point 1, ou, comme nous dirons plus brièvement, passent par 1, 1. Le point 1 est en même temps l'image du point conique. Les autres trois droites passant par ce point ont pour images les droites 12, 13, 14 ; la droite qui sert comme axe de projection a pour image la conique 1 1 2 3 4 ; et enfin les trois droites restantes ont pour images les droites 23, 24, 34. — L'une des deux séries de coniques passant par le point double a pour images les droites passant par 1 et l'autre les coniques passant par 1 2 3 4; les autres trois couples de séries de coniques ont pour images les faisceaux de droites 2, 3, 4 et les faisceaux de coniques 1 1 3 4, 1 1 2 4, 1 1 2 3 respectivement.

Pour la surfaces [2 1 1 1] l'image de la conique double est une cubique par 1 1 2 3 4. Pour la surface $[\overline{1}\ 2\ 1\ 1]$ les deux droites doubles ont pour images une droite et une conique des faisceaux 2 et 1 1 3 4, par exemple: ces deux faisceaux sont les images des coniques placées dans des plans passant par ces droites doubles. Pour la surface $[\overline{2}\ 1\ 1\ 1]$ les deux droites doubles ont pour images une droite et une conique des faisceaux 1 et 1 2 3 4, qui sont pour cette surface les images des deux séries de coniques placées dans des plans passant par les droites doubles. Le point d'intersection autre que 1 de cette droite et de cette conique forme avec le point 1 l'image du point triple de la surface, en ce sens que les points de R_2 qui lui sont infiniment voisins représentent les points de la surface infiniment voisins au point triple et appartenant à la nappe tangente au plan des deux droites doubles, tandis que les points du plan infiniment voisins à 1 représentent les points de la surface infiniment voisins au point triple et appartenant à la nappe qui a dans ce point le cône quadrique tangent. On voit tout cela par la projection.

{2 2 1}.

37. Dans ce cas la surface Γ de R_4 a deux points doubles M, M', qui sont les sommets de deux cônes f, f' du faisceau de F_3^2. (Un tel faisceau est précisément déterminé par deux cônes de 1e espèce dont chacun passe par le sommet de l'autre). La droite MM' appartient à Γ et le long d'elle cette surface a un seul plan tangent qui est l'intersection des espaces tangents en M et M' à toutes ces variétés (v. à la fin du n0 26). L'espace tangent en M coupe les variétés en un faisceau de cônes quadriques ordinaires ayant le sommet en M: le cône f' du faisceau de F_3^2 et le troisième cône ψ du même faisceau seront donc coupés par cet espace suivant les deux couples de plans de ce faisceau de cônes ordinaires, cônes qui ont le long de l'arête MM' du premier couple de plans un même plan tangent (le plan tangent à Γ), lequel appartiendra au second couple de plans. De là il suit que par M passent, outre la droite MM', seulement 2 autres droites de Γ; et de même on verrait que par M' passent, outre MM', seulement 2 autres droites de Γ. Les 2 plans générateurs de f' qui passent par MM' coupent encore Γ respectivement suivant les deux autres

droites passant par M; mais chacun des plans générateurs de f' qui passent par l'une ou l'autre des deux autres droites passant par M' coupe encore Γ suivant une autre droite ne passant ni par M ni par M'. Donc Γ contient, outre les 5 droites déjà considérées, 4 autres droites, dont deux coupent l'une et deux l'autre des droites passant par M' et différentes de MM'; et de même elles forment deux autres couples de droites coupant respectivement l'une et l'autre des droites, différentes de MM', qui passent par M. Enfin elles forment encore deux couples de droites se coupant mutuellement, car elles appartiennent par couples à deux plans générateurs du cône ψ de même système que le plan générateur qui est tangent à Γ le long de MM', tandis que le couple des droites (différentes de MM') qui passent par M et le couple de celles qui passent par M' appartiennent à deux plans générateurs de ψ de l'autre système. On a ainsi la distribution des droites de Γ et en conséquence aussi de ses projections S.

38. [2 2 1] *Surface de la 8ᵉ classe à conique double générale et deux points coniques.* Elle a deux points coniques D, D' (projections de M, M') joints par une droite qui lui appartient. Par chacun de ces points passent encore 2 droites de la surface S, et il y a en outre sur celle-ci d'autres 4 droites liées à ces 5 et entre elles comme les droites de Γ entre elles. Les deux points coniques D, D' sont les sommets de deux cônes de Kummer singuliers, auxquels correspondent deux couples de séries de coniques passant respectivement par ces points, et il y a en outre un cône de Kummer non singulier auquel correspondent deux séries de coniques jouissant entre elles et par rapport à celles-là des propriétés que nous avons vues en général. Le cône tangent en D ou en D' touche encore le cône de Kummer correspondant dans les deux tangentes quadriponctuelles de ce point conique : ces deux cônes tangents à S se touchent aussi entre eux le long de la droite DD', car *le long de celle-ci la surface* S (est développable, c'est-à-dire) *a un seul plan tangent*, qui la coupe encore en une conique. Ce plan tangent appartient au cône de Kummer non singulier, et cette conique avec cette droite DD' de S comptée deux fois respectivement aux deux séries de coniques de S qui lui correspondent.

En considérant cette surface comme une cyclide, au cône de Kummer non singulier correspond une sphère directrice d'une inversion fondamentale proprement dite, qui coupe sa quadrique déférente suivant la quartique focale correspondante, laquelle ayant pour caractéristique [2 2] se décomposera dans la droite DD' et une cubique passant aussi par les deux points coniques. Aux deux cônes de KUMMER singuliers correspondent deux sphères directrices nulles (ou cônes projetant l'absolu) sur lesquelles les quartiques focales, intersections avec leurs quadriques déférentes, ont pour caractéristique $[\bar{1}\ 2\ 1]$, c'est-à-dire ont chacune un point double dans le point conique de S qui ne lui correspond pas. De là on a les 3 manières différentes de construire cette cyclide comme l'enveloppe de ∞^2 sphères, etc. — Cette surface est la transformée par inversion d'une quadrique tangente à la conique qui forme l'absolu (62).

39. $[\bar{1}\ 2\ 2]$ *Surface de la 8e classe à deux droites doubles et deux points coniques.* La droite qui joint ces deux points coniques D, D' appartient à la surface et celle-ci contient encore comme dans le cas précédent 2 autres droites par chacun de ces points et d'autres 4 droites. On voit par ce que nous avons dit à la fin du n° 37, et en se rappelant que le centre de projection P se trouve à présent sur le cône ψ, dont les deux plans générateurs passant par P coupent Γ dans les deux coniques dont les projections sont les droites doubles de S, que dans deux plans passant par une droite double il y a respectivement les deux droites qui passent seulement par le point conique D et celles qui passent seulement par D', tandis qu'un plan passant par l'autre droite double touche la surface le long de la droite DD', et dans deux autres plans passant par cette dernière droite double sont les deux autres couples de droites de S (ne passant ni par D, ni par D'). Il n'y a pas de cône de KUMMER non singulier, mais seulement deux cônes de KUMMER singuliers ayant leurs sommets dans les deux points coniques D, D' : il leur correspond deux couples de séries de coniques de S. La surface a une inversion

(62) Si cet absolu est l'absolu euclidien ordinaire, cette quadrique sera imaginaire et notre cyclide sera en conséquence imaginaire (ce qui résulte aussi du fait que la droite DD' qui coupe l'absolu est imaginaire) : mêmes remarques pourront être faites dans plusieurs des cas qui suivront. Mais il importe de se rappeler toujours que nous n'avons introduit les dénominations métriques que pour simplifier les énoncés, de sorte que pour nous l'absolu est une conique quelconque, imaginaire ou réelle. — Dorénavant pour abréger nous appellerons *absolu* d'une inversion la conique d'intersection de la quadrique directrice de l'inversion avec le plan polaire par rapport à celle du centre de l'inversion, même lorsqu'elle se décompose, et nous appellerons ce plan *plan d'inversion*. Une inversion dont la quadrique directrice se réduit à un cône ou à un couple de plans sera appelée inversion *conique* ou respectivement *biplanaire*.

fondamentale, dont le centre est le point d'intersection des droites doubles et dont la quadrique directrice passe par la droite DD'. Elle s'obtiendrait par inversion conique d'une quadrique tangente à l'une des deux droites formant l'absolu de l'inversion.

40. *Surface de la* 8ᵉ *classe à une droite double et une droite cuspidale*. La surface du 4ᵉ ordre à une droite double et une droite cuspidale (se coupant mutuellement) est un cas particulier de la surface à deux droites doubles étudiée au nº précédent. En effet rappelons-nous que la projection S d'une $F_2^{2.2}$ quelconque Γ a deux droites doubles d_1, d_2 lorsque la variété φ du faisceau déterminé par Γ, laquelle passe par le centre de projection P est un cône de 1ᵉ espèce: l'espace π tangent en P à φ coupe alors ce cône suivant deux plans et coupe Γ suivant deux coniques k_1^2, k_2^2 situées dans ces plans et dont les projections sont justement les deux droites d_1, d_2, qui seront doubles pour S, car chaque point de l'une d'elles est la projection de deux points de la conique correspondante. On voit donc que l'une d de ces deux droites deviendra une droite cuspidale si la conique correspondante k^2 se réduit à une droite r comptée deux fois et seulement alors; dans ce cas le plan de cette conique devient un plan tangent à Γ tout le long de la droite r, et vice-versa si Γ a un tel plan qui la touche le long d'une droite r et l'on projette Γ par un point quelconque P de ce plan (plan qui appartiendra nécessairement à un cône de 1ᵉ espèce du faisceau), la surface projection S aura une droite cuspidale d dans la projection de cette droite (comme on peut encore se convaincre en remarquant qu'un espace quelconque mené par P coupera Γ en une quartique ayant dans le point d'intersection avec r une tangente qui passe par P, de sorte que dans R_3 chaque plan coupera S en une quartique ayant sur d un point stationnaire). Or on voit facilement que Γ ne peut avoir un tel plan tangent le long d'une droite que lorsqu'elle a deux points doubles (distincts ou coïncidents) joints par cette droite. Chacun de ces deux points sera le sommet d'un cône de 1ᵉ espèce du faisceau, ou bien un point de l'arête d'un cône de 2ᵉ espèce: d'où il suit que le cas le plus général dans lequel ce fait a lieu est celui dans lequel Γ a la caractéristique $\{2\,2\,1\}$, mais qu'en outre cela arrive dans les cas plus particuliers $\{3\,2\}$, $\{4\,1\}$, $\{5\}$, $\{(1\,1)\,2\,1\}$, $\{(1\,1)\,3\}$, $\{(2\,1)\,2\}$, $\{(3\,1)\,1\}$, $\{(4\,1)\}$, $\{(1\,1)\,(1\,1)\,1\}$, $\{(2\,1)\,(1\,1)\}$.

Quant à la classe de chacune des surfaces à droite cuspidale, que nous obtiendrons ainsi, comme pour les obtenir il suffit de prendre le centre de projection sur un certain plan, nous voyons (en appliquant le principe exposé à la fin du nº 29) que la classe sera la même que pour la projection la plus générale de la $F_2^{2.2}$ que l'on considère ; c'est-à-dire le fait qu'une conique double se décompose en deux droites ne produit aucun abaissement de classe, même lorsque l'une de ces droites devient cuspidale.

Dans notre cas $\{2\ 2\ 1\}$ la droite r de Γ, qui joint les deux points doubles de cette surface M, M', a en effet un plan tangent qui, comme nous avons vu (nº 37), appartient au cône ψ, de sorte qu'en prenant P sur ce plan, la surface S à droite cuspidale d (projection de r) que l'on obtiendra sera un cas particulier de la surface $[\bar{1}\ 2\ 2]$ étudiée au nº précédent, et précisément le cas particulier que l'on obtient en supposant que la droite joignant les deux points coniques de cette surface aille coïncider avec celle des deux droites doubles qu'elle ne coupe pas, dans lequel cas cette droite double devient une droite cuspidale. Les deux points D, D' de cette droite cuspidale d de notre surface S, qui sont les projections de M, M', jouiront de la propriété que chaque plan passant par l'un d'eux coupera S en une quartique ayant en ce point non plus seulement un point stationnaire, mais un point de contact de deux branches, car une telle courbe est la projection de l'intersection de Γ avec un espace passant par PM (ou PM'), intersection qui a évidemment un point double en M avec les deux tangentes dans un plan par PM, c'est-à-dire dans le plan d'intersection de cet espace avec l'espace tangent en M à toutes les variétés du faisceau. Cet espace fixe coupe Γ en la droite r et en deux autres droites passant par M. Donc : *les deux points singuliers* D, D′ *de la droite cuspidale* d *de* S *sont tels que chaque plan passant par l'un d'eux coupe la surface en une courbe ayant en ce point un point de contact de deux branches, dont la tangente appartient à un plan singulier de ce point, plan qui coupe la surface suivant la droite* d *et deux autres droites passant par ce point.* En conséquence D et D' sont deux *points-clos* de la droite cuspidale d. Un autre point remarquable de cette droite est le point d'intersection avec la droite double : chaque section plane de S passant par ce point y a un point de rebroussement de 2e espèce. — Quant à la droite double elle n'a outre celui-ci qu'un seul point remarquable (point-pince), car l'un de ses deux points-pinces est venu coïncider dans ce cas avec le point d'intersection des deux droites singulières: en effet l'une des tangentes menées par P à la conique de Γ dont cette droite double de S est la projection coïncide avec la génératrice de ψ passant par P.

En un point quelconque de la droite cuspidale d le plan tangent, c'est-à-dire le plan des tangentes triponctuelles, passe par d et coupe encore S en une conique tangente en ce point à d (comme on voit en remarquant que ce plan est l'intersection de R_3 avec l'espace tangent à ψ dans le point correspondant de r): les points et les plans de d se correspondent ainsi projectivement, et les plans contiennent une série de coniques de S; la série conjuguée se trouve dans les plans passant par la droite double. Enfin les points-clos D, D' sont les sommets de deux cônes de KUMMER singuliers auxquels correspondent deux autres couples de séries de coniques. Outre les droites déjà nommées la surface S contient deux autres couples de droites dans deux plans passant par la droite double.

41. $[\overline{2}\,2\,1]$ *Surface de la 8e classe à point conique et deux droites doubles se croisant en un point triple.* Par le point triple passent 3 droites simples de la surface dont une joignant ce point au point conique, et le long de laquelle la surface a un plan tangent constant. Par le point conique passent deux autres droites de la surface, qui sont respectivement dans les deux plans qui joignent les droites doubles au point conique; et la surface contient encore d'autres 4 droites qui sont dans les plans joignant les droites doubles aux deux droites qui passent par le point triple sans passer par le point conique. Il y a deux cônes de KUMMER, dont l'un singulier ayant le sommet dans le point conique de la surface, et dont l'autre n'est pas singulier et a son sommet en un point du plan tangent à la surface le long de la droite joignant le point triple et le point conique (et est tangent à ce plan). La surface a une inversion fondamentale dont le centre est le sommet du cône de KUMMER non singulier et dont la quadrique directrice est un cône passant par le point conique de la surface. Elle est la transformée par inversion conique d'une quadrique passant par le sommet du cône directeur de cette inversion.

Notre méthode nous donnerait 3 espèces de représentations planes des quatre surfaces que nous avons obtenues de la surface Γ ayant pour caractéristique $\{2\,2\,1\}$, car pour projeter Γ sur un plan nous pouvons choisir comme axe de projection ou la droite qui joint ses deux points coniques, ou une autre droite passant par l'un de ces points, ou enfin une droite de Γ ne passant par aucun point double. Mais nous nous abstiendrons dorénavant de donner les représentations des différentes surfaces que nous étudiérons, car cela allongerait outre mesure notre travail et d'ailleurs nous avons déjà montré assez par les représentations planes que nous avons faites des surfaces [1 1 1 1 1], [$\overline{1}$ 1 1 1 1], [2 1 1 1], [$\overline{1}$ 2 1 1], [$\overline{2}$ 1 1 1] comment notre méthode s'applique facilement à trouver ces représentations: cependant nous donnerons à la fin les représentations de trois surfaces (dont la plus générale est celle de STEINER), dont la représentation plane n'est plus que du second ordre.

{3 1 1}.

42. Nous avons vu (nº 26) que pour la surface Γ ayant cette caractéristique il y a un point double M, sommet d'un cône f du faisceau tel que l'espace tangent en M à toutes les variétés de ce faisceau touche aussi f le long d'une génératrice et le coupe en conséquence en deux plans générateurs μ_1, μ_2, dans lesquels se décomposera donc dans ce cas le cône quadrique ordinaire tangent en M à Γ. Chacun de ces plans coupe (une et en conséquence toutes) les variétés du faisceau en deux droites, de sorte que par M passent 4 droites de Γ dont deux, $r_1 r_1'$, sont dans l'un μ_1 de ces plans, et deux, $r_2 r_2'$, dans l'autre plan μ_2. Par r_1, r_1' passent deux plans générateurs de f de même système que μ_2, et par r_2, r_2' passent deux plans générateurs de même système que μ_1: ces 4 plans coupent encore Γ suivant 4 droites ne passant plus par M et que nous appellerons respectivement s_1, s_1' et s_2, s_2'. Comme ces deux couples de plans générateurs de f sont de différents systèmes on voit que chacune des droites s_1, s_1' coupera chacune des droites s_2, s_2'. La surface Γ contient donc 8 droites. Les deux autres cônes du faisceau touchent aussi en M le même espace et ont les plans $r_1 r_2$, $r_1' r_2'$, $s_1 s_2$, $s_1' s_2'$ pour l'un, et les plans $r_1 r_2'$, $r_1' r_2$, $s_1 s_2'$, $s_1' s_2$ pour l'autre, pour plans générateurs.

43. [3 1 1] *Surface de la 9e classe à conique double générale et un point biplanaire de la 1e espèce.* Par le point biplanaire D passeront deux couples de droites de la surface appartenant respectivement aux deux plans *nodaux* de D (plans des tangentes triponctuelles): et la surface contiendra encore deux autres couples de droites coupant respectivement celles-ci et se coupant mutuellement de la même manière que les droites de Γ. Il y aura deux cônes de KUMMER non singuliers avec deux couples de séries de coniques de la surface: dans chacune de ces séries de coniques il y en aura une décomposée en deux droites passant par D et une autre décomposée dans les deux droites de la surface qui ne coupent pas celles-ci. Il

y a en outre un cône de KUMMER singulier ayant le sommet en D et qui touche les deux plans nodaux dans les deux tangentes quadriponctuelles du point D. Dans chacune des deux séries de coniques qui lui correspondent il y en a une décomposée dans les deux droites d'un plan nodal et deux décomposées en une droite de l'autre plan nodal et la droite qui la coupe sans passer par D. Ces deux séries de coniques passent par D et y touchent respectivement les deux plans nodaux.

Considérée comme une cyclide, cette surface a deux sphères directrices d'inversions fondamentales proprement dites (ayant leurs centres dans les sommets des deux cônes de KUMMER non singuliers) et une sphère directrice réduite à un cône ayant le sommet en D. Des 3 quartiques focales les deux qui appartiennent aux premières sphères ont pour caractéristique [3 1], c'est-à-dire ont un point de rebroussement en D, tandis que l'autre ayant pour caractéristique $[\overline{2}\ 1\ 1]$ a seulement un point double en D. Les quadriques déférentes des deux premières les osculent donc en D, tandis que la quadrique déférente de l'autre sphère ne fait que passer par D. — Cette cyclide s'obtient par inversion d'un paraboloïde.

44. $[\overline{1}\ 3\ 1]$ *Surface de la* 9^e^ *classe à deux droites doubles et un point biplanaire de la* 1^e^ *espèce.* Par le point biplanaire D passent encore deux couples de droites r_1, r_1' et r_2, r_2' dans les deux plans nodaux, et r_1, r_2, par exemple, coupent une droite double, tandis que r_1', r_2' coupent l'autre droite double. Des autres 4 droites de la surface, deux, s_1, s_2, coupent la seconde droite double (et respectivement r_1, r_2) et les deux autres s_1', s_2' la première (et respectivement r_1', r_2'). Il y a un cône de KUMMER non singulier et un singulier ayant le sommet en D. La surface a deux inversions fondamentales, dont l'une a pour centre le sommet du premier cône de KUMMER et pour quadrique directrice un cône passant par D, et l'autre a pour centre le point d'intersection des deux droites doubles et pour quadrique directrice une quadrique passant aussi par D (et, comme toujours, sans que nous nous arrêtions à le dire, par ces droites doubles). On obtient une telle surface en transformant par inversion conique une quadrique tangente au plan de l'absolu de cette inversion.

45. $[\overline{3}\ 1\ 1]$ *Surface de la* 9^e^ *classe à deux droites doubles se croisant en un point triplanaire.* Cette surface s'obtient, comme le montre sa caractéristique, en projetant Γ par un point du cône f. Les tangentes quadriponctuelles dans le point triple D (projection de M) d'intersec-

tion des deux droites doubles d_1, d_2 appartiennent au plan de celles-ci, ou bien à deux autres plans qui passent respectivement par ces droites doubles et sont les projections de μ_1, μ_2: c'est pour cela que nous appelons *triplanaire* ce point triple (nous rencontrerons d'ailleurs plusieurs espèces de points triples dont le cône tangent du 3e ordre se décompose en 3 plans). Dans ces deux autres plans il y a deux autres couples de droites de la surface $r_1 r_1'$ et $r_2 r_2'$ passant par D, et la surface contient encore 4 autres droites $s_1 s_1'$ et $s_2 s_2'$ dans les plans qui joignent d_2 à r_1, r_1' et d_1 à r_2, r_2'. Les coniques de la surface situées dans les plans passant par d_1 ou par d_2 passent toutes par le point triple et y touchent respectivement les deux plans singuliers nommés qui contiennent d_2 et d_1. Il y a deux cônes de KUMMER non singuliers et en conséquence deux couples de séries de coniques sur la surface (outre les séries des coniques appartenant aux plans qui passent par d_1 ou par d_2). Il y a deux inversions coniques fondamentales ayant pour centres les sommets des deux cônes de KUMMER.

$\{3\ 2\}$.

46. La surface Γ ayant cette caractéristique a deux points doubles M, M', dont l'un M est le sommet d'un cône f du faisceau tangent à l'espace qui touche en M toutes les variétés du faisceau, tandis que M' est le sommet de l'autre cône f' du faisceau et ne fait que se trouver sur les autres variétés. Il s'ensuit que le cône quadrique ordinaire tangent à Γ en M' ne se décompose pas, tandis que le cône tangent en M se décompose en deux plans μ_1, μ_2. Et comme la droite MM' est contenue dans Γ et en conséquence dans l'un μ_1 de ces deux plans, et l'espace tangent en M au faisceau touche f' le long de MM' et le coupe en conséquence suivant deux plans passant par MM' et coupant encore μ_2 en deux droites, il s'ensuit que par le point M passent la droite MM', le long de laquelle Γ a un plan tangent fixe μ_1, et deux autres droites $r\, r_1$ de la surface Γ situées dans le plan μ_2; et de même on voit que par M' passe seulement une autre droite r' de Γ outre MM'. Le plan générateur de f de même système que μ_2 et qui passe par MM' contient la droite r'; les plans générateurs de f de même système que μ_1 et qui passent par r et r_1 contiendront encore deux droites s et s_1 de Γ, lesquelles seront aussi dans les deux plans générateurs de f' qui passent par r'. Ce sont là toutes les droites de Γ.

47. [3 2] *Surface de la 7e classe à conique double générale, un point conique et un point biplanaire de la 1e espèce.* La droite qui

joint ces deux points doubles appartient à la surface et a dans tous ses points un même plan tangent, qui est un plan nodal pour le point biplanaire : l'autre plan nodal contient les deux autres droites de la surface qui passent par ce point. Par le point conique il ne passe plus qu'une autre droite de la surface ; celle-ci contient en outre deux autres droites coupant cette dernière droite et respectivement ces deux-là. Il y a seulement deux cônes de KUMMER singuliers ayant leurs sommets dans les deux points doubles (et touchant toujours le cône nodal et le couple de plans nodaux de ces deux points dans leurs couples de tangentes quadriponctuelles), et à chacun desquels correspond un couple de séries de coniques de la surface ; et on voit par ce que nous avons dit au n^0 précédent combien de coniques décomposées en deux droites il y a dans chaque série.

Considérée comme cyclide, cette surface n'a pas d'inversions fondamentales propres ; mais dans les deux sphères (directrices) nulles ayant leurs centres dans le point biplanaire et dans le point conique il y a les deux quartiques focales de la surface, qui auront pour caractéristiques $[\bar{2}\,2]$ et $[3\,\bar{1}]$ et seront en conséquence l'une décomposée en une droite et une cubique passant toutes les deux par les deux points doubles, l'autre une quartique ayant un point de rebroussement dans le point biplanaire. On voit par là quelles positions particulières auront les deux quadriques déférentes qui correspondent à ces sphères nulles, puisqu'elles les coupent justement dans ces quartiques. — Cette cyclide est la transformée par inversion d'une quadrique osculant l'absolu (c'est-à-dire coupant le plan à l'infini suivant une conique ayant un contact triponctuel avec l'absolu), et aussi d'un paraboloïde dont une des génératrices à l'infini soit tangente à l'absolu.

48. $[\bar{2}\,3]$ *Surface de la* 7^e *classe à point biplanaire de la* 1^e *espèce et deux droites doubles se croisant en un point triple.* Le point triple a, outre le plan des droites doubles, un cône quadrique de tangentes quadriponctuelles : ce cône contient la droite de la surface joignant ce point triple au point biplanaire et en outre une autre droite simple de la surface. La surface a le long de la première droite un seul plan tangent, qui est un plan nodal pour le point biplanaire : l'autre plan nodal contient deux autres droites de la surface passant par ce point et coupant respectivement les deux droites doubles. Les plans qui joignent celles-ci à la seconde droite simple passant par le point triple coupent encore la surface en deux autres droites. Il y a un cône de KUMMER singulier ayant le sommet dans le point

biplanaire et auquel correspondent deux séries de coniques de la surface; il n'y a pas d'inversions fondamentales. On a cette surface par une inversion conique sur une quadrique passant par le sommet du cône directeur et tangente (ailleurs) au plan d'inversion.

49. [$\overline{3}\,2$] *Surface de la 7e classe à point conique et deux droites doubles se croisant en un point triplanaire.* Dans le point triple D (projection de M) les tangentes quadriponctuelles forment outre le plan des deux droites doubles d_1, d_2 deux plans δ_1, δ_2 passant respectivement par celles-ci et dont l'un δ_1 touche la surface le long de la droite qui joint D au point conique D' (projection de M') et l'autre δ_2 contient deux autres droites $r\, r_1$ de la surface passant par D. Le plan joignant la droite DD' à la droite double d_2 coupe encore la surface en une autre droite r' passant par D'; les plans $d_1 r$, $d_1 r_1$ contiennent enfin les deux dernières droites de la surface. Celle-ci a un cône de KUMMER singulier dont le sommet est dans le point conique D'. Elle est la transformée par inversion conique d'une quadrique tangente dans le sommet du cône directeur à l'une des deux génératrices de ce cône formant l'absolu de l'inversion.

50. *Surface de la 7e classe à droite double et droite cuspidale se croisant en un point triple.* On obtient (v. n⁰ 40) cette surface S, qui est un cas particulier de celle considérée au n⁰ précédent (le cas dans lequel la droite DD' joignant le point conique avec le point triple va coïncider avec la droite double d_2), en projetant Γ par un point P du plan μ_1 tangent à Γ le long de la droite MM'. Alors cette droite sera projetée suivant la droite cuspidale de S, le point M' suivant un point-clos de cette droite et M suivant le point triple (dans lequel se confondra l'autre point-clos de la droite cuspidale de la surface générale, étudiée au n⁰ 40, douée d'une droite double et une droite cuspidale). Le premier point aura un plan singulier coupant la surface en la droite cuspidale comptée 3 fois et en une droite simple passant par ce point: dans ce plan coïncident donc à présent les plans tangents à la surface dans les différents points de la droite cuspidale (ce que l'on peut aussi voir directement par notre méthode). Quant au point triple, remarquons qu'un espace quelconque passant par PM coupe Γ en une quartique ayant en M un point double dont une tangente est sur μ_1, c'est-à-dire est PM même, et l'autre est sur μ_2, de sorte qu'en projetant nous avons que: *chaque section plane de* S *passant par le point triple a dans ce point un point triple, par lequel passe une branche formant un point*

stationnaire dont la tangente appartient au plan des deux droites doubles, et une autre branche simple dont la tangente appartient à un plan singulier qui passe par la droite cuspidale et coupe encore la surface suivant deux droites passant par le point triple. Toutes les coniques de S dans les plans qui passent par la droite double ont en ce point pour tangentes les droites de ce plan singulier; et toutes les coniques de S dans les plans qui passent par la droite cuspidale sont tangentes à cette droite dans le point triple de la surface. Outre les droites nommées la surface contient encore 2 droites, etc.

{4 1}.

51. Le point double M de la surface Γ ayant cette caractéristique est le sommet d'un cône f du faisceau tel que l'espace tangent en M à toutes les variétés de celui-ci touche aussi ce cône f le long d'une droite r appartenant à Γ et coupe en conséquence ce cône dans les deux plans générateurs μ_1, μ_2, qui passent par cette droite: ceux-ci seront les deux plans tangents à Γ dans ce point double et couperont encore Γ respectivement suivant deux droites r_1, r_2 passant par M, de sorte que par M passent 3 droites r et r_1, r_2 de Γ. Dans les deux autres plans générateurs de f qui passent par r_1, r_2 il y aura encore 2 droites s_1, s_2 de Γ se coupant entre elles. L'autre cône du faisceau a un plan générateur tangent à Γ le long de la droite r, un autre, du même système, contenant les deux droites s_1, s_2 et un troisième, de l'autre système, contenant r_1, r_2.

52. [4 1] *Surface de la 8e classe à conique double générale et un point biplanaire de la 2e espèce.* Outre que par l'abaissement qu'il produit dans la classe de la surface, le point biplanaire D de cette surface et de la surface que nous considérerons ensuite diffère de ceux des surfaces [3 1 1], [$\overline{1}$ 3 1] en ce que par ce point D il ne passe plus 4 droites de la surface, mais seulement 3, l'une desquelles est l'intersection r des deux plans nodaux, tandis que les autres sont deux droites r_1, r_2 appartenant respectivement à ces deux plans. La surface a un seul plan tangent le long de r, et elle contient encore 2 droites s_1, s_2 coupant respectivement r_1, r_2 et se coupant entre elles. Il y a un cône de Kummer singulier ayant le sommet dans le point biplanaire (et tangent aux deux plans nodaux dans les tangentes quadriponctuelles): parmi les deux séries de coniques qui lui correspondent l'une contient les couples de droites $r\, r_1$ et $r_2\, s_2$, l'autre contient les couples $r\, r_2$ et $r_1\, s_1$. Il y a encore un cône de Kummer non singulier, qui est tangent au plan touchant la surface

le long de r et auquel correspondent deux séries de coniques, dont l'une contient la droite r comptée deux fois et le couple de droites $s_1 s_2$, tandis que l'autre contient seulement le couple $r_1 r_2$.

Comme cyclide cette surface a une sphère directrice d'une inversion fondamentale proprement dite ayant le centre dans le sommet de ce dernier cône de KUMMER et coupant sa quadrique déférente suivant une quartique focale, dont la caractéristique est [4] et qui se décompose en conséquence dans la droite r et une cubique tangente en D à r. Le point biplanaire D est le centre d'une autre sphère directrice nulle, qui coupe sa quadrique déférente en une quartique focale $[\bar{3}\,1]$, c'est-à-dire ayant un point de rebroussement en D. — On obtient cette cyclide en transformant par inversion un paraboloïde dont le point de contact avec le plan à l'infini soit sur l'absolu.

53. $[\bar{1}\,4]$ *Surface de la 8e classe à point biplanaire de la 2e espèce et deux droites doubles.* Par le point biplanaire passent encore 3 droites de la surface, dont l'une a un seul plan tangent, qui passe par une droite double, et les deux autres sont dans un même plan avec l'autre droite double. Par la première droite double passe encore un plan coupant la surface en deux droites qui s'appuient respectivement sur ces deux-là. Il y a seulement un cône de KUMMER singulier ayant le sommet dans le point biplanaire, et une inversion fondamentale dont la quadrique directrice passe par ce point et dont le centre est le point d'intersection des droites doubles. — Cette surface est la transformée par inversion conique d'une quadrique tangente au plan d'inversion en un point de l'une des deux droites qui forment l'absolu.

Si Γ est projetée par un point du plan tangent le long de r, on obtient comme cas particulier de la surface $[\bar{1}\,4]$ une *surface de la 8e classe à une droite double et une droite cuspidale*, qui s'obtient de celle générale étudiée au n^0 40 en supposant que les deux points-clos ordinaires DD' de la droite cuspidale de cette surface-là coïncident en un seul. Alors le plan singulier de ce point coupe la surface en deux droites passant par ce point même et la surface n'a plus que deux autres droites situées dans un plan qui passe par la droite double. Il y a un cône de KUMMER ayant le sommet dans ce point-clos, etc.

54. $[\bar{4}\,1]$ *Surface de la 8e classe à deux droites doubles se croisant en un point triplanaire.* Le point triple de cette surface se di-

stingue de celui de la surface $[\overline{3}\,1\,1]$ par exemple, en ce qu'il a, outre le plan des deux droites doubles d_1, d_2, deux autres plans de tangentes quadriponctuelles passant respectivement par celles-ci et se coupant en une droite r de la surface: ces deux plans contiennent encore respectivement deux droites r_1, r_2 de la surface, et les plans $d_2 r_1$, $d_1 r_2$ coupent encore celle-ci suivant deux droites s_1, s_2 se coupant entre elles. La surface a un cône de KUMMER non singulier et dans les deux séries de coniques qui lui correspondent l'une contient la droite r comptée deux fois (dans un plan qui touche la surface le long de r) et le couple de droites $s_1 s_2$, l'autre série contient le couple $r_1 r_2$. La surface a une inversion conique fondamentale dont le centre est le sommet de ce cône de KUMMER.

{5}.

55. La surface Γ ayant cette caractéristique appartient à un seul cône quadrique f, qui touche l'espace tangent dans son sommet M à toutes les variétés quadratiques du faisceau (Γ) le long d'une droite r de Γ et le coupe en outre en deux plans μ_1, μ_2 passant par r et dont l'un μ_1 touche Γ tout le long de cette droite r, tandis que l'autre μ_2 coupe encore Γ suivant une autre droite r' passant par M. Par celle-ci il passe encore un autre plan générateur de f (de même système que μ_1), lequel coupera encore Γ suivant une autre droite s qui ne passe pas par M. La surface Γ n'a que ces 3 droites r, r', s.

56. [5] *Surface de la 7e classe à conique double générale et un point biplanaire de la 3e espèce.* Le point biplanaire D de cette surface a non seulement, comme le point biplanaire de la surface [4 1], une droite r de la surface pour intersection des deux plans nodaux, mais en outre pour l'un de ces deux plans le plan tangent à la surface le long de r. Seulement l'autre plan nodal contient encore une droite r' passant par D; la surface a enfin une troisième droite s qui coupe r'. Elle n'a qu'un cône de KUMMER singulier dont le sommet est le point biplanaire: des deux séries de coniques qui lui correspondent l'une contient la droite r comptée deux fois et le couple $r's$, tandis que l'autre contient seulement le couple rr'.

Comme cyclide cette surface n'a qu'une quartique focale sur la sphère nulle ayant le centre en D: cette quartique ayant la caractéristique $[\overline{4}]$ se décompose en la droite r et une cubique qui la touche en D. Il n'y a pas d'inversion fondamentale, mais cette sphère (directrice) a une quadrique déférente contenant cette quartique focale et qui est, comme en général, le lieu des centres des sphères passant par D et coupant la cyclide suivant des couples de cercles. On obtient cette cyclide en transformant par inversion un paraboloïde dont une des génératrices à l'infini touche l'absolu dans le point d'intersection avec l'autre.

57. [$\overline{5}$] *Surface de la 7e classe à deux droites doubles se croisant en un point triplanaire.* Des deux plans de tangentes quadriponctuelles dans le point triple de cette surface, autres que le plan des deux droites doubles, l'un passe par une droite double d_1 et touche la surface le long d'une autre droite r passant par le point triple, tandis que l'autre joint la seconde droite double d_2 à r et coupe encore la surface en une autre droite r' passant par ce point. Le plan d_1r' coupe enfin la surface en une troisième droite simple s. Cette surface n'a aucun cône de KUMMER et ne contient en conséquence d'autres coniques que celles qui appartiennent aux plans passant par l'une ou l'autre des deux droites doubles.

Comme cas particulier de cette surface on a, en supposant que le centre de projection de Γ soit pris sur μ_1, une *surface de la 7e classe à droite double et droite cuspidale se coupant en un point triple*; surface qui n'est qu'un cas particulier de celle étudiée au n^0 50; le cas dans lequel le point-clos qu'il y avait sur la droite cuspidale se confond avec le point triple. Ce point triple jouira encore des mêmes propriétés, mais le plan singulier dont nous parlions alors coupera maintenant la surface dans la droite cuspidale comptée 3 fois (le long de laquelle il sera donc le plan tangent constant) et une droite simple passant par le point triple. Dans le plan qui joint cette droite à la droite double il y aura encore une deuxième droite simple de la surface.

Nous avons ainsi fini d'étudier toutes les espèces de surfaces qui sont des projections de $F_2^{2.2}$ contenues dans des faisceaux de variétés quadratiques dans lesquels tous les cônes sont de 1e espèce. Nous allons maintenant nous occuper des autres espèces de surfaces.

Propriétés des espèces de surfaces douées de couples de points doubles [63].

58. Considérons les projections de ces surfaces Γ, qui sont l'intersection d'un faisceau de variétés quadratiques dans lequel il y a

---

[63] Par *couple* de points doubles nous entendrons deux points doubles (di-

un cône de 2e espèce, et dont la caractéristique contient en conséquence un couple d'exposants de diviseurs élémentaires correspondant tous les deux à ce cône.

Un cône de 2e espèce f contient ∞^1 plans générateurs formant un seul système et passant tous par la droite double ou *arête* de ce cône. Ces plans coupent une autre variété du faisceau, et en conséquence aussi la surface Γ en ∞^1 coniques *formant une seule série* (tandis que les plans générateurs d'un cône de 1e espèce du faisceau donnent lieu à deux séries de coniques): toutes ces coniques passent par les points d'intersection de l'arête du cône avec une autre variété du faisceau, c'est-à-dire avec Γ. Ces points d'intersection sont deux si le groupe de la caractéristique qui correspond à ce cône est (1 1), ils coïncident en un seul si ce groupe est (2 1), (3 1), ou (4 1), et enfin ils sont tous les points de l'arête lorsque la caractéristique est $\{(2\ 2)\ 1\}$ ou bien $\{(3\ 2)\}$ (64). Dans ces deux derniers cas l'arête étant contenue dans Γ, tous les plans générateurs du cône coupent Γ en cette arête et en une autre droite, de sorte que la surface Γ contient (non plus ∞^1 coniques proprement dites mais) ∞^1 droites appuyées sur l'arête, c'est-à-dire elle est *réglée*. Dans les autres cas au contraire on voit facilement que le nombre des droites contenues dans Γ est fini et on peut aussi construire ces droites sans peine.

En effet remarquons avant tout qu'un point de l'arête qui appartienne aussi à Γ en sera un point double; d'où il suit que les surfaces réglées $\{(2\ 2)\ 1\}$ et $\{(3\ 2)\}$ ont une droite double et que toutes les autres surfaces Γ, dont nous nous occupons à présent, ont sur l'arête du cône de 2e espèce un couple de points doubles, qui peuvent aussi devenir infiniment voisins. Or une droite de Γ doit nécessairement couper cette arête, car autrement l'espace qui la joindrait à l'arête appartiendrait à ce cône f, c'est-à-dire celui-ci se décomposerait en deux espaces, ce que nous excluons. Donc dans les cas $\{(2\ 2)\ 1\}$, $\{(3\ 2)\}$ nous pouvons dire que toutes les droites de la surface Γ, sans exceptions, couperont sa droite double; dans les autres cas que toutes les droites de Γ passent par l'un ou l'autre des deux

---

stincts ou coïncidents) joints par une droite qui n'appartient pas à la surface: nous verrons qu'en effet deux tels points doubles s'obtiennent ensemble, comme couple de points.

(64) Nous renverrons encore pour cette proposition et pour d'autres, que nous énoncerons bientôt et dont la démonstration ne présente d'ailleurs aucune difficulté, à notre Mémoire *Studio sulle quadriche*, etc. déjà cité.

points doubles situés sur l'arête du cône de 2^e espèce. Soit M l'un de ces deux points: les droites de Γ qui y passent s'obtiennent encore comme lorsqu'il s'agissait d'un point double de Γ appartenant comme sommet à un cône de 1^e espèce du faisceau. L'espace tangent en M commun à toutes les variétés du faisceau les coupe en un faisceau de cônes ordinaires ayant le sommet en M: les 4 génératrices, distinctes ou non, communes à ces cônes seront les droites de Γ qui passent par M. Parmi ces cônes celui d'intersection de cet espace tangent avec f est le *cône quadrique tangent* en M à Γ. Nous voyons donc que, excepté dans les cas $\{(2\,2)\,1\}$, $\{(3\,2)\}$, que nous exclurons dorénavant, la surface Γ ne peut avoir plus que 8 droites, et que chaque droite de Γ doit passer par l'un ou par l'autre des deux points doubles de Γ situés sur l'arête de f, de manière que par chacun de ceux-ci il en passe en général et au plus 4. Ajoutons que les droites de l'un et de l'autre groupe sont par couples sur autant de plans générateurs de f et forment dans la série de coniques de Γ, que nous avions considérée, autant de coniques décomposées en des couples de droites.

59. En projetant ces surfaces Γ sur R_3 nous obtenons des surfaces S du 4^e ordre ayant deux points doubles, distincts ou coïncidents, tels que la droite qui les joint (projection de l'arête a de f) *n'appartient pas* à ces surfaces (tandis que pour les deux points doubles des surfaces $[2\,2\,1]$, $[3\,2]$, etc. nous avons vu que la droite qui les joint appartient à celles-ci). Ces surfaces S auront une conique double générale ou bien décomposée en deux droites suivant que le centre de projection P est sur une variété quelconque du faisceau (Γ) ou bien sur un cône de 1^e espèce. Mais ici il se présente encore un autre cas que nous n'avions pas à considérer pour les espèces de surfaces déjà étudiées: celui dans lequel le centre de projection P se trouve sur un cône de 2^e espèce f du faisceau. Dans ce cas par le point P il ne passe plus qu'un seul plan générateur de f: le plan qui le joint à l'arête a de f. Ce plan coupe Γ suivant une conique qui est projetée par P sur R_3 suivant une droite d de S, droite dont chaque point correspondra à deux points de cette conique et qui sera en conséquence double pour S. Pour mieux voir le caractère de cette droite double d de S cherchons l'intersection de S avec un plan quelconque de R_3: elle est la projection de l'intersection de Γ avec un espace quelconque passant par P. Un tel espace coupe f suivant un cône quadrique ordinaire passant par P, et Γ suivant une quartique de 1^e espèce située dans ce cône. La génératrice de ce cône

qui passe par P coupe la quartique en deux points dont les tangentes à cette courbe sont dans le plan tangent à ce cône le long de cette génératrice, plan qui appartient à l'espace π tangent à f en P (c'est-à-dire le long du plan générateur Pa): donc la projection de cette quartique est une courbe plane du 4e ordre ayant dans le point d'intersection de son plan avec d un point de contact de deux branches, dans lequel la tangente commune aux deux branches appartient à un plan fixe ϱ passant par d (le plan d'intersection de l'espace π avec R_3). Cela nous montre que la droite double d de S est la limite de deux droites doubles qui dans le plan ϱ viennent coïncider l'une avec l'autre: ce qui nous est confirmé par ce fait que lorsque le centre P de projection est sur un cône de 1e espèce la surface S projection de Γ a deux droites doubles, intersections de R_3 avec les deux plans générateurs de ce cône qui passent par P, et que si ce cône devient de 2e espèce les deux systèmes de plans générateurs, et en conséquence aussi ces deux plans passant par P, viennent coïncider, et les deux droites doubles de S coïncideront aussi entre elles. Nous appellerons en conséquence et pour abréger *bidouble* la droite double particulière d de S.

Elle contient deux points triples, distincts ou coïncidents, qui sont les projections des deux points doubles de Γ appartenant à l'arête a de f. Comme les plans générateurs de f coupent Γ suivant des coniques passant par ces deux points, de même les plans menés par la droite bidouble d coupent S, outre que dans cette droite, suivant des coniques passant par les deux points triples; pour le plan ϱ tangent à S le long de d l'intersection avec la surface se compose de la droite d comptée 4 fois. Parmi les plans passant par d il y en a 4 dans le cas le plus général $[(\overline{1\ 1})\ 1\ 1\ 1]$ qui coupent S en des coniques décomposées en deux droites.

Outre les deux points triples il y a encore sur d deux points remarquables: ceux dans lesquels R_3 est coupé par les tangentes menées de P à la conique d'intersection de Γ avec le plan Pa. Chaque espace passant par l'une de ces tangentes coupe Γ en une quartique située sur un cône ordinaire dont cette droite est une génératrice tangente à la quartique; donc en projetant: *il y a sur la droite bidouble de* S *deux points-pinces tels que chaque section plane passant par l'un d'eux y a un point de rebroussement de 2e espèce.* Ces deux points-pinces coïncident si P est sur l'un des plans générateurs de f qui coupent Γ en un couple de droites: alors deux droites de S se confondent avec d.

60. En supposant maintenant que le centre de projection P soit sur une variété φ du faisceau générale ou réduite à un cône de 1e ou de 2e espèce nous appellerons M', M'' les deux points d'intersection (distincts ou coïncidents) de l'arête a de f avec Γ et D', D'' leurs projections sur R_3, qui sont des points doubles (ou triples) de S, points qui sont joints par une droite d qui ne cesse d'être déterminée, même lorsqu'ils viennent coïncider, puisque cette droite est la projection de l'arête a. Cela posé remarquons que le système des ∞^2 espaces tangents à une F_3^2 qui soit un cône se réduit, lorsque ce cône passe de la 1e espèce à la 2e, au système des espaces passant par l'arête de ce cône, car chacun de ces espaces coupe le cône de 2e espèce en un couple de ses plans générateurs. Les ∞^1 espaces tangents (en un sens plus étroit) au cône de la 2e espèce f le coupent chacun en un plan générateur compté deux fois et touchent en conséquence la surface Γ le long de coniques. En considérant donc les intersections de ces systèmes de ∞^2 et de ∞^1 espaces avec φ et avec Γ et en projetant par P nous voyons que, comme pour chaque cône quadrique de 1e espèce passant par Γ on obtient dans R_3 une série de ∞^2 quadriques passant par la conique double et doublement tangentes à S, ou, pour mieux dire, coupant encore S suivant des couples de coniques, de même pour un cône quadrique de la 2e espèce f on a que: *Chacune des ∞^2 quadriques passant par la conique double et par les deux points doubles* D′, D″ *de* S *coupe encore cette surface en deux coniques passant par ces points doubles.* Et en particulier *tous les plans qui passent par la droite* d *joignant ces deux points doubles* D′, D″ *coupent* S *en des couples de coniques. Toutes les coniques de* S *ainsi obtenues forment un même système.* Le faisceau de ces plans tient ici la place du système des plans tangents d'un cône de Kummer correspondant à un cône de 1e espèce passant par Γ. — *Parmi les ∞^2 quadriques passant par la conique double et par* D′, D″ *il y en a ∞^1 dont chacune touche la surface* S *le long d'une conique.* Et comme par chaque point de R_4, et en particulier par le point P, passent en général deux espaces tangents (proprement dits) du cône de la 2e espèce f, nous avons que: *Chacune des surfaces* S *que nous considérons est l'enveloppe d'un système simplement infini du 2e ordre de quadriques passant par la conique double et par les deux points doubles* D′, D″. *Il y a dans ce système de quadriques deux plans* (avec le plan de la conique double), *c'est-à-dire pour une telle surface* S *il passe par la droite* d *deux plans qui la touchent respectivement le long de deux coniques.* Ces deux plans remplacent le cône de Kummer, comme

lieu de points [65]. Ils sont touchés par les deux cônes quadriques tangents à S en D', D'' suivant deux couples de droites qui sont les tangentes quadriponctuelles de ces points doubles, c'est-à-dire les tangentes en ces points aux deux coniques de contact de ces deux plans avec S.

Nous pouvons aussi voir facilement que la propriété d'être touchées le long d'une conique par une quadrique passant par la conique double caractérise les surfaces S que nous considérons à présent par rapport à celles déjà étudiées. Car s'il existe pour une surface S une telle quadrique, il y aura dans R_4 un espace coupant Γ en une conique comptée deux fois: cet espace coupera donc le faisceau des F_3^2 passant par Γ en un faisceau de quadriques se touchant le long de cette conique; parmi ces quadriques il y a le plan de celle-ci compté deux fois: donc parmi ces variétés il y en a une qui est touchée le long de ce plan par cet espace, ce qui ne peut arriver que pour un cône de la 2^e espèce.

Les raisonnements faits dans ce n^0 ont lieu, quelle que soit la position du centre de projection P: cependant si P se trouve sur le cône de 2^e espèce f dont il s'agit, ils ne nous donnent pour la surface à droite bidouble que des propriétés que nous connaissions déjà, c'est-à-dire que chaque plan passant par cette droite d coupe encore la surface en une conique, qui ne coïncide avec cette droite que pour le plan ϱ.

61. La conique double de S est encore la projection de la quartique d'intersection k^4 de Γ avec l'espace π tangent en P à φ; on trouve encore comme en général les 4 points-pinces de cette conique double, etc. etc. Il y a seulement à remarquer que la cubique gauche qui passait en général par les sommets des cônes de Kummer, par les points diagonaux du quadrangle formé par les 4 points-pinces et par le point d'intersection des plans tangents singuliers de ceux-ci, et qui avait pour cordes les tangentes singulières de ces points, se décomposera (comme il résulte immédiatement de la démonstration que nous avions donnée de cette proposition) en la droite d du couple de points doubles D', D'', droite qui contiendra un de ces points diagonaux et sera coupée par ces 4 tangentes singulières, de sorte qu'il y aura encore une conique contenant les deux autres points diagonaux, les sommets des cônes de Kummer proprement dits et le

---

[65] Comme l'a déjà remarqué M. Kummer même.

point d'intersection des plans tangents singuliers des 4 points-pinces, et qui coupera les tangentes singulières de ceux-ci et la droite d. Cette conique se décomposera encore en deux droites si la surface a un autre couple de points doubles semblable à $D'D''$, c'est-à-dire si Γ appartient à deux cônes quadriques de 2e espèce.

62. Dans les cas étudiés les surfaces S avaient un nombre fini d'inversions fondamentales; dans les cas que nous considérons à présent il y en a au contraire ∞^1. Car nous avons vu qu'on obtenait une quadrique directrice d'une inversion fondamentale en projetant par P sur R_3 l'intersection de φ avec un espace ayant un même pôle par rapport à toutes les F_3^2 du faisceau. Un tel espace est l'espace polaire d'un point double d'un cône du faisceau. Si donc dans celui-ci il y a un cône de 2e espèce f chaque point de son arête a ayant un seul espace polaire par rapport au faisceau, aux ∞^1 points de a correspondront ∞^1 espaces polaires formant un faisceau d'espaces dont le plan commun, plan polaire de a par rapport à Γ, contient les sommets des autres cônes du faisceau (et, s'il y a encore un autre cône de 2e espèce, l'arête de celui-ci). Parmi ces espaces il y en a deux qui touchent φ (et tout le faisceau) dans les deux points D', D'' et un qui passe par le centre P. Donc :

La surface S *a un système de* ∞^1 *inversions fondamentales : les centres de ces inversions ont pour lieu la droite* d, *et les quadriques directrices (par rapport auxquelles ces centres sont les pôles du plan de la conique double) forment un faisceau, car elles passent toutes par la conique double de* S *et par une conique* δ^2 *placée dans un plan qui contient les sommets des cônes de* KUMMER *de* S. *Parmi ces quadriques il y a deux cônes ayant pour sommets les points* D′,D″ *(auxquels correspondent des inversions impropres ayant aussi ces points respectivement pour centres) et il y a la quadrique décomposée dans le plan de* δ^2 *et le plan de la conique double, quadrique dont le centre d'inversion correspondant est sur ce dernier plan. Donc parmi les inversions fondamentales il y a une homologie harmonique, c'est-à-dire la surface* S *se correspond à soi-même dans une homologie harmonique ayant pour plan d'homologie le plan de* δ^2 *et pour centre d'homologie le point d'intersection de la droite* d *avec le plan de la conique double.*

Outre ces ∞^1 inversions fondamentales la surface S peut en avoir des autres en nombre fini correspondentement aux sommets des cônes de 1e espèce passant par Γ et aussi un autre système de ∞^1 si Γ est sur deux cônes de 2e espèce. Dans le cas [(1 1) 1 1 1], qui est le plus général pour nos surfaces, il y a outre le système de ∞^1 inversions 3 autres inversions fondamentales. Les quadriques directrices de ces nouvelles inversions fondamentales passeront dans chaque cas par D', D'', car les espaces polaires des sommets (et des points des arêtes) de cônes du faisceau différents de f passent par a.

63. Ces importantes propositions ne cessent de valoir si la conique double de S se décompose, c'est-à-dire si on prend P sur un cône (de 1e ou de 2e espèce) du faisceau des F_3^2. On voit ainsi que:

Si la conique double de S *se décompose en deux droites, les quadriques directrices de ces* ∞^1 *inversions fondamentales sont des cônes d'un faisceau dans lequel deux des droites communes sont les deux droites doubles et les deux autres passent en conséquence par le point d'intersection de celles-ci (sommet commun à ces cônes) et sont dans un plan avec les sommets des cônes de* KUMMER *de* S. *Ce plan est le plan d'homologie pour une homologie harmonique qui transforme en soi-même la surface* S *et dont le centre d'homologie est le point d'intersection du plan des droites doubles avec la droite* D′D″ *(qui est toujours le lieu des centres des inversions fondamentales).*

Pour la surface à droite bidouble d *avec le plan tangent* ϱ *il y a une* ∞^1 *d'inversions fondamentales dont les centres sont sur cette même droite et les quadriques directrices sont des cônes touchant le plan* ϱ *le long de cette droite* d *et se coupant encore mutuellement en une conique* δ^2 *(qui se décompose seulement lorsque les deux points triples* D′, D″ *coïncident). Le centre d'une telle inversion et le sommet du cône directeur correspondant sont conjugués harmoniquement par rapport aux deux points triples* D′, D″. *En particulier il y a parmi ces inversions une homologie ayant pour plan d'homologie le plan de* δ^2 *et pour centre d'homologie le conjugué harmonique de ce plan par rapport aux deux points triples (et aux deux points pinces).*

64. En prenant la conique double (non décomposée), réelle ou imaginaire, de la surface S comme absolu, c'est-à-dire en considérant S comme une cyclide nous aurons d'autres propriétés de cette surface. Elle contient ∞^1 cercles passant par les deux points doubles D', D'', et le long desquels elle est touchée par ∞^1 sphères, parmi lesquelles il y a deux plans tangents le long de deux cercles. Dans le plan perpendiculaire au segment $D'D''$ dans son point de milieu il y a un cercle δ^2 d'intersection des deux sphères nulles ayant pour centres D', D'': toutes les sphères qui passent par ce cercle (c'est-à-dire toutes les sphères du faisceau déterminé par ces deux sphères nulles) sont directrices pour des inversions qui transforment

la cyclide en elle-même. En particulier cette cyclide est symétrique par rapport au plan de δ^2.

Les centres des sphères inscrites dans la cyclide sont sur une conique, car ces centres sont les projections des pôles par rapport à φ des espaces tangents à f et ces pôles forment effectivement une conique appartenant au plan polaire de l'arête a de f, plan dont la projection est, comme nous avons vu, le plan de δ^2. Donc cette conique, lieu des centres des sphères inscrites dans la cyclide, est dans un plan avec le cercle δ^2 : nous l'appellerons *conique déférente* de ce *cercle directeur*, par analogie avec la quadrique déférente d'une sphère directrice, qui correspond à un cône de 1^e espèce du faisceau. Comme toutes ces sphères inscrites dans la cyclide passent par les deux points D', D'', elles seront orthogonales au faisceau de sphères (δ^2). Lorsque la conique déférente et le cercle directeur δ^2 sont donnés la cyclide est parfaitement déterminée comme l'enveloppe des sphères ayant leurs centres sur la conique déférente et (orthogonales au faisceau des sphères passant par δ^2, c'est-à-dire) passant par D', D''.

Les quadriques et les coniques déférentes d'une cyclide appartiennent à un système de quadriques homofocales ; car la démonstration donnée (n^0 22) de cette proposition pour les quadriques déférentes s'applique à la lettre aux cas où il y a aussi des coniques déférentes. Et on voit aussi de la même manière que les points d'intersection du cercle δ^2 avec sa conique déférente sont des *foyers* pour la cyclide, ce qui résulte d'ailleurs de ce que lorsque le centre d'une sphère inscrite dans la cyclide vient en un de ces points (points communs à un faisceau de sphères orthogonales à celle-là), elle s'annulle, c'est-à-dire se réduit à un cône passant par l'absolu et touchant la cyclide le long d'un cercle, et son centre sera en conséquence un véritable foyer. — Ces foyers sont les projections des points de φ dont les espaces tangents à cette variété sont aussi tangents à f. Cela montre que lorsque notre cyclide a des points doubles différents de D', D'' ils paraissent aussi parmi les foyers : le cercle de contact de la surface avec la sphère nulle ayant un tel foyer pour centre s'annulle, ou, si l'on veut, se réduit à deux droites passant par ce point et le long desquelles la surface est touchée par cette sphère nulle. Cependant il est bien clair que de tels points doubles ne sont pas des foyers proprement dits.

Nous avons aussi déjà vu (n^0 25) comment on peut déterminer dans chaque cas la caractéristique de ce quaterne de foyers et en conséquence ses particularisations. Quant aux quartiques focales la même méthode nous en donnera encore les particularisations ; ainsi dans le cas le plus général [(1 1) 1 1 1] il y aura 3 quartiques focales ayant la caractéristique [(1 1) 1 1], et se décomposant en conséquence en des couples de cercles (66). Donc les 3 sphères directrices touchent leurs quadriques déférentes dans les deux points D', D'' et les coupent en conséquence en des couples de cercles passant par ceux-ci.

Une cyclide appartenant aux espèces que nous considérons à présent a une série de lignes de courbure composée des cercles passant par les deux points doubles D', D''. En effet en un point quelconque de Γ le plan tangent est coupé par le cône de 2e espèce f suivant une droite double (puisque ce plan appartient à l'espace tangent en ce même point à f, espace qui coupe f suivant un plan double), et cette droite est, comme l'on voit, la tangente en ce point de Γ à la conique de Γ qui y passe et qui appartient à un plan générateur de f. Donc (n^0 23) en projetant sur R_3 on a qu'en un point quelconque de la cyclide la tangente au cercle de la cyclide passant par D', D'' est l'une des deux directions de courbure de la surface dans ce point, c'est-à-dire toute cette série de cercles de la cyclide forme l'une des deux séries de lignes de courbure.

65. Il y a un cas particulier remarquable des espèces de surfaces à conique double générale dont nous nous occupons à présent: celui dans lequel les deux points doubles D', D'' vont se poser sur la conique double (67). On obtient ce cas en projetant la surface Γ correspondante par un point P d'une variété générale φ du faisceau, qui soit sur le plan polaire de l'arête a de f par rapport à φ (et à toutes les variétés du faisceau), car alors l'espace π tangent en P à φ passe par a, de sorte que les deux points doubles M', M'' de Γ situés

(66) Comme dans les cas présents la développable focale se décompose dans les cônes projetant l'absolu par les foyers, il est clair que les cercles focaux, lignes doubles de cette développable, ne sont que les intersections de ces cônes deux-à-deux.

(67) Nous nous sommes déjà occupés dans la note au n^0 33 du cas dans lequel un seul point double d'une surface va se poser sur la conique double et nous retrouverons en effet à présent quelques-unes des propriétés que nous avons alors obtenues pour cette surface-là. — Il faut remarquer que si l'on fait aller sur la conique double les deux points coniques non pas des surfaces [(1 1) 1 1 1], etc. (pour lesquelles ces deux points forment un *couple*), mais des surfaces [2 2 1], etc., alors cette conique double se décompose en deux droites, dont l'une devient cuspidale (v. n^0 40).

sur a seront projetés en deux points D', D'' de la conique double γ^2 de S. Voyons quelles singularités présenteront alors ces deux points pour S. Un espace mené par PM', par exemple, coupe Γ en une quartique ayant en M' un point double dont le plan des tangentes passe par P (car il appartient à l'espace tangent en M' au faisceau, espace qui passe par le plan polaire de a et en conséquence par P): donc la projection plane de cette quartique a dans la projection de M' un point de contact de deux branches. Donc *les deux points* D′, D″ *de* S *sont tels que chaque plan passant par l'un d'eux coupe* S *en une quartique ayant en ce point un point de contact de deux branches* : ils sont donc deux *points de contact de deux nappes de la surface (Selbstberührungspunkte).* On voit immédiatement que dans chacun de ces deux points singuliers coïncident deux des 4 points-pinces de la conique double. En outre comme pour obtenir cette surface on peut prendre le centre de projection arbitrairement sur un plan nous avons que : *la classe d'une telle surface est la même que celle de la surface la plus générale ayant la même caractéristique.* Ainsi la surface du 4e ordre à conique double douée de deux points de contact de deux nappes est dans le cas le plus général de la classe 8.

Parmi les espaces passant par PM' chacun de ceux, qui touchent φ en un point de cette droite et qui forment en conséquence un faisceau autour du plan tangent le long de PM' à φ, coupe φ en un cône ordinaire et Γ en une quartique de ce cône ayant M' pour point double. Donc la projection de cette quartique par P a en D' un point d'osculation de deux branches. Remarquons en outre que parmi les espaces tangents à φ dans les points de PM' et de PM'' il y a l'espace π tangent en P et les espaces tangents en M', M'' chacun desquels coupe Γ, comme nous avons vu, en 4 droites (distinctes ou non). Donc : *les plans passant par la tangente à la conique double en un des deux points singuliers* D′, D″ *coupent* S *en des courbes ayant en ce point un point d'osculation de deux branches. Chacun des plans tangents singuliers* δ', δ'' *de* D′, D″ *(plans des tangentes singulières en ces points aux sections planes de* S *qui y passent) coupe* S *suivant* 4 *droites (qui dans des cas particuliers peuvent coïncider entre elles), et ces deux quaternes de droites de* S *sont dans* 4 *plans passant par* D′D″. — La série de coniques de Γ situées dans les plans générateurs de f nous montre que : *Chaque plan passant par la droite* D′D″ *coupe la surface* S *suivant deux coniques ayant double contact en* D′ *et* D″ *avec les droites d'intersection de ce plan* *avec δ' et δ'' pour tangentes communes en ces points. On a ainsi une série de ∞^1 coniques sur la surface. Parmi ces plans passant par* D′D″ *il y a outre le plan de la conique double deux plans touchant la surface respectivement le long de deux coniques.*

La droite $\delta'\delta''$ contient les sommets des 3 cônes de KUMMER *de la surface* S ; car elle est l'intersection de R_3 avec le plan polaire de a, plan qui passe par P et qui contient les sommets des 3 cônes de 1e espèce passant par Γ. En remarquant en outre que les espaces polaires des points de a forment un faisceau autour du plan polaire de a et passent tous en conséquence par P, nous voyons qu'une propriété qui caractérise notre surface, parmi celles plus générales qu'on obtient par des projections de Γ, est que *toutes* les ∞^1 inversions fondamentales de S que nous considérions au n^0 62 (et non plus une seule) se réduisent à des homologies harmoniques. *La surface* S *correspond à soi-même par rapport à ∞^1 homologies harmoniques dont les centres sont sur la droite* D′D″ *et les plans passant par $\delta'\delta''$.*

Ces propriétés de la surface S [68] nous montrent que, considérée comme une cyclide, elle est une *cyclide de révolution* provenant de la rotation d'une cyclique plane douée d'un axe de symétrie autour de cet axe [69]. D'ailleurs la position particulière donnée sur φ au centre de projection P montre que pour obtenir une telle cyclide de la cyclide générale [(1 1) 1 1 1] à couple de points coniques (ou bien de ses cas particuliers) il suffit de la transformer par inversion en mettant le centre en un point quelconque du cercle directeur (le cercle des foyers) : on voit alors (ce qui résulte aussi immédiatement de la projection), que sur l'axe de révolution $\delta'\delta''$ se trouveront non seu-

---

(68) Cette surface intéressante n'a pas encore été étudiée ailleurs, à ce que nous croyons. Cependant dans le Mémoire de M. KUMMER il est remarqué que, si pour une surface du 4e ordre à deux points de contact de deux nappes deux des 4 plans qui passent par ces points et touchent la surface le long de coniques viennent coïncider, la conique de contact correspondante devient une conique double de la surface. On a alors précisément la surface dont il s'agit. L'équation donnée par M. KUMMER d'une surface du 4e ordre à deux points de contact de deux nappes peut se réduire pour cette surface à la forme $\Phi^2 = p^2(ap^2 + 2bpq + cq^2)$, où Φ est une quadrique et p, q sont des plans. Si la constante c était nulle, des deux plans tangents le long de coniques $ap^2 + 2bpq + cq^2 = 0$ l'un viendrait coïncider avec le plan p de la conique double, et celle-ci deviendrait une conique cuspidale.

(69) M. DARBOUX ne fait que nommer dans une note (ouvr. cit. p. 159) cette cyclide particulière.

lement les sommets des 3 cônes de KUMMER, mais aussi les 4 foyers de la surface. Etc. etc.

Surface du 4e ordre à conique cuspidale (70).

66. Supposons que, la variété φ du faisceau étant générale, on y prenne le centre de projection P non seulement sur le plan polaire de l'arête a de f, comme nous faisions au n° précédent, mais précisément en un des points de ce plan qui sont communs à φ et à la conique polaire de f par rapport à φ, c'est-à-dire en un point tel que l'espace π tangent à φ en ce point soit aussi tangent à f le long d'un certain plan générateur p. Alors nous verrons que la plupart des propriétés trouvées au n° précédent pour les surfaces à conique double douée de deux points de contact de deux nappes seront encore vraies pour les nouvelles espèces, plus particulières, de surfaces; mais l'importance de celles-ci nous fait préférer de les retrouver directement en partie.

La quartique k^4 d'intersection de π avec Γ, que nous considérions au commencement de ce travail, et dont la projection sur R_3 était la conique double de S, se réduira à la conique k^2 d'intersection de Γ avec le plan p (conique comptée deux fois), et sa projection γ^2 sur R_3 sera en conséquence une *conique cuspidale* de S, car les deux plans tangents dans chaque point de la conique double qu'on considérait auparavant viennent coïncider. Cela résulte d'ailleurs aussi de ce fait que le plan p, appartenant aux espaces polaires de P par rapport à φ et à f, sera le plan polaire de P par rapport à tout le faisceau de F_3^2, c'est-à-dire par rapport à Γ; il est donc le même plan que nous appellions p dans le cas général. Et comme alors p coupait Γ en 4 points dont les projections étaient les 4 points-

(70) La plupart des résultats que nous trouverons ici sont déjà contenus dans le Mémoire cité à la p. 342 [note (12)] de M. BÉLA TÖTÖSSY, où cependant ils sont obtenus d'une manière tout-à-fait différente de la nôtre. Une partie de ces résultats avaient déjà été trouvés auparavant par M. CREMONA (dans la Note [(13)] citée à la même page) au moyen de la représentation plane de la surface et par M. ZEUTHEN (Mém. cité, p. 541) comme application de ses formules générales. — La représentation de M. CREMONA est du 4e ordre; il l'obtient au fond en considérant la surface comme l'inverse d'une surface cubique à deux points coniques par rapport à une inversion convenable. Notre méthode nous donnerait au contraire directement une représentation plane du 3e ordre; mais nous l'omettons par brièveté.

pinces de la conique double, et dans notre cas toute la courbe k^2 se trouve sur p, il s'ensuit que tous les points de γ^2 sont des points-pinces, c'est-à-dire que γ^2 est maintenant une conique cuspidale de S. Et de la même manière par laquelle nous avions prouvé que les plans tangents singuliers dans ces points-pinces passaient par un même point, on prouve immédiatement que: *Les plans tangents à la surface* S *dans les points de sa conique cuspidale passent tous par un même point.* Car ces plans sont les intersections de R_3 avec les espaces tangents à φ dans les points de k^2 et comme tous ces espaces passent par la droite polaire du plan p par rapport à φ, droite passant par P, le point commun à tous ces plans sera le point d'intersection de cette droite avec R_3.

Dans le cas présent l'espace π est l'un des deux espaces tangents à f qui passent par P, espaces qui touchent Γ le long de coniques et dont les intersections avec R_3 étaient les deux plans touchant S le long de coniques. Appellons π_1 l'autre de ces deux espaces tangents et γ_1^2 la projection sur R_3 de sa conique de contact: nous voyons que l'une des deux coniques, le long de chacune desquelles la surface S étudiée au n^0 précédent était touchée par un plan, est venue à-présent coïncider avec la conique double en la faisant devenir conique cuspidale, et qu' *il y a encore pour la surface* S *un plan qui la touche le long d'une conique* γ_1^2.

67. La conique γ_1^2 et la conique cuspidale γ^2 se coupent en deux points D', D'', qui sont les projections des deux points M', M'' d'intersection de l'arête a de f avec φ, et dont nous allons reconnaitre la singularité. Un espace quelconque passant par P coupe f suivant un cône quadrique ordinaire et φ suivant une quadrique dont le plan tangent en P est aussi tangent à ce cône ordinaire le long de la droite d'intersection de cet espace avec p : cet espace coupe donc Γ suivant une quartique dont deux tangentes passent par P. Ainsi chaque plan coupe notre surface S suivant une quartique ayant deux points stationnaires sur la conique γ^2, ce qui prouve de nouveau que cette conique est cuspidale pour S. Mais supposons maintenant que l'espace mené par P passe aussi par l'un des deux points d'intersection de a avec φ, par exemple par M'. Alors la quadrique d'intersection de cet espace avec φ passera par le sommet M' du cône ordinaire d'intersection avec f, et elle aura pour une génératrice la droite PM' : donc l'intersection de cet espace avec Γ sera une quartique ayant en M' un point double tel que le plan des deux tangentes passe par P. En projetant sur R_3 nous voyons

que : *Un plan quelconque passant par l'un ou l'autre des deux points singuliers* D', D'' *de la conique cuspidale coupe la surface* S *en une quartique ayant en ce point un point de contact de deux branches.* Donc ces deux points sont [71] les *points-clos* de la conique cuspidale de S.

Il se présente la question si parmi ces plans passant par un point-clos il y en a qui coupent S en une quartique ayant en ce point un point de rebroussement de 2e espèce (singularité d'ordre supérieur au point de contact de deux branches). Cette quartique étant la projection de la quartique gauche que nous considérions jadis ayant un point double en M' dans lequel le plan des tangentes passe par P, on voit que cela arrive lorsque ces deux tangentes coïncident, c'est-à-dire lorsque M' est un point stationnaire pour cette courbe gauche et a un plan tangent singulier passant par P. L'espace mené par PM' coupe Γ en une telle courbe s'il est tangent au cône quadrique ordinaire tangent à Γ dans le point double M', c'est-à-dire si le plan dans lequel cet espace coupe l'espace tangent en M' à φ, plan qui passe par P, est tangent à ce cône (intersection de f avec cet espace tangent en M' à φ). Or par P il ne passe que deux plans tangents à ce cône : tous les espaces qui passent par l'un ou l'autre de ces deux plans satisfont donc à la question. Ces deux plans sont évidemment les intersections de l'espace tangent en M' à φ avec les deux espaces π, π_1 tangents à f menés par P. Un espace qui passe par le second de ces plans coupe Γ en une quartique ayant en M' un point stationnaire, dans le plan tangent duquel P est un point quelconque. Mais un espace qui passe par le premier de ces plans, c'est-à-dire par un plan qui, appartenant à π et à l'espace tangent en M' à φ, touche φ le long de la droite PM', coupera Γ en une quartique ayant un point stationnaire en M' avec ce plan pour plan tangent, et la quadrique d'intersection de cet espace avec φ sera un cône tangent à ce plan le long de la droite PM', (et n'ayant pas le sommet en M'); donc (voir la note [52] à p. 383) la projection de cette quartique faite par P a dans la projection de M' un point de rebroussement de 3e espèce (coïncidence d'un point stationnaire avec un point de contact de deux branches). En remarquant encore que les deux plans considérés appartenant aux espaces

---

[71] V. ZEUTHEN, loc. cit., p. 479. On trouve aussi dans ce Mémoire les autres propriétés des points-clos que nous aimons à trouver par notre méthode dans ce qui suit.

π, π_1 devront être tangents en M' aux deux coniques de Γ placées dans ces espaces, nous concluons pour R_3 :

Parmi les plans passant par un point-clos D′ *de la conique cuspidale* γ^2 *de la surface* S *ceux qui passent par la tangente en ce point à* γ_1^2 *coupent* S *en des courbes ayant en ce point un point de rebroussement de seconde espèce avec cette droite pour tangente singulière ; et les plans qui passent par la tangente en ce point à la conique cuspidale* γ^2 *coupent* S *en des courbes ayant en ce point-clos un point de rebroussement de* 3ᵉ *espèce.* — Il suit de là que les tangentes en D', D'' à la conique γ_1^2 sont les *tangentes singulières* des deux points-clos.

68. De même que pour les surfaces étudiées au n⁰ 65, nous avons à présent comme cas particuliers :

Sur la surface du 4ᵉ *ordre à conique cuspidale il y a dans le cas le plus général deux quaternes de droites : chaque quaterne embrasse* 4 *droites qui passent par un point-clos* D′ *ou* D″ *et appartiennent au plan* δ' *ou* δ'' *des tangentes en ce même point à* γ^2 *et* γ_1^2, *plan qui est aussi le lieu des tangentes quadriponctuelles à la surface dans le point-clos correspondant.*

Ces deux quaternes de droites forment aussi 4 *couples dans* 4 *plans passant par la droite* D′D″ *des deux points-clos. Les plans qui passent par cette droite coupent la surface suivant des couples de coniques (formant un seul système de* ∞^1*) touchant dans les deux points* D′, D″ *les deux plans* δ', δ''. Pour deux plans de ce faisceau les deux coniques coïncident, respectivement en γ^2 et en γ_1^2 .

La surface correspond à soi-même par rapport à ∞^1 *homologies harmoniques ayant les centres sur la droite* D′D″ *des points-clos et les plans d'homologie passant par la droite* $\delta'\delta''$. *De là il suit aussi que cette surface correspond à soi-même par rapport à une involution réglée* (involutorisch-geschaarte Collineation) *ayant les droites* D′D″ *et* $\delta'\delta''$ *pour axes.* — En outre elle a en général 3 inversions fondamentales.

69. Proposons-nous maintenant la recherche des cônes de KUMMER pour cette surface. Il suffit de se rappeler que ces cônes sont les projections faites par P des cônes quadriques ordinaires dans lesquels les cônes de 1ᵉ espèce du faisceau des F_3^2 sont coupés par les espaces polaires de P par rapport à ces cônes-mêmes. Or ces espaces polaires de P devront passer par le plan polaire p de P par rapport à Γ, plan qui contient la conique k^2 de Γ, et en se rappelant en outre que les sommets de ces cônes du faisceau sont sur le

plan polaire de a par rapport à φ nous concluons que: *La surface à conique cuspidale a en général 3 cônes de* KUMMER *dont les sommets sont sur la droite $\delta'\delta''$ et qui passent par la conique cuspidale.*

A chacun de ces cônes correspondent deux séries de coniques sur la surface. Il y a en outre, comme nous avons déjà vu, une série de coniques situées dans les plans passant par $D'D''$. Entre ces différentes séries de coniques passent les mêmes relations que dans la surface à conique double et un couple de points doubles.

De même il n'y a presque pas de modifications à faire à ce que nous avons dit en général sur les cubiques et les quartiques de la surface. Il y aura sur la surface en général 8 séries doublement infinies de cubiques gauches, correspondant aux 8 droites de la surface, et une série quatre fois infinie de quartiques de 1e espèce [72], etc. etc.

70. Nous retrouverons les cônes de KUMMER en cherchant les quadriques qui passent par la conique cuspidale et sont inscrites dans la surface (c'est-à-dire la touchent le long de coniques). De même que lorsque P avait une position quelconque sur φ on voit que ces quadriques sont les projections des intersections de φ avec les espaces tangents à f. Les pôles de ces espaces par rapport à φ ont pour lieu une conique dans le plan polaire de a. Parmi ces espaces il y en a en général, outre π, trois qui sont aussi tangents à φ, c'est-à-dire qui coupent φ suivant des cônes quadriques ordinaires. Leurs sommets sont 3 des 4 points d'intersection de la conique nommée avec φ: le quatrième est P; et les points diagonaux du quadrangle déterminé par ces 4 points sont les sommets des 3 cônes de 1e espèce du faisceau de F_3^2. Donc les sommets des projections des 3 cônes quadriques ordinaires dont nous parlions sont aussi les sommets des 3 cônes de KUMMER et comme ces projections passent aussi, comme ces cônes de KUMMER, par γ^2, elles coïncideront avec eux. Donc:

La surface S *est enveloppée (c'est-à-dire touchée le long de coniques) par ∞^1 quadriques passant par la conique cuspidale et telles que le lieu des pôles du plan de celle-ci par rapport à elles est la droite $\delta'\delta''$. Parmi ces quadriques il y a les 3 cônes de* KUMMER. *Par cha-*

(72) M. TÖTÖSSY trouve que cette série de quartiques est seulement trois fois infinie (loc. cit., pp. 319, 320), parce qu'il s'appuie sur le fait que par la conique cuspidale passent ∞^3 quadriques, tandis qu'il en passe ∞^4.

que point de l'espace passent deux de ces quadriques. Les coniques de contact forment le système des coniques passant par D′ *et* D″.

On peut encore considérer un autre système de quadriques. Les espaces passant par p coupent Γ suivant la conique fixe k^2 et une conique mobile; en projetant sur R_3 et en remarquant que les pôles de ces espaces par rapport à φ sont sur la droite polaire de p nous avons que: *les* ∞^1 *quadriques qui touchent* S *le long de sa conique cuspidale, c'est-à-dire qui passent par cette conique et ont pour pôle de son plan le point d'intersection des plans tangents à* S *dans les points de la conique cuspidale, coupent encore* S *suivant une conique mobile appartenant au système des coniques passant par* D′ *et* D″. — Ce point d'intersection des plans tangents dans les points de la conique cuspidale est évidemment sur la droite $\delta'\delta''$.

71. En supposant que la conique cuspidale γ^2 soit l'absolu, la surface S sera une cyclide de révolution ayant la droite $\delta'\delta''$ pour axe (n⁰ 68). Comme un plan passant par cet axe coupe S suivant une courbe quartique ayant les points cycliques du plan pour points stationnaires, c'est-à-dire suivant une quartique *cartésienne* (ovales de DESCARTES) ayant cet axe pour axe de symétrie, nous l'appellerons pour abréger *cyclide cartésienne*, avec M. CASEY (73). Les cônes de KUMMER ont leurs 3 sommets sur l'axe: ces sommets sont les foyers de la cyclide, puisque ces cônes sont tangents le long de coniques à la cyclide et passent par l'absolu. Comme les quadriques déférentes ont en général pour développable focale la développable des plans tangents à la cyclide dans les points de l'absolu, et dans le cas présent cette développable se réduit à un cône quadrique nous concluons que *les quadriques déférentes d'une cyclide cartésienne sont des sphères ayant pour centre commun le point de rencontre des plans tangents à la surface dans les points de l'absolu.* Ce point se trouve sur l'axe de révolution.

Dans le cas le plus général, qui correspond à la caractéristique [(1 1) 1 1 1], outre les 3 foyers la surface a 3 quartiques focales, intersections des 3 sphères directrices, dont ces foyers sont les centres, avec leurs 3 sphères déférentes: ces intersections se décomposent dans l'absolu et 3 cercles. Donc *la cyclide cartésienne générale a trois*

---

(73) Loc. cit., p. 635. — M. DARBOUX donne au contraire ce nom de *cartésiennes* aux cyclides ayant des quadriques déférentes de révolution (ouvr. cité, p. 154). Nous rencontrerons bientôt ces cyclides.

foyers et trois cercles focaux (intersections des sphères nulles ayant ces foyers pour centres prises deux-à-deux).

En prenant la conique cuspidale pour absolu on obtient très facilement les propriétés de la surface S (ce qui équivaut d'ailleurs à faire usage dans les démonstrations du système des ∞^1 homologies harmoniques qui transforment la surface S en soi-même). Ainsi, comme la section méridienne de la cyclide cartésienne est de la 6^e classe, il suit que par un point de l'axe le cône circonscrit à la cyclide se décompose en 3 cônes quadriques de révolution, c'est-à-dire: *pour chaque surface du 4^e ordre à conique cuspidale le cône circonscrit à la surface par un point quelconque de la droite $\delta'\delta''$ se décompose en trois cônes quadriques touchés par les plans δ', δ'' dans les deux points-clos* D', D''.

Remarquons enfin que chaque cyclide cartésienne, même lorsqu'elle n'est pas générale, peut être obtenue par une cyclide douée de foyers (c'est-à-dire appartenant aux espèces qui dans leurs caractéristiques ont un groupe de deux degrés) et ayant la même caractéristique en la transformant par inversion avec un foyer proprement dit pour centre. Cela correspond au fait que les deux surfaces sont les projections d'une même surface Γ de la variété quadratique φ: seulement pour l'une d'elles le centre de projection est un point quelconque de φ, tandis que pour l'autre ce centre est un point déterminé, et précisément l'un de ces points dont la projection faite par le premier centre est un foyer pour la première surface.

Nous allons maintenant reprendre la classification de nos surfaces, en donnant pour les différentes espèces, dont nous avons vu les propriétés communes dans les dernières pages, les propriétés particulières qui les distinguent entre elles.

$\{(1\,1)\,1\,1\,1\}$.

72. La surface Γ ayant cette caractéristique est la plus générale parmi celles qui ont été considérées depuis le n° 58. Elle est sur 3 cônes quadriques de 1^e espèce et sur un cône de 2^e espèce, sur l'arête duquel elle a deux points doubles; etc. En conséquence en la projetant sur R_3 nous aurons les surfaces suivantes qui ont déjà été étudiées presque complètement dans ce qui précède.

73. $[(1\,1)\,1\,1\,1]$ *Surface de la 8^e classe à conique double générale et un couple de points coniques.* Par chacun de ces points coniques passent 4 droites de la surface, qui coupent respectivement les 4

passant par l'autre en 4 points d'un plan : les 3 points diagonaux du quadrangle déterminé par ceux-ci sont les sommets des 3 cônes de KUMMER de la surface. En considérant celle-ci comme une cyclide, ces 4 points se trouvent sur le cercle directeur (dont les points d'intersection avec la conique déférente sont les 4 foyers de la surface) et ils sont les points de contact du cercle avec les tangentes qu'il a communes avec cette conique. La surface a 3 couples de cercles focaux passant par les deux points coniques et appartenant aux 3 sphères directrices (dont les centres sont les sommets des cônes de KUMMER). Elle contient une série de coniques passant par les deux points coniques et en outre 3 couples de séries, correspondant aux 3 cônes de KUMMER. Etc. etc.

74. [(1 1) 1 1 1] *Surface de la* 6^e *classe à conique cuspidale.* Nous en avons vu jadis les propriétés, car celle-ci est la surface du 4^e ordre la plus générale à conique cuspidale. Il est facile de voir que pour cette surface, qui est un cas particulier de celle du n^0 précédent, la classe n'est plus 8, mais 6 ; c'est que les centres de projection de Γ propres à donner comme projection une telle surface ne forment plus qu'une ∞^1 (tandis que, comme ils formaient une ∞^2 pour les surfaces un peu plus générales à deux points de contact de deux nappes sur la conique double, nous avons pu conclure au n^0 65 qu'elles sont de la classe 8). Cette surface a deux points-clos distincts sur la conique cuspidale et n'a pas de points doubles hors de la conique cuspidale. Nous avons vu ses propriétés relatives aux droites qu'elle contient, aux cônes de KUMMER, etc. On peut aussi la considérer comme la cyclide cartésienne la plus générale et nous avons vu aussi comment se particularisent alors métriquement ses propriétés.

Les cyclides [(1 1) 1 1 1], cartésiennes ou non, sont les transformées par inversion d'un cône quadrique général (comme on voit si sur φ le centre de projection de Γ est pris sur M' ou sur M'', car alors Γ est projetée justement suivant un cône quadrique).

75. [$\overline{1}$ (1 1) 1 1] *Surface de la* 8^e *classe à deux droites doubles et un couple de points coniques.* Les 4 plans qui joignent ces points à ces droites coupent encore la surface en des couples de droites et on a ainsi les 8 droites simples de la surface. Les 4 droites passant par un point conique coupent respectivement celles qui passent par l'autre en 4 points d'un plan passant par le point d'intersection des droites doubles : ce plan contient les sommets des deux cônes de KUMMER (propres) de la surface. Parmi les plans passant par les

deux points coniques et coupant la surface en deux coniques il y en a deux, dont chacun la touche le long d'une conique, et 4 qui contiennent des couples de droites. Nous avons vu (n^0 63) qu'il y a ∞^1 inversions fondamentales ayant des cônes quadriques directeurs passant par les droites doubles et par deux droites fixes du plan nommé qui contient les sommets des cônes de KUMMER. Mais il y a en outre 3 autres inversions fondamentales, dont deux ayant pour centres les sommets des deux cônes de KUMMER proprement dits et pour quadriques directrices deux cônes passant par les points coniques, et une ayant pour centre le point de rencontre des droites doubles et une quadrique directrice qui passe aussi par les points coniques [74]. — On obtient une telle surface par une inversion conique sur un cône quadrique.

76. $[(\overline{1\,1})\,1\,1\,1]$ *Surface de la* 8e *classe à droite bidouble (et deux points triples).* Les deux quaternes de droites simples de la surface passant par les deux points triples D', D'' sont, comme nous l'avons déjà remarqué, sur quatre plans passant par la droite bidouble. Il y a ∞^1 inversions fondamentales dont les quadriques directrices sont des cônes quadriques touchant le plan ϱ le long de la droite bidouble d et se coupant en une conique fixe δ^2, et dont les centres sont sur d les conjugués harmoniques des sommets de ces cônes par rapport à D', D'' (n^0 63). Parmi ces cônes ceux qui ont leurs sommets en D', D'' se composent de tangentes quadriponctuelles en ces points triples à la surface (les autres tangentes quadriponctuelles dans ces points forment deux faisceaux dans le plan ϱ), et ils passent respectivement par les deux quaternes de droites. Celles-ci se rencontrent donc en 4 points de la conique δ^2 et les points diagonaux du quadrangle de ces 4 points sont les sommets des 3 cônes de KUMMER de la surface. Dans chacune des 6 séries de coniques de la surface qui correspondent à ces cônes il y a deux coniques décomposées en couples de droites, etc. Les sommets des 3 cônes de KUMMER sont aussi les centres de 3 inversions fondamentales, qu'a la surface outre les ∞^1 considérées : les quadriques directrices de ces 3 inversions

---

[74] Nous rappellerons encore une fois que les quadriques directrices des inversions fondamentales de toutes nos surfaces passent toujours par leurs coniques doubles (générales ou décomposées), de sorte que nous nous épargnons la peine de le dire dans chaque cas.

fondamentales sont 3 couples de plans passant par la droite bidouble d.

$\{(1\ 1)\ 2\ 1\}$.

77. Une telle surface Γ se trouve, outre que dans le cône de 2^e^ espèce f dont l'arête la coupe en deux points doubles M', M'', sur un cône de 1^e^ espèce f_1 dont le sommet M se trouve sur Γ et en est en conséquence un autre point double. Les droites MM', MM'' appartiendront donc à Γ et auront deux plans touchant Γ le long d'elles: ces plans seront les intersections de l'espace tangent en M à toutes les variétés du faisceau avec les espaces tangents en M' et M''; ils se coupent donc en une droite qui contient le sommet du troisième cône du faisceau (de 1^e^ espèce). Comme toutes les droites de Γ doivent passer ou par M' ou par M'', on voit qu'elles sont, outre les droites MM', MM'', celles dans lesquelles Γ est encore coupée par les plans générateurs de f_1 qui passent par l'une ou par l'autre de celles-ci, c'est-à-dire deux droites passant par M' et deux droites passant par M''. Il y a donc en tout 6 droites sur Γ. Le troisième cône du faisceau a parmi ses plans générateurs les plans tangents à Γ le long de MM' et MM'' et les plans des deux couples des autres droites qui passent par M' et M''.

Suivant la position du centre de projection P nous aurons de Γ 7 espèces différentes de surfaces de R_3.

78. $[(1\ 1)\ 2\ 1]$ *Surface de la 6^e^ classe à conique double générale et trois points coniques* (dont deux formant un couple). Le couple de points coniques D', D'' est joint à l'autre point conique D par deux droites de la surface, le long de chacune desquelles la surface est touchée par un plan. Ces deux plans sont tangents au cône de Kummer non singulier de la surface. Celle-ci a aussi un cône de Kummer singulier ayant le sommet en D, et outre les deux couples de séries de coniques qui correspondent à ces deux cônes de Kummer elle contient une série de coniques dans les plans qui passent par $D'D''$. Parmi ces plans deux touchent la surface le long de deux de ces coniques, et deux autres, outre celui qui passe par D, coupent la surface en deux couples de droites (et deux coniques); de sorte que la surface contient 6 droites. Dans chacune des deux séries de coniques correspondant au cône de Kummer singulier il y a deux coniques qui se décomposent respectivement en DD' et une droite passant par D' et en DD'' et une droite passant par D''. Pour le cône de Kummer non singulier dans l'une des deux

séries de coniques qui lui correspondent il y a la droite DD' comptée deux fois et le couple des droites qui passent par D'' sans passer par D, tandis que dans l'autre il y a la droite DD'' comptée deux fois et le couple des droites qui passent par D' sans passer par D. De là il suit que les deux points de rencontre des deux couples nommés de droites sont en un plan avec les sommets des deux cônes de KUMMER (ou, plus encore, qu'ils sont en ligne droite avec le sommet du cône de KUMMER non singulier).

Comme cyclide cette surface a ce dernier plan pour plan de symétrie et les deux points coniques D', D'' disposés symétriquement par rapport à lui : le cercle δ^2 d'intersection des deux sphères nulles ayant D', D'' pour centres est sur ce plan et contient le point conique D et les deux autres points de rencontre de droites de la surface. La conique déférente touche les tangentes à ce cercle directeur dans ces deux points et elle touche ce cercle même en D, ayant en ce point pour tangente commune la droite d'intersection des plans tangents à la surface le long des droites DD', DD''. Comme ce cercle directeur et cette conique déférente se touchent en D, elles ne se couperont plus qu'en deux points qui seront les foyers de la surface. Cela résulte aussi du théorème du n^0 25, en force duquel le quaterne de foyers a pour caractéristique [21] et se réduit en conséquence au point double D avec deux autres points ; mais D n'est pas un véritable foyer, comme nous avons vu (n^0 64). — Outre le faisceau des sphères passant par le cercle directeur δ^2, qui correspondent à autant d'inversions fondamentales pour la cyclide, il y a encore une sphère directrice d'une inversion fondamentale proprement dite, laquelle a son centre dans le sommet du cône de KUMMER non singulier et passe par les 3 points coniques D, D', D'' : la quadrique déférente de cette sphère directrice passe aussi par ces points et coupe la sphère en une quartique focale [(1 1) 2] qui se décompose dans les deux droites DD', DD'' et un cercle focal passant par D', D''. (On voit donc la position mutuelle de cette sphère directrice et de cette quadrique déférente). Il y a encore une sphère directrice nulle ayant le centre en D et sur laquelle se trouve une quartique focale $[(1\ 1)\ \overline{1}\ 1]$, décomposée en deux cercles passant par D', D'' : la quadrique déférente passe donc par ces deux points coniques.

79. [(1 1) 2 1] *Surface de la 4^e classe à conique cuspidale et un point conique.* Outre le plan de la conique cuspidale γ^2 il y a encore un plan qui touche la surface le long d'une conique γ_1^2 : ces deux

coniques se coupent dans les deux points-clos D', D'' de γ^2. Les plans tangents singuliers δ', δ'' de ceux-ci se coupent en une droite passant par le point conique D et ils touchent la surface le long des droites DD', DD'', tandis qu'ils la coupent encore en deux autres couples de droites passant respectivement par D', D'' et se coupant mutuellement sur la droite $\delta'\delta''$. Outre le cône de KUMMER singulier ayant le sommet en D, il y a un autre cône de KUMMER non singulier dont le sommet est aussi sur la droite $\delta'\delta''$. On obtient cette surface de la surface générale à conique cuspidale en supposant que deux des 3 cônes de KUMMER viennent coïncider (en un cône de KUMMER singulier) : alors deux des 4 couples de droites de la surface générale, situés dans 4 plans par $D'D''$, coïncideront aussi [75].

Comme cyclide cartésienne cette surface s'obtient de la cyclide précédente par une inversion ayant pour centre l'un des deux foyers. Elle est douée d'un seul foyer, qui est le sommet du cône de KUMMER non singulier, et comme son méridien a les points cycliques de son plan pour points stationnaires et le point D (sommet du cône de KUMMER singulier) pour point double, elle provient de la rotation d'un *limaçon de* PASCAL autour de son axe. On peut donc la construire en portant un segment donné sur les droites qui passent par un point D d'une sphère à partir du second point d'intersection de ces droites avec la sphère. Cette simple construction de la surface permet aussi de vérifier facilement qu'elle est bien l'enveloppe des ∞^2 sphères passant par le point D et ayant leurs centres sur une sphère *déférente* fixe (ne contenant pas D) ou bien l'enveloppe des ∞^2 sphères orthogonales à une sphère directrice et ayant leurs centres sur une sphère déférente qui touche celle-ci en un point D.

---

(75) M. TÖTÖSSY (loc. cit., p. 312) trouve, à ce propos, par le calcul, que le discriminant de l'équation du 3^e degré, qui détermine les 3 cônes de KUMMER pour la surface générale à conique cuspidale, est identique à celui de l'équation du 4^e degré qui détermine les 4 plans passant par $D'D''$ et contenant les 4 couples de droites de la surface. Or cela est conséquence d'un fait que nous montre notre méthode de la projection : si sur la droite $\delta'\delta''$ on considère les 4 points d'intersection avec ces couples de droites et aussi les 3 sommets des cônes de KUMMER avec le point d'intersection de $\delta'\delta''$ avec le plan de γ^2, ces deux quaternes de points ont le même covariant sextique, qui est formé par les 3 couples de points dans lesquels cette droite rencontre les 3 quadriques directrices des inversions fondamentales (isolées) de la surface.

Cette cyclide cartésienne et la cyclide plus générale considérée au n^0 précédent sont les transformées par inversion d'un cône quadrique tangent à l'absolu, ou bien d'une quadrique de révolution.

80. [$\overline{1}$ (1 1) 2] *Surface de la 6e classe à deux droites doubles et trois points coniques.* Soient D', D'' les deux points coniques formant un couple et D l'autre. Les plans qui joignent D aux deux droites doubles d_1, d_2 touchent la surface le long des deux droites DD', DD'' et la surface contient encore deux droites passant par D' dans le plan $D'd_2$ et deux droites passant par D'' dans le plan $D''d_1$. Il n'y a qu'un cône de KUMMER singulier ayant le sommet en D, auquel correspondent deux séries de coniques de la surface : celle-ci contient encore deux séries de coniques dans les plans par d_1 ou par d_2 et une série dans les plans par $D'D''$. Il y a ∞^1 inversions fondamentales dont les centres sont sur la droite $D'D''$ et les quadriques directrices forment un faisceau de cônes passant, outre que par d_1, d_2, par D et par une autre droite fixe (parmi ces inversions il y a une homologie harmonique) ; et il y a en outre une inversion fondamentale dont le centre est le point de rencontre des droites doubles et la quadrique directrice passe par les trois points coniques.

Cette surface s'obtient par inversion conique soit d'un cône quadrique tangent à l'une des deux droites formant l'absolu de l'inversion, soit d'une quadrique tangente à toutes les deux ces droites.

81. *Surface de la 6e classe à droite double et droite cuspidale et un point conique.* Cette surface, qui est un cas particulier de la précédente, s'obtient en projetant I' par un point quelconque du plan tangent le long de l'une des deux droites MM', MM'', par exemple de la première. Alors les projections D, D' de M, M' seront les deux points-clos de la droite cuspidale, et la projection D'' de M'' sera un point conique pour notre surface. Ces deux points-clos joueront des rôles différents : les plans par le point conique D'' et l'un D' de ces deux points-clos couperont la surface en une série de coniques (tangentes en D' à son plan singulier), tandis que les plans passant par l'autre point-clos D et tangents à un certain cône quadrique (de KUMMER) ayant ce point pour sommet couperont la surface en deux autres séries de coniques.

Les droites simples de cette surface sont : DD'', le long de laquelle la surface est touchée par un plan passant par la droite cuspidale, c'est-à-dire par le plan singulier de D ; deux droites passant par D' et appartenant au plan singulier de ce point-clos ; et enfin deux autres droites passant par D'' et coupant la droite double. Parmi les plans passant par $D'D''$ il y en a un touchant la surface le long d'une conique (et un autre jouissant de la même propriété, mais avec la conique de contact décomposée dans les deux droites DD', DD'').

82. *Surface de la 6e classe à deux droites cuspidales.* Nous avons vu en général qu'on obtient une surface à conique cuspidale en projetant une $F_2^{2.2}$ Γ contenue dans un cône de 2e espèce f par un point P de ceux dans lesquels un espace tangent à ce cône et à une autre variété quadratique φ du faisceau touche celle-ci. Mais afin que cette conique cuspidale se décompose en deux droites il faut que φ soit un cône de 1e espèce. En supposant donc qu'il existe un espace π tangent en même temps au cône de 2e espèce f le long d'un certain plan p et au cône de 1e espèce φ le long d'une certaine génératrice passant par P, cet espace coupera φ en deux plans p_1, p_2 et il touchera f et φ, et en conséquence toutes les variétés de notre faisceau, dans le point d'intersection de p et $p_1 p_2$, de sorte que ce point sera double pour Γ et sera le sommet d'un cône de 1e espèce du faisceau (ou un point de l'arête d'un cône de 2e espèce). De là il suit que le cas le plus général dans lequel on obtient une surface à deux droites cuspidales est celui dans lequel on projette une surface Γ ayant pour caractéristique $\{(1\ 1)\ 2\ 1\}$ par l'un des points de contact du cône de 1e espèce correspondant au degré 1 avec l'espace tangent au faisceau dans le sommet du cône correspondant au degré 2. Des cas particuliers correspondront aux caractéristiques $\{(1\ 1)\ 3\}$, $\{(3\ 1)\ 1\}$, etc., de Γ.

En nous bornant ici au cas le plus général, qu'on peut d'ailleurs étudier comme cas particulier de la surface du n⁰ précédent (qu'on obtenait en prenant le centre de projection sur l'un seul des deux plans tangents à Γ le long des droites MM', MM'', tandis que pour avoir deux droites cuspidales on doit prendre ce centre sur la droite commune à ces deux plans), ou bien de celle du n⁰ 80, nous voyons par ce que nous avons dit au n⁰ 77 sur la $F_2^{2.2}$ $\{(1\ 1)\ 2\ 1\}$ que : *Une surface du 4e ordre à deux droites cuspidales se coupant mutuellement a sur chacune de ces droites un point-clos ordinaire* (jouissant des propriétés déjà vues des points-clos) *dont le plan singulier passe par la droite cuspidale correspondante et contient encore deux droites de la surface passant par ce point. Il y a donc dans la surface 4 droites simples : elles sont par couples sur deux plans passant par la droite qui joint les deux points-clos. Les plans qui passent par cette droite* *coupent la surface suivant des couples de coniques tangentes dans ces points-clos à leurs plans singuliers ; l'un de ces plans touche la surface le long d'une de ces coniques. Outre cette série de coniques et le couple de séries de coniques situées dans les plans passant par les deux droites cuspidales, la surface a encore un couple de séries de coniques passant par le point d'intersection des deux droites cuspidales et situées dans des plans qui enveloppent un cône quadrique (de* Kummer*) ayant ce point pour sommet.*

Un espace passant par la droite $p_1 p_2$ coupe Γ en une quartique à point double $pp_1 p_2$ (c'est-à-dire M) et φ en un cône contenant cette droite et cette quartique, et n'ayant pas pour sommet ce point double. Donc *chaque section plane de notre surface passant par le point d'intersection des deux droites cuspidales a en ce point un point d'osculation de deux branches avec la tangente dans le plan de ces droites.* D'ailleurs cela est une conséquence du fait que cette surface est un cas particulier de celles que nous avons rencontrées dans la seconde moitié du n^0 34. On voit effectivement que si l'on suppose que le point conique, n'appartenant pas au couple, de la surface à deux droites doubles $[\overline{1}\,(1\;1)\;2]$ vienne coïncider avec le point d'intersection de celles-ci, ces droites deviendront des droites cuspidales et on aura justement notre surface, c'est-à-dire la surface du 4^e ordre la plus générale à deux droites cuspidales.

83. $[\overline{2}\,(1\;1)\;1]$ *Surface de la 6^e classe à deux droites doubles se croisant en un point triple et deux point coniques.* Le long des deux droites de la surface qui joignent le point triple D aux deux points coniques D', D'' la surface est touchée par deux plans qui sont aussi tangents au cône de Kummer (non singulier) de la surface. Les tangentes quadriponctuelles dans le point triple forment un faisceau avec les deux droites doubles et un cône quadrique qui touche aussi ces deux plans le long des droites DD', DD''. Par les deux points coniques D', D'' passent encore deux couples de droites dans les plans qui joignent ces points aux droites doubles. Il y a encore 5 séries de coniques, dont deux correspondent au cône de Kummer, une aux plans passant par $D'D''$ et deux aux plans qui passent par les droites doubles. Il y a une inversion fondamentale ayant pour centre le sommet du cône de Kummer et pour quadrique directrice un cône passant par D' et D'', et il y a ∞^1 autres inversions coniques fondamentales ayant les centres sur la droite $D'D''$. Cette surface s'obtient en transformant par inversion conique un cône quadrique contenant le sommet du cône directeur.

84. $[(\overline{1\ 1})2\ 1]$ *Surface de la* 6ᵉ *classe à droite bidouble et un point conique.* Par les deux points triples D', D'' de la droite bidouble d passent les 6 droites simples de la surface, dont deux vont au point conique D et touchent le cône de KUMMER non singulier de la surface, et les autres sont sur deux plans passant par d et se coupent en deux points qui avec D déterminent un plan. La conique δ^2 de ce plan, qui est tangente au plan ϱ dans l'intersection avec d et qui passe par les 3 points nommés de ce plan, appartient à un faisceau de cônes quadriques tangents à ϱ le long de d et directeurs de ∞^1 inversions fondamentales : ceux parmi ces cônes qui ont D' et D'' pour sommets se composent de tangentes quadriponctuelles en ces points triples. La surface a encore une inversion fondamentale biplanaire dont le centre est le sommet du cône de KUMMER non singulier (sommet qui appartient au plan de δ^2). Le cône de KUMMER nommé, un cône de KUMMER singulier ayant D pour sommet et enfin le faisceau des plans qui passent par d déterminent les 5 séries de coniques de la surface. Celle-ci est la transformée d'une quadrique par une inversion biplanaire.

{(1 1) 3}.

85. Cette surface Γ se trouve seulement sur un cône de 2ᵉ espèce f, dont l'arête contient deux points doubles M', M'' de Γ et sur un cône de 1ᵉ espèce f_1 dont le sommet M appartenant à Γ en est un point double. L'espace tangent en M au faisceau des F_3^2 est dans ce cas aussi tangent à f_1 et le coupe en conséquence en deux plans générateurs qui passent par les droites MM', MM'' de Γ et touchent cette surface le long de ces droites ; le cône quadrique tangent à Γ en ce point double M se décompose en ces deux plans. Par les droites MM', MM'' passent deux autres plans générateurs de f_1, lesquels contiendront deux autres droites de Γ. Donc la surface Γ contient 4 droites, c'est-à-dire les 2 droites MM', MM'' et deux autres droites passant respectivement par M', M'' et appartenant au même plan générateur de f. D'ailleurs Γ n'a que 3 séries de coniques dans les plans générateurs de f et dans les deux séries de plans générateurs de f_1.

86. [(1 1) 3] *Surface de la* 5ᵉ *classe à conique double générale, deux points coniques et un point biplanaire de la* 1ᵉ *espèce.* Cette surface a 4 droites : celles qui joignent les deux points coniques D', D'' au point biplanaire D, le long desquelles la surface est touchée par les deux plans nodaux de ce point, et deux autres droites pas-

sant par D', D'' et se coupant mutuellement. Les plans passant par $D'D''$ contiennent une série de coniques (et il y a parmi eux deux plans touchant la surface le long d'une conique), et les plans tangents au cône de KUMMER singulier qui a D pour sommet contiennent les deux autres séries de coniques de la surface. En dehors des ∞^1 inversions fondamentales qu'il y a dans tous les cas que nous considérons maintenant, il n'y en a pas d'autres dans le cas présent.

Comme cyclide cette surface a un plan de symétrie, sur lequel se trouve le cercle directeur (intersection des sphères nulles D', D'') : sur ce cercle il y a le point D et la conique déférente a avec ce cercle un contact triponctuel en D, de sorte qu'elle le coupe encore en un seul autre point, qui sera un foyer proprement dit pour la cyclide ; on prouve cela, soit en considérant notre cas comme limite de cas précédents, soit en remarquant que le théorème du n⁰ 25 nous donne pour le quaterne de foyers la caractéristique [3], qui prouve que 3 des foyers viennent coïncider en un seul point D qui devient un foyer impropre. Outre le foyer propre considéré la cyclide a une quartique focale $[(1\,1)\overline{2}]$ décomposée en une conique et deux droites et située sur la sphère nulle (directrice) D et sur sa quadrique déférente. Donc cette quadrique a le point D pour un ombilic et notre cyclide est l'enveloppe des sphères ayant les centres sur une quadrique fixe et passant par l'un de ses ombilics.

87. [(1 1)3] *Surface de la 3e classe à conique cuspidale et un point biplanaire de 1e espèce* (76). Les plans nodaux du point biplanaire D sont les plans singuliers des deux points-clos D', D'' de la conique cuspidale et ils osculent la surface le long des droites DD', DD''. Dans ces plans δ', δ'' et par ces points-clos D', D'' passent encore deux autres droites de la surface (dans un plan passant par $D'D''$). Parmi les plans passant par $D'D''$ il y a, outre le plan de la conique cuspidale, un autre plan tangent à la surface le long d'une conique. Il y a encore un cône de KUMMER (singulier) dont le sommet est en D.

Comme cyclide cette surface peut s'obtenir en transformant par inversion la surface du n⁰ précédent avec le centre d'inversion dans le foyer. Elle est une *cyclide cartésienne à point biplanaire* : ce point

(76) Cette surface est la réciproque de celle du 3e ordre de la XVII. espèce dans la classification de SCHLÄFLI. Voir CAYLEY : *A Memoir on Cubic Surfaces*, Phil. Trans., 159, 1869, p. 231, à la p. 316.

biplanaire D se trouve sur l'axe de révolution $\delta'\delta''$ de la cyclide, et comme dans cet axe se coupent les deux plans nodaux de D, chaque plan passant par lui coupe la surface en une quartique ayant un point de rebroussement en D et deux autres dans les points cycliques, c'est-à-dire en une *cardioïde.* Donc cette cyclide cartésienne s'obtient par la révolution d'une cardioïde autour de son axe; et de la construction connue de la cardioïde on déduit une construction simple de cette cyclide analogue à celle de la cyclide cartésienne à point conique (n^0 79): seulement le segment que l'on porte sur les différentes droites devra être égal au diamètre de la sphère. Il suit en outre de notre théorie que cette surface n'a pas de foyers, mais qu'elle a une sphère déférente passant par D et correspondant à la sphère directrice nulle D, de sorte qu'on peut la construire comme l'enveloppe des sphères passant par un point fixe D et ayant leurs centres sur une sphère fixe contenant ce point.

Les cyclides considérées dans les deux derniers n^{os} peuvent se transformer par inversion en un cône quadrique osculant l'absolu (c'est-à-dire ayant avec lui un contact triponctuel) ou bien en un paraboloïde de révolution.

88. $[\overline{3}(1\,1)]$ *Surface de la 5^e classe à deux droites doubles se croisant en un point triplanaire et à deux points coniques.* Par le point triple D passent deux droites de la surface, qui vont aux deux points coniques D', D'', et le long desquelles la surface est touchée par deux plans passant respectivement par les deux droites doubles: ces deux plans avec le plan des droites doubles forment le lieu des tangentes quadriponctuelles dans le point triple. Par chacun des points coniques passe encore une droite de la surface et ces deux droites se coupent entre elles. La surface contient 3 séries de coniques dans les plans passant par les deux droites doubles et par la droite $D'D''$. Il y a ∞^1 inversions fondamentales (parmi lesquelles une homologie harmonique), dont les centres sont sur la droite $D'D''$ et les quadriques directrices forment un faisceau de cônes. Etc. Cette surface s'obtient en transformant par inversion conique un cône tangent dans le sommet du cône directeur à l'une des deux génératrices formant l'absolu.

89. *Surface de la 5^e classe à droite double et droite cuspidale se croisant en un point triple et à un point conique.* Nous obtenons une telle surface, cas particulier de la précédente, en projetant notre $F_2^{2.2}\ \Gamma$ par un point du plan tangent le long de MM', par exemple.

Alors la projection D de M sera un point triple (présentant les mêmes caractères que celui de la surface étudiée au n⁰ 50), la projection D' de M' sera un point-clos de la droite cuspidale, et la projection D'' de M'' sera le point conique. La surface contient la droite $D'D''$, le long de laquelle elle est touchée par un plan singulier du point triple D, plan passant par la droite cuspidale et qui avec le plan (compté deux fois) de celle-ci et de la droite double forme le lieu des tangentes quadriponctuelles en D; et elle contient encore une droite passant par D'' et coupant la droite double, et une autre droite passant par D' et appartenant au plan singulier de ce point-clos. Les plans passant par $D'D''$, par la droite double et par la droite cuspidale déterminent les 3 séries de coniques de la surface. Etc.

90. *Surface de la 5e classe à deux droites cuspidales se croisant en un point triple.* On a cette surface en projetant Γ par un point P de la droite d'intersection des deux plans tangents le long de MM', MM''. On voit ainsi que, de même que pour la surface générale à deux droites cuspidales (n⁰ 82), il y a sur chacune de ces droites, outre le point triple, un point-clos; et la droite qui joint ces deux point-clos est l'axe d'un faisceau de plans coupant la surface en une série de coniques tangentes en ces deux points à leurs plans singuliers. Parmi ces plans il y en a un qui touche la surface le long d'une conique et un autre qui contient les deux seules droites simples de la surface (sortant respectivement par ces points-clos). Il n'y a pas de cônes de KUMMER. Pour avoir la singularité du point triple il suffit de remarquer qu'un espace passant par PM coupe Γ suivant une quartique ayant en M un point stationnaire dont PM est la tangente (puisque les deux plans tangents en M à Γ se coupent suivant PM). Donc chaque section plane de notre surface passant par le point triple y a un point triple dont les 3 tangentes coïncident en une droite du plan des deux droites cuspidales, de sorte que ce point singulier de la surface est un *point triple uniplanaire.*

91. $[(\overline{1\,1})\,3]$ *Surface de la 5e classe à droite bidouble et un point biplanaire de la 1e espèce.* Sur la droite bidouble il y a deux points triples D', D'', par chacun desquels passe une droite de la surface, outre les deux droites DD', DD'' qui vont au point biplanaire D et le long desquelles la surface est touchée par les deux plans no-

daux de D. Le point D est le sommet d'un cône de KUMMER singulier auquel correspondent deux séries de coniques de la surface. Il y a ∞^1 inversions fondamentales avec les autres propriétés qui s'y rattachent comme dans les cas $[(\overline{1\,1})\,1\,1\,1]$, $[(\overline{1\,1})\,2\,1]$. On obtient cette surface par une inversion biplanaire appliquée à une quadrique tangente au plan d'inversion.

$\{(2\,1)\,1\,1\}$.

92. Dans ce cas et dans les suivants l'arête a du cône de 2e espèce f passant par Γ est tangente aux F_3^2 du faisceau, c'est-à-dire les deux points doubles M', M'' de Γ contenus auparavant dans cette arête coïncideront dans ce cas et dans les suivants en un seul point double, que nous appellerons M. L'espace tangent en M au faisceau contient donc l'arête a de f et coupe en conséquence f en deux plans générateurs, dans lesquels se décomposera le cône quadrique ordinaire tangent en M à Γ. En projetant sur R_3 par un point quelconque P, la projection de M sera donc un point double D biplanaire pour la surface S projection de Γ, et les plans nodaux de ce point se couperont suivant la projection d de a. En se rappelant la construction donnée (n° 26) des droites dont les projections sur R_3 sont les tangentes quadriponctuelles dans un point double de S, et en remarquant que l'espace polaire de P par rapport à f coupe dans notre cas le cône ordinaire tangent en M à Γ suivant la droite a comptée deux fois, on voit que pour le point biplanaire D de la surface S les deux tangentes quadriponctuelles coïncident en d (77). D'ailleurs cela résulte aussi du fait que, comme les plans générateurs de f coupent Γ en des coniques tangentes à a en M, de même pour toutes les surfaces S que nous considérerons il y a une série de ∞^1 coniques dans des plans passant par d et toutes ces coniques touchent d en D. Les espaces passant par P et par a coupent f en deux plans et Γ en deux coniques ; mais parmi eux il y en a en général deux tangents à f et touchant en conséquence Γ le long de deux coniques. Donc pour chaque surface S il y a en général parmi les plans passant par d et coupant S en deux coni-

(77) Cette différence entre les points biplanaires des deux surfaces [3 1 1], [(2 1) 1 1] dans R_3 a déjà été remarquée par M. LORIA. Mais à cela nous pouvons ajouter que, tandis que pour la première surface le point biplanaire est de 1e espèce, pour l'autre il est de 2e espèce, puisqu'il provient de la coïncidence des deux points coniques de la surface [(1 1) 1 1 1].

ques deux plans dont chacun touche cette surface le long d'une conique. — En nous bornant à présent à notre cas $\{(2\,1)\,1\,1\}$, Γ contient 4 droites, car chacun des deux plans générateurs de f qui sont tangents en M à Γ coupe une quelconque des variétés du faisceau en 2 droites, et ces 4 droites sont les seules droites de Γ. Il y a dans le faisceau 2 cônes de 1e espèce (passant par M) auxquels correspondent deux couples de séries de coniques de Γ. Comme dans chaque système de plans générateurs d'un tel cône il y en a un qui passe par M, il y aura dans une telle série de coniques une conique décomposée en deux droites. — Chaque point de a a même espace polaire par rapport au faisceau des F_3^2 ; ces ∞^1 espaces polaires qui correspondent aux points de a forment un faisceau et leur plan d'intersection passe par M et appartient à l'espace tangent en M aux variétés : il est donc tangent en M à celles-ci, c'est-à-dire coupe chacune d'elles en deux droites, et il contient les sommets des deux cônes de 1e espèce.

93. $[(2\,1)\,1\,1]$ *Surface de la* 8e *classe à conique double générale et un point biplanaire de* 2e *espèce.* Les deux plans nodaux du point biplanaire D passent par la droite d et sont, parmi les plans qui passent par cette droite et coupent la surface S en deux coniques tangentes en D à d, les seuls pour lesquels l'une de ces coniques se décompose en deux droites (passant par D). On a ainsi les 4 droites de S. Cette surface a deux cônes de Kummer, à chacun desquels correspondent deux autres séries de coniques de la surface : chacune de ces séries de coniques contient une conique décomposée en deux droites. Il y a ∞^1 inversions fondamentales dont les centres sont sur d et les quadriques directrices touchent en D le plan qui passe par D et par les sommets des cônes de Kummer (et forment en conséquence un faisceau ayant pour base la conique double et deux droites passant par D) : parmi ces inversions il y en a une qui se réduit à une homologie harmonique ayant ce plan pour plan d'homologie et le point d'intersection de d avec le plan de la conique double pour centre d'homologie. Il y a en outre deux inversions fondamentales ayant leurs centres dans les sommets des cônes de Kummer et des quadriques directrices tangentes en D à d.

Considérée comme cyclide cette surface a donc un plan de symétrie perpendiculaire en D à d et contenant un cercle directeur réduit au cercle nul D et une conique déférente coupée par ce cercle dans les 4 foyers de la cyclide et telle que celle-ci est l'enveloppe des ∞^1 sphères ayant leurs centres sur cette conique et tangentes en D à d. Les deux points diagonaux différents de D du quadrangle déterminé par les 4 foyers sont les sommets des deux cônes de KUMMER et les centres de deux inversions fondamentales ayant deux sphères directrices passant par D. Chacune de ces sphères contient deux cercles focaux tangents en D à d, d'où l'on voit quelle position ont par rapport à ces deux sphères leurs quadriques déférentes. — Cette cyclide s'obtient en transformant par inversion un cylindre quadrique.

94. [(2 1) 1 1] *Surface de la* 6ᵉ *classe à conique cuspidale.* Elle présente cette différence de celle du n⁰ 74, que les deux points-clos de la conique cuspidale coïncident pour cette surface en un point D: la tangente d en ce point à la conique cuspidale est telle que dans chaque plan passant par d l'intersection avec la surface se compose de deux coniques ayant en D un contact quadriponctuel avec d pour tangente commune. Parmi ces plans il y en a un qui touche la surface le long d'une conique, et un autre, qui est le plan tangent singulier du point-clos particulier D et qui coupe la surface dans ses 4 droites (qui passent par D). Pour ce point-clos D la tangente singulière coïncide avec la tangente d à la courbe cuspidale. Dans le plan singulier il y a une droite passant par D (la droite d'intersection de R_3 avec le plan polaire de a) qui contient les sommets des deux cônes de KUMMER de la surface, cônes qui passent par la conique cuspidale, et le point de rencontre des plans tangents à la surface dans les points de cette conique. La surface correspond à soi-même par rapport à ∞^1 homologies harmoniques dont les plans passent par la droite nommée et les centres sont sur d. Elle a en outre deux inversions fondamentales.

Cette surface considérée comme cyclide (cartésienne) a pour foyers les sommets des deux cônes de KUMMER et elle a en outre deux cercles focaux. Cependant si l'absolu est véritablement le cercle imaginaire à l'infini, cette cyclide est imaginaire; et le même fait arrive pour les autres cyclides cartésiennes, que nous aurons encore à considérer.

95. [$\overline{1}$ (2 1) 1] *Surface de la* 8ᵉ *classe à deux droites doubles et un point biplanaire de* 2ᵉ *espèce.* Des 4 droites de la surface, qui passent toutes par le point biplanaire D, deux coupent l'une et deux l'autre des droites doubles. Il y a un cône de KUMMER auquel correspondent deux séries de coniques, qui, avec celles situées dans les plans passant par les droites doubles et par l'intersection d des

deux plans nodaux de D, forment les 5 séries de coniques de la surface. Il y a ∞^1 inversions fondamentales ayant les centres sur d et pour quadriques directrices des cônes (d'un faisceau), et en outre une autre inversion fondamentale conique ayant le centre dans le sommet du cône de KUMMER, et une inversion fondamentale non plus conique ayant pour centre le point d'intersection des droites doubles. — On obtient cette surface par une inversion conique sur un cône quadrique dont le sommet soit sur le plan d'inversion.

96. [$(\overline{2\,1})\,1\,1$] *Surface de la 8^e classe à droite bidouble (contenant deux points triples infiniment voisins).* Cette surface à droite bidouble d diffère de celles considérées jusqu'à présent en ce que les deux points triples de cette droite viennent coïncider en un seul point D et la projection nous montre immédiatement que le cône nodal de ce point triple se décompose dans le plan ϱ qui touche la surface le long de d et deux autres plans passant aussi par d et dont chacun coupe la surface outre qu'en d en un couple de droites passant par D. La surface a deux cônes de KUMMER, à chacun desquels correspondent deux séries de coniques. Elle a deux inversions fondamentales dont les centres sont les sommets de ces cônes et les quadriques directrices sont des couples de plans (passant par d), et ∞^1 inversions fondamentales dont les centres sont les points de d et les quadriques directrices sont des cônes ayant le sommet en D: parmi ces inversions il y a une homologie harmonique.

$\{(2\,1)\,2\}$.

97. Lorsque la surface Γ a cette caractéristique, elle appartient encore à un cône de 2^e espèce f dont l'arête a touche le faisceau en un point double M de Γ, mais en outre elle appartient à un cône quadrique de 1^e espèce f_1 dont le sommet M_1 est un autre point double de Γ. La droite MM_1 appartient à Γ et cette surface a le long d'elle pour plan tangent le plan générateur de f qui la contient et qui est l'un des deux plans tangents en M à Γ: l'autre de ces plans coupe Γ en deux droites passant par M et appartenant aux deux plans générateurs de f_1 qui passent par la droite MM_1; et on a ainsi les 3 droites de Γ. Les plans générateurs de f et de f_1 déterminent dans Γ 3 séries de coniques.

98. [$(2\,1)\,2$] *Surface de la 6^e classe à conique double générale, un point conique et un point biplanaire de la 2^e espèce.* Des deux plans nodaux du point biplanaire D l'un touche la surface S le long de la droite qui joint ce point au point conique D_1, l'autre la coupe

en deux droites passant par D. L'intersection d de ces deux plans est l'axe d'un faisceau de plans coupant S en des couples de coniques d'une série de coniques tangentes en D à d. Parmi ces plans il y en a deux qui touchent S le long de deux coniques. Le point conique D_1 est le sommet d'un cône de KUMMER singulier, auquel correspondent deux autres séries de coniques de S.

Comme cyclide cette surface a dans le plan perpendiculaire en D à d (plan de symétrie qui contient aussi le point conique D_1) une conique déférente qui coupe le cercle nul D (cercle directeur) en un quaterne $[\overline{1}\,2]$ de foyers dont deux coïncident en D_1, qui n'est plus un véritable foyer, de sorte qu'il reste seulement deux foyers proprement dits sur l'une des deux droites qui joignent D aux deux points cycliques du plan. Il y a en outre un couple de cercles focaux tangents à d en D: ces cercles appartiennent à la quadrique déférente de la sphère directrice nulle D_1 et cette quadrique déférente est le lieu des centres des sphères passant par D_1 et tangentes à la cyclide. Celle-ci n'a pas d'inversions fondamentales, outre celles qui correspondent aux sphères tangentes en D au plan de symétrie. — Elle est l'inverse d'une quadrique ayant un contact quadriponctuel avec l'absolu, ou bien d'un cylindre quadrique dont l'une des génératrices à l'infini soit tangente à l'absolu.

99. $[(2\,1)\,2]$ *Surface de la 4^e^ classe à conique cuspidale et un point conique.* La conique cuspidale a, comme pour la surface du n⁰ 94, les deux points-clos confondus en un point D; la tangente d en D à cette conique et le plan tangent singulier de ce point-clos jouissent encore des mêmes propriétés que pour cette surface-là. Seulement à présent ce plan singulier touche la surface le long de la droite joignant le point conique D_1 au point D et la coupe encore en 2 droites passant par ce point D. Le point conique D_1 est maintenant le sommet d'un cône de KUMMER singulier (dans lequel coïncident les deux cônes de KUMMER non singuliers de cette surface-là). Parmi les plans passant par la droite d il y a d'ailleurs toujours un plan tangent à la surface le long d'une conique. La surface correspond encore à soi-même par rapport à ∞^1 homologies harmoniques ayant les centres sur d et les plans qui passent par la droite DD_1, mais elle n'a pas d'autres inversions fondamentales. Si on la considérait comme cyclide cartésienne, elle n'aurait pas de foyers.

100. $[\overline{2}\,(2\,1)]$ *Surface de la 6^e^ classe à deux droites doubles se croisant en un point triple et à un point biplanaire de la 2^e^ espèce.*

Le point biplanaire D a deux plans nodaux, dont l'un touche la surface le long de la droite qui joint ce point au point triple D_1, et l'autre coupe la surface en deux droites passant par D et appuyées respectivement sur les deux droites doubles. Le point triple D_1 a un cône tangent décomposé dans le plan des droites doubles et un cône quadrique passant par ces droites. La surface a une série de coniques dans les plans qui passent par l'intersection d des deux plans nodaux de D. Les points de cette droite d sont les centres de ∞^1 inversions fondamentales dont les quadriques directrices forment un faisceau de cônes. — Cette surface est l'inverse conique d'un cône quadrique dont une génératrice appartient au faisceau des deux droites qui composent l'absolu de l'inversion.

101. $[(\overline{2\ 1})\ 2]$ *Surface de la* 6e *classe à droite bidouble et un point conique.* Les deux points triples de la droite bidouble d coïncident pour cette surface en un point D dont le cône tangent se décompose dans ϱ et deux autres plans passant aussi par d. L'un de ces plans touche la surface le long de la droite qui joint le point triple D au point conique D_1, tandis que l'autre coupe la surface (outre qu'en d) en deux droites passant par D. La surface a un cône de KUMMER singulier ayant le sommet en D_1 et tangent aux deux plans qui joignent la droite DD_1 aux deux autres droites simples de la surface. Elle a aussi ∞^1 inversions fondamentales ayant les centres sur d et les quadriques directrices formant un faisceau de cônes ayant le sommet en D. — Elle est l'inverse d'une quadrique par rapport à un couple de plans dont l'axe soit tangent à cette quadrique.

102. *Surface du* 4e *ordre et de la* 6e *classe à droite cuspidale de* 2e *espèce.* Nous entendons par ce dernier mot une droite telle que chaque section plane de la surface ait dans le point d'intersection avec cette droite un point de rebroussement de 2e espèce. Or on obtient une surface douée d'une telle droite singulière en projetant Γ (n° 97) par un point P du plan tangent le long de la droite MM_1 (et comme ce plan appartient à f on voit que cette surface est un cas particulier de la précédente). Car un espace passant par P coupe Γ en une quartique située sur le cône d'intersection de cet espace avec f, c'est-à-dire sur un cône dont le sommet est sur a et une génératrice passant par P est tangente à la quartique en un point de la droite MM_1 : d'où, en projetant par P cette quartique, il suit que dans R_3 chaque plan coupe notre surface en une quartique

ayant sur la droite d, projection de a, un point de rebroussement de 2e espèce avec la tangente singulière en un plan fixe ϱ (le plan d'intersection de R_3 avec l'espace tangent en P à f). Si l'espace considéré passe par M, sa quartique d'intersection avec Γ a en M un point double dont l'une des deux tangentes passe par P (et l'autre appartient au second plan tangent en M à Γ) ; si cet espace passe au contraire par M_1 sa quartique d'intersection avec Γ aura en ce point un point double et appartiendra à un cône quadrique (intersection avec f) qui sans avoir le sommet en ce point a pour génératrice passant par ce point double une droite qui passe par P. Donc en nommant D, D_1 les projections de M, M_1 sur R_3 (et en appliquant le contenu de la note [(28)] à p. 351) nous aurons : *La droite cuspidale de 2e espèce* d *contient deux points singuliers, c'est-à-dire un point triple* D *dont le cône nodal se décompose dans le plan* ϱ *compté deux fois et un autre plan passant par* d *et coupant la surface en deux autres droites qui passent par* D, *et un point* D_1 *d'osculation de deux nappes, c'est-à-dire un point double tel que les sections planes passant par lui ont en ce point un point d'osculation de deux branches avec la tangente située sur* ϱ. — La surface ne contient d'autres droites simples que les deux nommées. Elle a un cône de KUMMER singulier avec le sommet en D_1.

$\{(3\ 1)\ 1\}$.

103. La surface Γ appartient dans ce cas à un cône quadrique de 1e espèce et à un cône de 2e espèce f qui, non seulement a l'arête a tangente aux autres variétés du faisceau en un point M double pour Γ, mais en outre est lui-même tangent à l'espace qui touche en M toutes ces variétés. En conséquence le cône quadrique ordinaire tangent en M à Γ se réduit dans ce cas au plan générateur de contact de f avec cet espace compté deux fois, c'est-à dire M est un *point uniplanaire* pour Γ. Les surfaces S projections de Γ auront donc dans les points doubles qui sont les projections de M des points uniplanaires. Ce plan générateur de f coupe (une autre variété du faisceau et en conséquence) Γ suivant deux droites passant par M et qui seront les seules droites de Γ. Les deux plans générateurs du cône de 1e espèce qui passent par M touchent Γ le long de ces deux droites respectivement (comme on voit, par exemple, dans le faisceau des cônes ordinaires d'intersection des variétés du faisceau avec l'espace tangent en M). La conique polaire de f par rapport à une variété φ du faisceau qui ne soit pas un cône est

dans le plan polaire de a et passe par M: elle coupe en conséquence φ seulement en deux autres points.

104. [(3 1) 1] *Surface de la 6e classe à conique double générale et un point uniplanaire.* Ce point uniplanaire est de la 1e espèce, c'est-à-dire il abaisse de 6 la classe de la surface; effectivement on peut dire qu'il provient de la coïncidence des trois points coniques de la surface [(1 1) 2 1] (n^0 78) lorsqu'on les fait approcher entre eux (non en une même direction). Le plan nodal de ce point uniplanaire D coupe la surface S en deux droites passant par ce point et qui sont les seules droites de la surface, et en outre en une conique passant par D et dont la tangente d en D (*tangente singulière* du point uniplanaire) jouit de la propriété que chaque plan passant par elle coupe la surface en deux coniques tangentes en D à d. Deux de ces plans touchent S le long d'une conique. Cette surface est touchée le long de ses deux droites par deux plans tangents à un cône de KUMMER de la surface: à ce cône de KUMMER correspondent deux autres séries de coniques de S contenant respectivement les coniques formées par ces droites comptées deux fois. Il y a une inversion fondamentale ayant le centre dans le sommet de ce cône de KUMMER et la quadrique directrice tangente en D au plan nodal et ∞^1 autres inversions fondamentales ayant les centres sur d et les quadriques directrices formant un faisceau de quadriques se touchant en D; parmi ces inversions il y a une homologie harmonique.

Comme cyclide cette surface a donc un plan de symétrie perpendiculaire à d dans le point uniplanaire D et dans lequel se trouve le sommet du cône de KUMMER. Dans ce plan il y a la conique déférente, laquelle passe par D et est en outre coupée par les deux droites joignant D aux points cycliques du plan (cercle directeur) en deux points qui sont les foyers de la cyclide. On peut donc définir cette cyclide comme l'enveloppe des sphères qui ont les centres sur une conique donnée et qui passent par un de ses points donné (lequel sera le point uniplanaire). Le fait que deux des foyers coïncident en D (foyer impropre) nous est aussi prouvé par la caractéristique $[\overline{2}\,1]$ qu'a dans ce cas sur le cercle nul D le quaterne de foyers: cela nous prouve aussi que la droite qui joint les deux foyers coupe la tangente en D à la conique déférente en un point qui est le sommet du cône de KUMMER et le centre d'une sphère directrice passant par D et coupant sa quadrique déférente en une quartique [(3 1)], c'est-à-dire en une quartique décomposée dans les deux droites de la cyclide passant par D et un cercle focal qui touche d en D. Cette cyclide s'obtient en transformant par inversion un cylindre parabolique.

105. [(3 1) 1] *Surface de la 4e classe à conique cuspidale.* La conique cuspidale de cette surface a les deux points-clos coïncidents en un D, dans lequel la tangente d à cette conique (tangente singulière du point-clos D) est telle que les plans passant par d coupent la surface en deux coniques ayant un contact quadriponctuel en D avec d pour tangente, et parmi ces plans le plan tangent singulier de D touche la surface le long d'une conique décomposée en deux droites passant par D et qui sont les seules droites de la surface. Ce même plan contient (en ligne droite avec D) le point de rencontre des plans tangents à la surface dans les points de la conique cuspidale et le sommet du cône de KUMMER de la surface, cône qui passe par la conique cuspidale. Il y a ∞^1 homologies harmoniques et une inversion proprement dite, qui tansforment la surface en elle-même.

106. [$\bar{1}$(3 1)] *Surface de la 6e classe à deux droites doubles et un point uniplanaire.* Par le point uniplanaire D dans le plan nodal passent encore (comme pour la surface du n^0 104) deux droites de la surface et une droite d qui est l'axe d'un faisceau de plans coupant la surface suivant des couples de coniques (parmi lesquels deux plans la touchent le long de deux coniques). Le long de ces deux droites la surface est touchée par deux plans qui passent respectivement par les deux droites doubles. Les plans qui passent par l'une ou l'autre des droites doubles, ou par d, déterminent les 3 séries de coniques de la surface. Celle-ci n'a donc pas de cônes de KUMMER, et elle a ∞^1 inversions fondamentales coniques ayant les points de d pour centres, et une inversion fondamentale non conique ayant pour centre le point de rencontre des deux droites doubles. — Elle est la transformée par inversion conique d'un cône quadrique tangent au plan d'inversion.

107. *Surface de la 6e classe à droite double et droite cuspidale.* La surface dont nous voulons parler s'obtient en projetant Γ (n^0 103) par un point P du plan tangent à Γ le long de l'une des deux droites passant par M. Cette droite aura pour projection la droite cuspidale, qui contiendra deux points remarquables : le point d'intersection avec la droite double, point qui jouira encore comme en

général (v. n^0 40) de la propriété que toutes les sections planes passant par lui y ont un point de rebroussement de 2^e espèce, et le point D projection de M. Un espace passant par PM coupe Γ en une quartique ayant en M un point stationnaire avec la tangente dans le plan tangent à Γ en M et avec un plan tangent qui passe par P. Donc le point D de la droite cuspidale est tel que toutes les sections planes passant par lui y ont encore un point de rebroussement de 2^e espèce dont la tangente appartient à un plan singulier fixe, qui passe par la droite cuspidale et touche encore la surface le long d'une droite passant par D, la seule droite simple de la surface. Dans ce plan et par D passe une droite d qui est l'axe d'un faisceau de plans coupant la surface en une série de coniques tangentes en D à d. On peut considérer le point singulier D comme provenant du point conique de la surface du n^0 81 lorsqu'il va se poser sur la droite cuspidale.

108. En projetant Γ par un point P de la droite d'intersection des plans tangents le long des deux droites de Γ on a une *surface de la 6^e classe à deux droites cuspidales* remarquable, qui diffère de celle générale étudiée au n^0 82 en ce que dans le point de rencontre des deux droites cuspidales sont venus coïncider les deux points-clos qu'avaient ailleurs ces droites. Pour voir la singularité de ce point D de rencontre des droites cuspidales dans notre cas, remarquons qu'il est la projection de M et qu'un espace quelconque mené par PM coupe Γ en une quartique ayant en M un point stationnaire et située sur un cône n'ayant pas le sommet en M mais passant par PM (l'intersection de cet espace avec le cône de 1^e espèce de notre faisceau). Donc en projetant cette quartique par P nous voyons (v. la note [(28)] à p. 351) que le point singulier D de notre surface est pour chaque section plane passant par lui un point de rebroussement de 3^e espèce ayant pour tangente une droite du plan des droites cuspidales. Celles-ci sont les seules droites de la surface et il y a dans leur faisceau une droite d telle que tous les plans passant par elle coupent la surface en deux coniques ayant en D un contact quadriponctuel (avec d pour tangente commune). Les faisceaux de plans ayant pour axes les deux droites cuspidales et d déterminent les 3 séries de coniques de la surface.

109. $[(\overline{3\ 1})\,1]$ *Surface de la 6^e classe à droite bidouble.* Les deux points triples de la droite bidouble d coïncident en un D par lequel passent les deux droites simples de la surface, lesquelles se trouvent

dans un plan passant par d: ce plan compté deux fois et le plan ϱ qui touche la surface tout le long de d forment le cône cubique tangent à la surface dans le point triple D. Les plans tangents à la surface le long de ses deux droites simples sont aussi tangents au cône de KUMMER qu'a dans ce cas la surface, cône auquel correspondent deux séries de coniques de celle-ci.

Pour obtenir cette surface on projette Γ par un point quelconque du cône de 2e espèce f. Mais si plus en particulier on prend le centre de projection sur le plan tangent en M à Γ on a un cas particulier remarquable de cette surface, c'est-à-dire une *surface de la 6e classe à droite bidouble douée d'un point triple uniplanaire.* Car on voit facilement que dans ce cas le point triple D aura pour cône tangent le plan ϱ compté 3 fois; et on voit aussi que maintenant la surface n'a plus d'autres droites que la droite bidouble d et que le cône de KUMMER a le sommet sur le plan ϱ, etc.

{(4 1)}.

110. Cette surface Γ appartient à un faisceau de F_3^2, dans lequel il n'y a qu'un seul cône f: ce cône est de 2e espèce et a son arête a tangente aux autres F_3^2 en un point M dont l'espace tangent à celles-ci touche aussi f le long d'un plan générateur, qui (à différence du cas {(3 1) 1} du n^0 103) touche le long d'une droite les variétés du faisceau. Donc dans ce cas la surface Γ contient seulement cette droite et a pour plan tangent le long d'elle le plan tangent en M à Γ, c'est-à-dire le plan générateur de f nommé. Il n'y a dans Γ d'autres coniques que celles appartenant aux plans générateurs de f. Remarquons enfin encore, car il nous faudra appliquer cela dans la suite, que la conique polaire de f par rapport à une autre variété quelconque φ du faisceau touche en M la droite de Γ et coupe en conséquence φ en un seul autre point.

111. [(4 1)] *Surface de la 5e classe à conique double générale et un point uniplanaire.* Ce point uniplanaire D est de 2e espèce, c'est-à-dire il abaisse de 7 unités la classe de la surface; et en effet on peut dire qu'en lui sont venus coïncider les deux points coniques et le point biplanaire (de 1e espèce) de la surface [(1 1) 3] du n^0 86. Le plan nodal de ce point uniplanaire D touche la surface le long de la seule droite contenue dans celle-ci, droite qui passe par D, et la coupe encore suivant une conique passant par D et dont la tangente d en ce point est l'axe d'un faisceau de plans coupant la

surface en une série de coniques tangentes à d en D. Parmi ces plans deux touchent la surface le long de deux coniques. La surface ne contient que cette seule série de coniques. Elle a ∞^1 inversions fondamentales dont les centres sont sur d et les quadriques directrices forment un faisceau, etc.

Considérée comme cyclide cette surface a donc un plan de symétrie perpendiculaire en D à d et dans lequel se trouve la droite de la surface. La conique déférente touche en D cette droite et coupe l'autre droite qui compose le cercle nul D en un point qui est le seul foyer de la surface. On voit ainsi que cette cyclide est l'enveloppe des ∞^1 sphères ayant leurs centres sur une conique fixe et passant par un point de contact de celle-ci avec une tangente menée par un point cyclique. Comme il n'y a pas de cônes de KUMMER, de même il n'y a pas d'autres sphères coupant la cyclide suivant des couples de cercles que celles tangentes en D à d. — Cette surface s'obtient en transformant par inversion un cylindre parabolique dont la droite à l'infini soit tangente à l'absolu.

112. [(4 1)] *Surface de la* 3e *classe à conique cuspidale.* Dans le point D de coïncidence des deux points-clos de la conique cuspidale de cette surface la tangente d à cette conique est l'axe du faisceau de plans contenant la seule série de coniques de la surface. Parmi ces plans le plan singulier de D coupe la surface en une droite passant par D (la seule droite de la surface) comptée 4 fois. Cette droite contient le point de rencontre des plans tangents à la surface dans les points de la conique cuspidale. Comme cyclide cartésienne cette surface n'aurait pas de foyers [78].

113. [$(\overline{4\ 1})$] *Surface de la* 5e *classe à droite bidouble.* Les plans passant par cette droite bidouble contiennent la seule série de coniques de la surface, coniques qui touchent d dans le point triple D. L'un de ces plans touche la surface le long d'une droite passant par D, qui est la seule droite simple de la surface ; et ce plan, compté deux fois, forme avec le plan ϱ tangent à la surface le long de d le cône cubique tangent à la surface dans le point triple D.

[78] Cette surface à conique cuspidale est la réciproque de la surface du 3e ordre de l'espèce XX de SCHLÄFLI (voir à la p. 320 du Mémoire de CAYLEY cité dans la note [[76]] au n0 87).

114. *Surface de la 5e classe à droite cuspidale de 2e espèce.* On obtient une telle surface en projetant Γ (n^0 110) par un point P du plan tangent en M, plan qui est aussi tangent le long de la droite de Γ; de sorte que cette surface est un cas particulier de la précédente (que l'on obtenait en projetant Γ par un point quelconque de f), c'est-à-dire le cas dans lequel la droite simple de celle-là coïncide avec d. Elle est aussi un cas particulier de la surface du n^0 102, comme le montrent leurs caractéristiques; et on voit de même que pour celle-ci que chaque section plane a sur la droite d (projection de a) un point de rebroussement de 2e espèce avec la tangente dans un plan fixe ϱ. Mais les deux points singuliers que nous trouvions sur la droite d pour cette surface coïncident maintenant en un point triple D, projection de M. Comme chaque section de Γ faite par un espace passant par PM a en M un point stationnaire dont PM est la tangente, chaque section plane de notre surface passant par D aura en ce point un point triple à trois tangentes coïncidantes; donc pour notre surface le point triple D est uniplanaire et a pour plan tangent le plan ϱ tangent à la surface le long de d. — Cette surface ne contient d'autres droites que d, ni d'autres séries de coniques que celle appartenant aux plans qui passent par d; etc.

$\{(1\ 1)(1\ 1)\ 1\}$.

115. Dans ce cas et dans le cas suivant $\{(2\ 1)(1\ 1)\}$ la surface Γ appartient à deux différents cônes quadriques de 2e espèce f, f_1, auxquels correspondent deux séries de coniques de Γ, deux séries d'espaces touchant Γ le long de ces coniques (espaces tangents à f, f_1), etc. Chacune des arêtes a, a_1 de f, f_1 coupe Γ en deux points doubles $M'M''$ et $M_1'M_1''$; et comme a et a_1 sont conjuguées par rapport à toutes les variétés du faisceau, les droites $M'M_1'$, $M'M_1''$, $M''M_1'$, $M''M_1''$ joignant les deux points doubles de l'une arête aux points doubles de l'autre appartiendront à Γ. Elles sont même les seules droites de Γ, car nous avons vu qu'une droite de Γ doit nécessairement couper l'arête de chaque cône de 2e espèce passant par Γ. Et comme dans le cas présent il y a aussi dans le faisceau des F_3^2 un cône de 1e espèce ψ, on voit bien que les plans générateurs de ce cône qui passent respectivement par ces 4 droites (et parmi lesquels ceux qui passent par $M'M_1'$, $M''M_1''$ appartiennent à un système de plans générateurs, et ceux qui passent par $M''M_1'$, $M'M_1''$ appartiennent à l'autre système) sont tangents à Γ le long de ces

droites. A ce cône ψ de 1e espèce correspondent deux séries de coniques de Γ, qui présentent toujours la relation que deux coniques de même série n'ont pas de points communs, tandis que deux coniques de séries différentes ont deux points communs. En outre aux deux cônes de 2e espèce f, f_1 correspondent, comme nous avons déjà dit, deux séries de coniques, dont l'une passant par M', M'' et l'autre par M_1', M_1''. Comme chaque plan générateur de l'un des 3 cônes du faisceau coupe chaque plan générateur d'un autre de ces cônes en un point de Γ, deux coniques de différentes séries de Γ (pourvu qu'elles ne correspondent pas toutes les deux à ψ) se couperont en un seul point.

Considérons deux espaces tangents respectivement aux deux cônes de 2e espèce f, f_1: les coniques le long desquelles ils touchent Γ ont un point commun. En ce point de Γ ces deux espaces touchent f, f_1, c'est-à-dire deux des variétés du faisceau: en conséquence leur intersection est le plan tangent en ce point à Γ et ce plan sera aussi tangent en ce point aux quadriques dans lesquelles ces deux espaces coupent une variété quelconque φ du faisceau. En projetant par un point quelconque de φ nous voyons donc que dans R_3 la surface à conique double qui est la projection de Γ est touchée le long de deux séries de coniques par deux systèmes simplement infinis de quadriques passant par la conique double (c'est-à-dire est l'enveloppe de chacun de ces systèmes de quadriques), tels que deux quadriques de différents systèmes se touchent en un point.

Comme le cône de 2e espèce f est touché en M_1', M_1'' par les espaces tangents en ces points à toutes les variétés du faisceau, la conique polaire de f par rapport à une autre quelconque φ de ces variétés sera tangente à ces espaces en ces deux mêmes points, de sorte que les points d'intersection de cette conique avec φ se réduisent à M_1', M_1'' (comptés deux fois). De même la conique polaire de f_1 par rapport à φ touche φ en M', M''. De là il suit que l'on ne peut plus prendre un centre de projection tel que la surface projection de Γ ait une conique cuspidale, et il suit aussi que la surface projection de Γ n'a pas, considérée comme cyclide, de véritables foyers.

116. [(1 1) (1 1) 1] *Surface de la 4e classe à conique double générale et deux couples de points coniques.* Soient D', D'' et D_1', D_1'' les deux couples de points coniques (projections de M', M'' et M_1', M_1''): les droites contenues dans la surface sont $D'D_1'$, $D'D_1''$, $D''D_1'$, $D''D_1''$ et le long d'elles la surface est touchée par 4 plans se rencontrant en un point, qui est le sommet du cône de KUMMER de

la surface (cône tangent à ces plans). A ce cône de KUMMER correspondent deux séries de coniques de la surface. En outre les deux faisceaux de plans ayant $D'D''$ et $D'_1 D''_1$ pour axes déterminent deux autres séries de coniques de la surface : dans chacun de ces faisceaux il y a deux plans touchant la surface le long de coniques. Par chaque point de la surface il passe une conique pour chaque série : deux coniques qui correspondent au cône de KUMMER ne se coupent pas si elles sont de la même série et se coupent en deux points si elles sont de séries différentes (en 4 points seulement si elles sont dans un même plan) ; ce cas excepté, deux coniques de séries différentes se coupent toujours en un seul point. — Il y a une inversion fondamentale dont le centre est dans le sommet du cône de KUMMER et la quadrique directrice passe par les 4 droites de la surface ; et ∞^1 inversions fondamentales dont les centres sont sur $D'D''$ et ∞^1 dont les centres sont sur $D'_1 D''_1$. En particulier il y a parmi ces inversions deux homologies harmoniques ayant les centres dans les points d'intersection des deux droites $D'D''$, $D'_1 D''_1$ avec le plan de la conique double.

Cette surface (qui est elle-même sa réciproque) offre beaucoup d'intérêt lorsqu'on la considère comme cyclide : elle est alors la *cyclide de Dupin*. Nous voyons que cette cyclide a deux couples de points coniques $D'D''$, $D'_1 D''_1$ et deux plans de symétrie respectivement perpendiculaires aux segments $D'D''$, $D'_1 D''_1$ dans leurs points de milieu. Dans ces deux plans sont les deux coniques déférentes, dont l'une touche en D'_1, D''_1 le cercle (directeur) d'intersection des sphères nulles D', D'' et l'autre touche en D', D'' le cercle directeur d'intersection des sphères nulles D'_1, D''_1. Les tangentes en D'_1, D''_1 et en D', D'' à ces deux coniques déférentes ou à leurs cercles directeurs passent par un même point, qui est le sommet du cône de KUMMER. Ces deux coniques déférentes sont les lieux des centres de deux séries de ∞^1 sphères passant respectivement par D', D'' et par D'_1, D''_1, chacune desquelles a la cyclide pour enveloppe. Chaque sphère touche la cyclide le long d'un cercle : deux sphères de différentes séries se touchent en un point commun à leurs cercles de contact avec la cyclide. Si donc l'on prend d'une manière quelconque 3 sphères de l'une série, on peut définir la cyclide de DUPIN comme l'enveloppe d'une série de sphères tangentes à ces 3 sphères (sur chacune de celles-ci le lieu des points de contact avec ces sphères tangentes sera un cercle de contact avec la cyclide) : l'on obtient ainsi l'une des deux séries de sphères ; l'autre se composera des 3 sphères données et d'une infinité d'autres, qui touchent aussi toutes les sphères de la série déjà obtenue. Les deux séries des cercles de contact de la cyclide avec ces deux séries de sphères passent respectivement par les deux couples de points coniques, et ils sont (v. à la fin du n^0 64) les lignes de courbure de la cyclide. De plus les deux tangentes en un point quelconque de la surface aux deux lignes de courbure passant par lui sont les bissectrices des deux tangentes en ce point à chacune des ∞^1 quartiques de la cyclide qui y ont un point double et en particulier des tangentes aux cercles des deux autres séries qui passent par ce point (v. n^0 11).

Cette cyclide n'a pas de foyers: elle a sur la sphère directrice dont le centre est le sommet du cône de KUMMER une quartique focale décomposée dans les 4 droites de la surface. Donc la quadrique déférente, qui est le lieu des centres des ∞^2 sphères doublement tangentes à la cyclide (et orthogonales à cette sphère directrice), devant couper cette sphère en ces droites, en sera touchée dans 4 de ses ombilics (les points coniques de la cyclide). Cette quadrique et les coniques déférentes appartiennent à un système homofocal de quadriques.

La cyclide de DUPIN est l'inverse d'un cône quadrique de révolution.

117. $[\overline{1}(1\,1)(1\,1)]$ *Surface de la 4e classe à deux droites doubles et deux couples de points coniques.* En nommant encore D', D'' et D_1', D_1'' les deux couples de points coniques, les droites $D'D_1'$, $D''D_1''$ et $D'D_1''$, $D''D_1'$ appartiennent à la surface et coupent respectivement l'une et l'autre des deux droites doubles et ont précisément pour plans tangents le long d'elles à la surface les plans qui les joignent respectivement à celles ci. Outre les coniques situées dans les plans qui passent par l'une ou l'autre des droites doubles, la surface a deux séries de coniques passant respectivement par D', D'' et par D_1', D_1'': dans chacune de ces deux séries il y a deux coniques de contact de la surface avec des plans. Il y a une inversion fondamentale ayant le centre à l'intersection des deux droites doubles et une quadrique directrice qui passe par celles-ci et par les 4 droites simples de la surface, et deux systèmes de ∞^1 inversions coniques fondamentales dont les centres sont respectivement sur $D'D''$ et sur $D_1'D_1''$. — Cette surface est l'inverse conique d'un cône tangent aux deux droites formant l'absolu.

118. *Surface de la 4e classe à droite double et droite cuspidale et deux points coniques.* En projetant Γ par un point du plan tangent

le long d'une de ses droites, par exemple de $M'M_1'$, l'on a une telle surface. La droite cuspidale (projection de cette droite de Γ) a deux points-clos D', D_1' (différents du point de rencontre avec la droite double) joints aux deux points coniques D'', D_1'' par deux droites $D'D''$, $D_1'D_1''$ qui sont les axes de deux faisceaux de plans contenant deux séries de coniques de la surface (dans chacun de ces deux faisceaux il y a un plan tangent à la surface le long d'une conique non décomposée), et par deux droites $D'D_1''$, $D_1'D''$ appartenant à la surface et le long desquelles celle-ci est touchée par deux plans passant par la droite cuspidale, c'est-à-dire par les plans singuliers des deux points clos D', D_1'. La surface contient en outre la droite $D''D_1''$ joignant les deux points coniques et a le long d'elle pour plan tangent un plan passant par la droite double.

119. *Surface de la* 4^e *classe à deux droites cuspidales et un point conique.* On a une telle surface en projetant Γ par un point de l'une des 4 génératrices du cône de 1^e espèce du faisceau, qui passent par les 4 points doubles de Γ; car une telle génératrice est l'intersection de deux plans tangents à Γ le long de deux droites, par exemple le long de $M''M_1'$, $M''M_1''$. En appelant D' le point conique de la surface, D'' le point d'intersection des deux droites cuspidales et D_1', D_1'' les deux points-clos de celles-ci, la surface contient les droites $D'D_1'$, $D'D''_1$, qui joignent le point conique à ces points-clos, et est touchée le long d'elles par les plans passant par ce point conique et respectivement par les deux droites cuspidales, c'est-à-dire par les plans singuliers des deux points-clos D_1', D_1''. Les deux faisceaux de plans passant par les droites $D'D''$ et $D_1'D_1''$ coupent la surface en deux séries de coniques : dans le second de ces faisceaux, c'est-à dire parmi les plans passant par les deux points-clos D_1', D_1'', il y en a un qui touche la surface le long d'une conique (non décomposée).

120. $[(\overline{1\ 1})(1\ 1)\ 1]$ *Surface de la* 4^e *classe à droite bidouble et un couple de points coniques.* Les deux points triples de la droite bidouble d sont joints aux deux points coniques par 4 droites de la surface, le long desquelles celle-ci est touchée par 4 plans tangents à un cône de Kummer. La surface contient deux séries de coniques dans les plans tangents à ce cône, une série dans les plans qui passent par la droite bidouble, et enfin une série dans les plans qui passent par les deux points coniques, parmi lesquels il y en a deux qui touchent la surface le long de deux coniques. Elle a une inver-

sion fondamentale ayant pour centre le sommet du cône de KUMMER et pour quadrique directrice le couple des plans qui joignent d aux deux points coniques; ∞^1 inversions fondamentales dont les centres sont sur la droite des deux points coniques et les quadriques directrices sont des couples de plans passant par d et formant une involution; et ∞^1 inversions fondamentales dont les centres sont sur d et les quadriques directrices sont des cônes tangents au plan ϱ le long de d et passant par les deux points coniques. — On a cette surface en transformant un cône quadrique par une inversion biplanaire.

{(2 1) (1 1)}.

121. La surface Γ qui a cette caractéristique appartient à un faisceau de F_3^2, dans lequel il n'y a pas de cônes de 1e espèce, mais deux cônes de 2e espèce f, f_1, dont l'un, par exemple f_1, a son arête a_1 tangente à chaque variété du faisceau, de sorte que des deux couples de points doubles $M' M''$, $M_1' M_1''$ de la surface {(1 1) (1 1) 1} (n⁰ 115) l'un $M_1' M_1''$ vient se composer de deux points coïncidents en un M_1. On voit alors, comme dans le cas {(2 1) 1 1}, que le cône quadrique ordinaire tangent en ce point M_1 à Γ se décompose en deux plans générateurs de f_1 lesquels seront tangents à Γ le long de ses deux droites $M'M_1$, $M''M_1$, qui seront les seules droites de Γ. Dans ce cas cette surface n'a plus que deux séries de coniques, respectivement dans les plans générateurs de f et de f_1.

122. [(2 1) (1 1)] *Surface de la 4e classe à conique double générale, un couple de points coniques et un point biplanaire de 2e espèce.* Soient D', D'' les points coniques, D_1 le point biplanaire: D_1D', D_1D'' seront les seules droites de la surface et celle-ci sera touchée le long d'elles par les deux plans nodaux de D_1. La droite d_1 dans laquelle se coupent ces plans (la tangente quadriponctuelle en D_1) est l'axe d'un faisceau de plans coupant la surface suivant des coniques tangentes en D_1 à d_1. La droite d qui joint D', D'' est aussi l'axe d'un faisceau de plans coupant la surface en des couples de coniques passant par D', D''. On a ainsi les deux séries de coniques de la surface; elles contiennent 4 coniques de contact avec des plans.

Considérée comme cyclide cette surface a le plan perpendiculaire en D_1 à d_1 (plan contenant d) et le plan perpendiculaire à $D'D''$ dans son point de milieu (plan contenant d_1) pour plans de symétrie. Dans le premier plan il y a un cercle directeur réduit au cercle nul de centre D_1, qui est tangent en D', D'' à sa conique déférente ; dans le second plan il y a un autre cercle directeur dont la conique déférente a avec lui un contact quadriponctuel en D_1. Donc cette cyclide peut être considérée ou comme l'enveloppe des sphères ayant les centres sur une conique quelconque et passant par un foyer de cette conique, ou bien comme l'enveloppe des sphères ayant les centres sur une conique quelconque et orthogonales au faisceau des sphères passant par le cercle osculateur à cette conique dans l'un de ses sommets. Cette cyclide n'a pas de foyers, ni de courbes focales : elle est l'inverse ou d'un cône quadrique ayant un contact quadriponctuel avec l'absolu, ou d'un cylindre de révolution.

123. $[(\overline{1\,1})(2\,1)]$ *Surface de la* 4e *classe à droite bidouble et un point biplanaire de* 2e *espèce.* Sur la droite bidouble d il y a deux points triples D', D'' joints au point biplanaire D_1 par deux droites de la surface, le long desquelles celle-ci est touchée par les deux plans nodaux de D_1. Ces deux plans se coupent dans l'axe d_1 d'un faisceau de plans contenant une série de coniques de la surface tangentes en D_1 à d_1. Cette série de coniques et celle située dans les plans qui passent par d sont les deux seules séries de coniques de la surface. Deux des plans passant par d_1 touchent la surface le long de coniques ; etc. Il y a ∞^1 inversions coniques fondamentales. On peut construire cette surface comme l'inverse biplanaire d'un cône quadrique ayant le sommet dans le plan d'inversion.

124. $[(\overline{2\,1})(1\,1)]$ *Surface de la* 4e *classe à droite bidouble et un couple de points coniques.* Dans la droite bidouble d_1 les deux points triples coïncident en un point D_1 triplanaire, dont le cône tangent se décompose dans le plan tangent à la surface le long de la droite bidouble d_1 et deux autres plans passant aussi par d_1 et tangents à la surface le long des deux droites qui joignent D_1 aux deux points coniques D', D''. Celles-ci sont les seules droites simples de la surface. Les plans passant par ces deux points coniques coupent la surface en des couples de coniques d'une série, et deux parmi eux la touchent le long de deux coniques. Etc. Cette surface (douée de ∞^1 inversions coniques fondamentales) s'obtient par une inversion dont la quadrique directrice est un couple de plans, faite sur un cône quadrique tangent à la droite d'intersection de ces plans.

125. *Surface de la* 4e *classe à droite cuspidale de* 2e *espèce et un point conique.* On a cette surface, cas particulier de la précédente,

en projetant Γ par un point du plan tangent le long de M_1M' (ou de M_1M''). En nommant toujours D_1, D', D'' les projections de M_1, M', M'', on voit de la même manière que pour la surface générale à droite cuspidale de 2e espèce (n⁰ 102) que cette droite d_1 a deux points singuliers, dont l'un D' est un point double de la surface dans lequel les sections planes qui y passent ont un point d'osculation de deux branches, et l'autre D_1 est un point triple dont le cône tangent se décompose dans le plan ϱ (tangent à la surface le long de d_1) compté deux fois et un autre plan passant par d_1 et tangent à la surface le long de la droite qui joint ce point triple D_1 au point conique D'' (la seule droite simple de la surface). Les plans passant par la droite $D'D''$ coupent la surface en une série de coniques et l'un d'eux la touche le long d'une conique (non décomposée).

$\{(2\ 2)\ 1\}$.

126. Nous avons déjà dit (n⁰ 58) que cette espèce et l'espèce $\{(3\ 2)\}$ de surfaces Γ sont caractérisées par le fait que dans le faisceau des F_3^2 il y a un cône de 2e espèce f, dont l'arête a se trouve en une autre de ces F_3^2 et a en conséquence tous ses points pour points doubles de Γ. Nous avons vu aussi qu'alors Γ est une surface réglée dont les génératrices s'appuient sur a. Remarquons à présent que dans le cas $\{(2\ 2)\ 1\}$ il y a aussi dans le faisceau un cône de 1e espèce ψ, tandis que dans le cas $\{(3\ 2)\}$ ce cône est allé coïncider avec f. L'espace tangent en un point quelconque M de a au faisceau des F_3^2 les coupe en un faisceau de cônes quadriques ordinaires ayant le sommet en M et passant par a : l'intersection avec f se décompose en un couple de plans passant par a. Donc dans le cas $\{(2\ 2)\ 1\}$ outre la droite a ces cônes ordinaires ont deux droites communes passant par M : le plan qui les joint et le plan tangent commun le long de a forment l'intersection de cet espace avec le cône de 1e espèce ψ. Mais dans le cas $\{(3\ 2)\}$, comme ψ vient coïncider avec f et ce couple de plans avec le premier couple, l'une de ces deux droites communes coïncide encore avec a. Donc *la surface* $\{(2\ 2)\ 1\}$ *est telle que par chaque point de sa droite double* a *passent deux génératrices distinctes appartenant aux deux plans tangents à la surface en ce point, plans qui passent aussi par* a *; et les plans qui contiennent les couples de génératrices passant par les différents points de* a *sont les plans générateurs du cône* ψ *de système contraire au plan générateur qui contient* a. *Pour la surface* $\{(3\ 2)\}$ *il ne passe par chaque point de* a *qu'une seule génératrice variable outre la génératrice*

fixe a *et il y a dans chacun de ces points un plan tangent variable passant par la génératrice variable et un plan tangent fixe qui touche la surface tout le long de* a.

Dans notre cas {(2 2) 1} la surface contient une seule série de coniques proprement dites. En effet la conique appartenant à un plan générateur de f se décompose dans la droite a et une génératrice; la conique appartenant à un plan générateur de ψ de système différent de celui du plan générateur qui passe par a se décompose dans les deux génératrices de la surface qui passent par le point d'intersection de ce plan avec a. Donc les seules coniques de Γ qui ne se décomposent pas sont celles appartenant aux plans générateurs de ψ de même système que celui passant par a (pour lequel la conique de Γ se réduit à la droite a comptée deux fois): ces coniques ne rencontrent pas a, et chaque espace passant par l'une d'elles (c'est-à-dire chaque espace tangent à ψ) coupe encore Γ en deux génératrices passant par le point d'intersection de cet espace avec a.

On peut se demander s'il y a un point de a pour lequel les deux génératrices de Γ qui y passent coïncident. Le raisonnement, que nous avons fait pour trouver ces couples de génératrices correspondants aux différents points de a, prouve qu'en un tel point l'espace tangent aux F_3^2 du faisceau doit aussi être tangent (le long d'un plan) à f. Or les espaces tangents au faisceau dans les points de a forment un faisceau autour du plan générateur de ψ qui contient a, et il y a en général dans un faisceau d'espaces passant par l'arête d'un cône quadrique de 2[e] espèce deux espaces qui sont tangents à celui-ci. Donc il y a sur la droite double a de Γ deux points, pour chacun desquels les deux génératrices qui y passent coïncident, c'est-à-dire deux points de rebroussement. La surface Γ est touchée le long des deux génératrices qui passent par ces deux points par deux plans générateurs de ψ.

127. [(2 2) 1] *Surface réglée à conique et droite doubles.* Par chaque point de la droite double d ou de la conique double (qui rencontre d) passent deux génératrices, qui coïncident seulement pour deux points de d (comme nous avons vu) et pour deux points de la conique (comme on voit en remarquant que parmi les espaces qui passent par le centre de projection et par a, espaces qui coupent encore Γ suivant des couples de droites dont les projections sont les couples de génératrices de notre surface qui passent par les différents points de la conique double, il y en a deux tangents à f).

Les plans qui joignent les couples de génératrices passant par les différents points de d coupent encore la surface suivant des coniques et ils enveloppent un cône quadrique (de KUMMER) bitangent à la surface: on obtient ainsi toutes les coniques de la surface. Pour un de ces plans la conique d'intersection se réduit à la droite d comptée deux fois. On voit que cette surface est, parmi les surfaces réglées du 4e degré, celle de la 2e espèce dans la classification de M. CREMONA (79) et on en obtient ainsi les principales propriétés. Ajoutons que la surface a une seule inversion fondamentale dont le centre est le sommet du cône quadrique bitangent et la quadrique directrice passe par la conique et la droite double et a ce point pour pôle du plan de la conique double relativement à elle.

On peut considérer cette surface comme une cyclide et alors la sphère directrice de l'inversion fondamentale sera raccordée à sa quadrique déférente le long de la génératrice commune d. — Elle est l'inverse d'un cône dont le sommet soit sur l'absolu de l'inversion.

128. $[\bar{1}\,(2\,2)]$ *Surface réglée à trois droites doubles.* On l'obtient en supposant que le centre de projection de Γ soit sur ψ, et on voit ainsi que deux de ces droites doubles sont coupées par la troisième, laquelle fait partie du système des génératrices (et compte pour deux génératrices, étant effectivement la projection de deux génératrices de Γ): ces deux droites doubles sont au contraire des *directrices*, c'est-à-dire sont coupées par toutes les génératrices (car l'une d'elles est la projection de a et l'autre est la projection d'une conique de Γ). Par chaque point de l'une quelconque de ces directrices passent deux génératrices, qui coïncident seulement pour deux certains points de cette directrice. La série des coniques de la surface se trouve maintenant dans les plans qui passent par la génératrice double. Cette surface est celle de la 5e *espèce* dans la classification nommée. Elle a deux inversions fondamentales (80) dont les quadriques directrices passent par les trois droites doubles et les centres sont respectivement les deux points d'intersection de la génératrice double

(79) *Sulle superficie gobbe di quarto grado.* Mem. Acc. Bologna, (2) 8, 1868, pp. 235-250.

(80) A première vue l'on en obtient seulement une: mais cela dépend de ce que la même surface peut être considérée de deux façons différentes comme la projection de Γ suivant que l'on considère l'une ou l'autre des deux directrices doubles comme la projection de la droite double a de Γ.

avec les deux droites directrices. On peut l'obtenir en transformant par inversion conique un cône quadrique dont le sommet soit sur l'absolu de l'inversion.

Si le centre de projection de Γ n'est pas en un point quelconque de ψ, mais bien en un point de l'un des deux plans générateurs de ψ que nous avons vu (à la fin du n^0 126) être tangents à Γ le long d'une droite, alors on aura comme cas particulier la *surface réglée à deux droites doubles directrices et une génératrice cuspidale,* c'est-à-dire une géneratrice telle que chaque section plane de la surface a en elle un point stationnaire. Cette génératrice sera précisément la projection de la droite de Γ dont le plan tangent passe par le centre de projection.

129. *Surface réglée à deux droites doubles directrices infiniment voisines et une génératrice double.* On a cette surface en projetant Γ par un point du plan générateur de ψ qui passe par a. Alors dans la projection d de a coïncident évidemment les deux droites directrices de la surface du n^0 précédent; l'on a donc une surface de la 6^e *espèce.* Comme les plans générateurs de ψ de système contraire à celui du plan générateur passant par a (plans qui contiennent les couples de génératrices de Γ passant par les points de a) sont maintenant projetés suivant les plans qui passent par d, on voit directement que par chaque point de d passent deux génératrices de notre surface, qui appartiennent à un plan passant aussi par d; deux de ces plans passant par d touchent la surface le long de deux génératrices, etc.

130. $[(\overline{2\,2})\,1]$ *Surface réglée à droite triple et douée d'un cône quadrique bitangent.* On l'obtient en prenant le centre de projection de Γ sur f: alors on voit bien que chaque point de la projection d de a sera un point triple pour la surface projection de Γ, c'est-à-dire que d en sera une droite triple. Par chacun de ses points il passe deux génératrices variables de la surface (qui coïncident pour deux de ces points) et une fixe qui est la droite d même (comme projection de la génératrice de Γ qui se trouve dans le plan générateur de f passant par le centre de projection). Le plan qui joint ces deux génératrices variables coupe encore la surface en une conique et il enveloppe le cône quadrique bitangent que nous avons nommé, et qui est tangent à d. Dans chaque point de d il y a deux plans tangents variables passant par d et un plan tangent fixe ϱ, qui ne coupe la surface que dans la droite d comptée 4 fois. Il y a

une inversion fondamentale dont le centre est le sommet du cône bitangent et la quadrique directrice un couple de plans passant par d. Cette surface réglée du 4e degré est de la 3e *espèce.*

{(3 2)}.

131. Nous avons déjà vu (n⁰ 126) que cette surface réglée Γ a une droite double a, qui est en même temps une génératrice douée d'un plan tangent fixe qui est un plan générateur de f, de sorte que par chacun de ses points il ne passe qu'une génératrice variable de Γ, laquelle appartient au plan variable tangent en ce point à Γ. Ajoutons maintenant que comme dans le faisceau des F_3^2 qui passent par Γ il n'y a pas de cônes autres que f, cette surface Γ ne contient aucune conique.

132. [(3 2)] *Surface réglée à conique et droite doubles (n'ayant pas de cône quadrique bitangent).* Par chaque point de cette droite double il passe, outre celle ci, qui est une génératrice fixe le long de laquelle la surface a un plan tangent fixe, une seule génératrice variable appartenant au plan tangent variable de ce point ; tandis que par les points de la conique double passent des couples de génératrices situées dans les plans qui passent par la droite double. Il n'y a pas de coniques sur cette surface, et l'on reconnait bien qu'elle est de la 4e *espèce.* Elle n'a pas d'inversions fondamentales et est l'inverse d'un cône quadrique dont une génératrice touche dans le sommet l'absolu.

133. [$(3\overline{2})$] *Surface réglée à droite triple (comme lieu et comme enveloppe).* Le centre P de projection de Γ étant sur f soient ϱ l'intersection de l'espace tangent en P à f avec R_3, et ϱ' la projection du plan tangent à Γ le long de a. Alors on voit que la surface réglée projection de Γ aura la droite triple d telle que la surface passe deux fois par elle comme génératrice et a le long d'elle les deux plans tangents fixes ϱ, ϱ', de sorte qu'en chacun de ses points il y a ces deux plans tangents fixes et un plan tangent variable qui coupe la surface, outre qu'en d, dans la génératrice variable qui passe par ce point. On voit donc que non seulement la courbe double, mais aussi la développable bitangente de la surface réglée se réduit à la droite d (comme enveloppe de plans) comptée 3 fois. C'est donc la surface réglée de la 10e *espèce.*

On obtient un cas particulier remarquable de cette surface en supposant que le centre P appartienne au plan générateur de f qui touche Γ le long de a. Alors les deux plans ϱ, ϱ' tangents à la surface le long de d coïncident en un seul et (comme on voit aussi en remarquant que l'intersection de Γ avec un espace passant par P a sur a un point double dont une tangente passe par P, et en projetant) la droite triple d sera telle que chaque section plane de la surface aura sur d un point stationnaire avec la tangente sur le plan fixe ϱ et par lequel passe une autre branche de cette section plane ayant la tangente dans le plan tangent variable à la surface en ce point [81].

Faisceaux de cônes quadriques et projections de leurs surfaces d'intersection.

134. Nous avons ainsi considéré tous les cas que peuvent présenter une $F_2^{2.2}$ Γ du R_4 et ses projections sur R_3, lorsque parmi les ∞^1 F_3^2 qui la contiennent il y en a qui ne sont pas des cônes, de sorte que le déterminant d'une indéterminée de ces variétés ne s'annulle pas identiquement. Il nous reste donc seulement à étudier les cas où Γ appartient à ∞^1 cônes. Alors si nous supposons, comme nous avons toujours fait jusqu'ici, que Γ ne se décompose pas en deux quadriques, il y aura seulement les cas suivants à considérer [82].

1^0 Le faisceau déterminé par Γ se compose de cônes ayant le même sommet. Mais alors on voit bien que Γ est un cône à deux dimensions ayant ce même sommet et que l'on peut obtenir en projetant par un point quelconque de R_4 une courbe quartique gauche (de 1^e espèce). La projection de ce cône sur R_3 sera donc un cône quartique ordinaire à deux génératrices doubles (ou cuspidales) distinctes ou coïncidentes, que l'on peut obtenir en projetant par un point de R_3 une quartique gauche de 1^e espèce de cet espace, ou, ce qui est la même chose, une quartique plane à deux (ou trois) points doubles ou stationnaires, distincts ou coïncidents. Il y a plusieurs espèces de tels cônes comme de telles quartiques planes ; mais comme celles-ci ont déjà été étudiées et classifiées presque complè-

---

(81) Ce cas particulier de la 10^e espèce de CREMONA se rencontre déjà dans l'Anal. Geometrie d. Raumes de SALMON-FIEDLER.

(82) Voir nos *Ricerche sui fasci di coni quadrici in uno spazio lineare qualunque*, n^0 27, Atti Acc. Torino, XIX [questo volume, p. 485].

tement (surtout si l'on y ajoute la note au n⁰ 3 de ce travail) par d'autres écrivains, nous pouvons omettre de nous en occuper.

135. 2⁰ Le faisceau déterminé par Γ se compose de cônes de 1e espèce dont les sommets ont pour lieu une conique : ces cônes contiennent alors le plan de cette conique et Γ se décompose en conséquence en ce plan et une surface du 3e ordre passant par cette conique. On voit très facilement que cette surface est réglée et qu'elle a une droite directrice coupée par toutes les génératrices. Ses projections sur R_3 sont donc des surfaces cubiques réglées douées d'une droite directrice simple et d'une droite directrice double (projection d'une conique située dans un plan passant par le centre de projection). Pour une position convenable du centre de projection on peut obtenir que ces deux directrices coïncident. On a ainsi les deux espèces de surfaces cubiques réglées de R_3 ; mais comme M. VERONESE [83] a déjà appliqué pour l'étude de celles-ci la projection d'une surface cubique (réglée) du R_4, nous ne croyons pas devoir insister là-dessus.

136. 3⁰ Le faisceau déterminé par Γ se compose de cônes de 1e espèce dont les sommets ont pour lieu une droite m, c'est-à-dire de cônes touchés le long d'une génératrice commune m par un même espace μ. Dans ce cas il y a dans le faisceau deux cônes de 2e espèce : en effet cet espace μ tangent au faisceau le long de m coupe les cônes suivant des couples de plans générateurs des deux systèmes qui passent par m et forment une involution de plans du faisceau ayant m pour axe dans cet espace μ. Cette involution aura en général deux plans doubles, le long desquels μ touchera les deux cônes de 2e espèce du faisceau. Mais si ces deux plans doubles (et par suite ces deux cônes) coïncident, tous ces couples de plans auront un plan commun, c'est-à-dire nous aurons un faisceau de cônes ayant un plan générateur commun : nous retomberons donc dans le cas précédent. Nous pouvons donc supposer que les deux cônes de 2e espèce f, f_1 du faisceau et leurs plans de contact avec μ soient distincts.

Soient a et a_1 les arêtes de f, f_1 : elles appartiendront à ces deux plans de contact de μ avec ces cônes et elle couperont m

---

(83) *Behandlung der projectivischen Verhältnisse* u. s. w., nos 57-60.

(c'est-à-dire Γ) en deux points différents, par chacun desquels devra passer chaque droite contenue dans Γ (n^0 58); d'où il suit que la surface Γ ne contient d'autre droite que la droite double m. Chaque espace coupe Γ en une quartique ayant sur m un point double dont les deux tangentes appartiennent aux deux plans générateurs situés sur μ du cône du faisceau qui a le sommet en ce point: ce point double devient pour la quartique un point de rebroussement lorsqu'il est l'intersection de m avec a ou avec a_1. Chacun des ∞^2 espaces qui passent par m coupe encore Γ en une conique appuyée sur m, car il coupe le faisceau en un faisceau de cônes quadriques ordinaires se touchant le long de m et se coupant encore en conséquence en une conique appuyée sur m. La surface Γ contient donc ∞^2 coniques. Par chaque point de m il en passe une infinité et les plans qui les contiennent sont les plans générateurs du cône du faisceau qui a ce point de m pour sommet: aux deux systèmes de plans générateurs de ce cône correspondent donc deux différentes séries de ∞^1 coniques de la surface passant par ce point, et en variant ce point sur m et en conséquence ce cône dans le faisceau on obtient ∞^1 couples de séries de coniques, qui forment tout le système des ∞^2 coniques de Γ. Les relations entre les deux systèmes de plans générateurs d'un cône de 1^e espèce nous montrent que parmi les coniques qui passent par un point quelconque M de m deux coniques ne se coupent pas ailleurs si elles appartiennent à la même série et se coupent en un autre point si elles sont de séries différentes; mais deux coniques coupant m en deux points différents se rencontrent toujours en un point (le point d'intersection de leurs plans). La surface Γ a deux plans tangents en un point quelconque M de m: les deux plans générateurs suivant lesquels μ est coupé par le cône du faisceau ayant M pour sommet. Les coniques dans lesquelles ils coupent Γ se réduisent à la droite m comptée deux fois, et on voit que les deux séries de coniques de Γ qui passent par M se distinguent en ce que les tangentes en M aux coniques d'une série appartiennent à l'un de ces deux plans tangents à Γ, tandis que les tangentes aux coniques de l'autre série appartiennent à l'autre plan tangent. Tous ces couples de plans tangents à Γ dans les points de m forment, comme nous avons déjà remarqué, une involution dont les plans doubles sont les plans ma, ma_1 dans lesquels les cônes de 2^e espèce f, f_1 sont touchés par μ. Donc dans chacun des deux points ma, ma_1 les deux plans tangents à Γ coïncident respectivement dans ces plans doubles, et les coniques de Γ passant par l'un ou l'autre de ces deux points forment seulement plus une série correspondant au système des plans générateurs d'un cône de 2e espèce.

Les espaces tangents aux variétés du faisceau en un point quelconque de Γ se coupent dans le plan tangent en ce point à Γ et chacun d'eux coupe Γ en deux coniques appartenant aux deux différentes séries qui correspondent au cône ayant cet espace tangent. D'ailleurs le plan tangent à Γ coupe les cônes du faisceau suivant des couples de droites d'une involution dont les droites doubles sont celles de contact de ce plan avec f, f_1. Donc les tangentes en un point quelconque de Γ aux couples de coniques qui appartiennent aux ∞^1 couples de séries forment une involution, dans laquelle les droites doubles sont les tangentes aux coniques des deux séries doubles, c'est-à-dire les deux tangentes à Γ qui coupent a et a_1.

137. Projetons maintenant Γ sur R_3 et soit φ le cône du faisceau qui passe par le centre de projection P et que nous supposerons avant tout différent de f, f_1. Les deux plans générateurs de φ qui passent par P coupent Γ en deux coniques passant par le point de m qui est le sommet de φ: la projection de m et les projections de ces deux coniques seront donc trois droites doubles d, d_1, d_2 se croisant en un point triple pour la surface S projection de Γ. Donc celle-ci est une *surface de* STEINER *du* 4e *ordre et de la* 3e *classe* [84]. Et des propriétés vues de Γ nous conclurons des propriétés de cette surface. Ainsi elle contient ∞^2 coniques, chaque plan tangent la coupant suivant deux de ces coniques : toutes ces coniques rencontrent les 3 droites doubles. Par rapport à l'une (quelconque) d des trois droites doubles on peut diviser ce système doublement infini de coniques en ∞^1 couples de séries simplement infinies : les coniques d'un couple de séries passent par un même point de cette droite double, mais celles d'une série y passent dans l'une et celles de l'autre série dans l'autre des deux nappes de la surface qui passent par cette droite double. Les plans des coniques de ces deux séries

---

[84] Quant au fait que la classe de cette surface est 3 nous pouvons le prouver en remarquant qu'elle sera la même que pour la projection de Γ faite par un point de Γ, projection qui est une surface cubique réglée, car les coniques de Γ qui passent par ce point sont projetées sur R_3 suivant des droites. On voit ainsi un lien étroit entre la surface de STEINER et la surface cubique réglée, d'où l'on a une explication de la ressemblance entre leurs représentations planes que M. CREMONA a mise en vue (dans le travail que nous citerons bientôt).

(dont chacun contient une conique de l'une série et une de l'autre série) enveloppent un cône quadrique (de KUMMER): en faisant mouvoir le point de la droite double par lequel passent ces deux séries de coniques ce cône quadrique varie aussi et les plans tangents à ces ∞^1 cônes sont les plans tangents de la surface de STEINER. Les couples de plans tangents à la surface dans les points de d forment une involution dont les plans doubles sont tangents en deux points-pinces de d. Pour chacun de ces deux points (projections des points ma, ma_1) les deux séries de coniques qui y passent se confondent en une seule et les plans qui contiennent ces coniques passent par une même droite c ou c_1 (la projection de a ou de a_1). Mais comme par le point P passent deux espaces tangents à f ou à f_1, on voit que parmi les plans qui passent par c ou par c_1 il y en a deux qui touchent S le long d'une conique. La surface S est donc touchée le long de coniques par 4 plans et on voit que les couples d'arêtes opposées du tétraèdre qu'ils déterminent sont coupés respectivement par les trois droites doubles dans les couples de points-pinces de celles-ci. Par un point quelconque de la surface passent ∞^1 coniques et on peut les grouper en couples de façon que deux coniques du même couple se coupent aussi sur la droite double d: alors les tangentes en ce point à ces couples de coniques forment dans le plan tangent à S un faisceau en involution, dans lequel les droites doubles sont les deux droites du faisceau qui s'appuient sur les deux arêtes opposées c, c_1 du tétraèdre, et un couple de droites conjuguées est celui des tangentes principales de la surface en ce point, c'est-à-dire des tangentes en ce point aux deux coniques d'intersection de la surface avec le plan tangent. — Ainsi l'on pourrait encore obtenir facilement d'autres propriétés de la surface de STEINER, surtout celles qui ne sont pas symétriques par rapport aux trois droites doubles: par exemple les sections de Γ faites par des espaces quelconques nous donnent immédiatement par la projection ∞^4 courbes quartiques sur S, dont chacune a un point double sur l'une d des droites doubles et coupe en deux points chacune des deux autres, etc. etc. Mais passons plutôt aux cas particuliers de la surface S. Remarquons seulement qu'elle a 6 systèmes de ∞^1 inversions fondamentales coniques dont les centres sont sur une arête du tétraèdre considéré et les cônes directeurs passent par les trois droites doubles; cette surface de STEINER peut se construire en transformant par une inversion conique une quadrique tangente dans le sommet du cône directeur au plan d'inversion.

138. Supposons maintenant que la variété φ du faisceau qui passe par le centre de projection P soit l'un des deux cônes de 2^e espèce, par exemple f_1. Alors la projection S' de Γ aura dans la projection de la conique de Γ située dans le plan générateur de f_1 qui passe par P une droite bidouble d_1 (n^0 59) le long de laquelle deux nappes différentes de la surface touchent un même plan ϱ; les deux points triples, qu'a en général une droite bidouble d'une surface du 4^e ordre, coïncideront dans le point d'intersection de d_1 avec une autre droite double d (projection de m) de S'. Cette surface sera ce cas particulier de la surface de STEINER que l'on obtient en supposant que deux droites doubles de celle ci s'approchent entre elles jusqu'à coïncider. Elle contient encore ∞^2 coniques, que l'on peut grouper par rapport à la droite double d en ∞^1 couples de séries jouissant toujours des mêmes propriétés. Mais outre ϱ qui touche S' le long de la droite d_1 (comptée 4 fois) il n'y a plus que deux plans qui touchent S' le long de coniques : leur droite d'intersection coupe d dans son point-pince. En effet les deux espaces tangents à f_1 menés par P coïncident dans l'espace tangent en P à f_1 (espace qui coupe R_3 en ϱ), tandis que les deux espaces tangents à f menés par P sont distincts et coupent R_3 suivant les deux plans doubles nommés.

On peut obtenir cette même surface en prenant P encore comme au n^0 précédent sur une variété quelconque du faisceau, mais en outre sur l'espace μ tangent à tout le faisceau le long de m. Alors la projection de la conique de Γ située dans l'un des deux plans générateurs de cette variété qui passent par P (dans celui qui appartient à μ) coïncide avec la projection de m et donne lieu à la droite bidouble de la surface projection, tandis que la projection de la conique située dans l'autre plan générateur donne lieu à la droite double.

139. Si enfin P se trouve soit sur f_1, soit sur μ, c'est-à-dire sur le plan générateur de f_1 qui passe par m, alors on voit que les trois droites doubles de la surface S'' projection de Γ coïncideront en une seule droite *tridouble (d'osculation de deux nappes)* d. Comme chaque espace passant par P coupe Γ en une quartique gauche ayant un point double sur m et telle qu'un autre sommet de cône quadrique passant par elle est en ligne droite avec ce point double et avec P, on conclut que chaque section plane de notre surface S'' a en d un point d'osculation de deux branches, dont la tangente appartient à un plan fixe ϱ (intersection de μ avec R_3). Des deux

espaces tangents à f menés par P l'un est à présent μ. Donc la surface S'' n'a, outre le plan ϱ, qu'un seul plan singulier qui la touche suivant une conique ([85]).

140. Cherchons encore d'obtenir la représentation plane de la surface de STEINER S et de ses deux cas particuliers S', S'' par notre méthode. Comme sur Γ il n'y a d'autres droites que m, cette méthode consistera à projeter Γ par m sur un plan R_2; projection qui est univoque car chaque plan passant par m coupe encore Γ en un point. Un espace mené par m coupe Γ suivant une conique et R_3 suivant une droite. Donc *les droites du plan* R_2 *sont les images des coniques de chacune de nos surfaces.* Parmi les espaces passant par m il y a μ, qui contient les couples de plans tangents à Γ dans les points de m. Donc *chacune des droites doubles de nos surfaces a pour image dans* R_2 *une droite dans laquelle chaque couple de points d'une involution est l'image d'un point de la droite double comme appartenant à deux nappes différentes de la surface.* Nous ne nous sommes pas bornés dans cet énoncé à la droite double d qui correspond à m, car chacune des deux autres droites doubles d_1, d_2 avec tous ses points correspond à une conique de Γ avec ses points par couples d'une involution dont P est le pôle; de sorte qu'en projetant par m sur R_2 l'on obtient aussi comme image de d_1 ou de d_2 une droite avec des couples de points d'une involution. Cependant pour S' comme au lieu des deux droites doubles d_1, d_2 l'on a une droite bidouble dans laquelle celles-ci coïncident, de même dans sa représentation sur R_2 deux des trois droites considérées coïncident; et pour S'' la droite tridouble aura pour image une droite dans laquelle coïncideront ces trois droites.

Chaque section de Γ faite par un espace quelconque est une quartique ayant un point double sur m et appartenant à un cône quadrique ordinaire ayant le sommet en ce point. En la projetant donc sur R_2 par m on obtient une conique coupant l'image de d en deux points conjugués de son involution. Une telle conique est donc l'image d'une quartique de S, ou S', ou S'', ayant un point dou-

---

([85]) Les surfaces des n^{os} 137, 138, 139 sont les réciproques des surfaces cubiques des espèces XVI, XVIII, XIX de SCHLÄFLI. — M. CREMONA dans la Note *Rappresentazione della superficie di* STEINER *e delle superficie gobbe di terzo ordine su un piano* (Rend. Ist. Lombardo, IV, 1867) s'est aussi occupé des deux cas particuliers de la surface de STEINER que nous avons considérés (mais il dit que le premier de ces cas particuliers lui avait été fait remarquer par CLEBSCH).

ble sur *d*. En particulier les images des sections planes de chacune de nos surfaces formeront donc une série linéaire triplement infinie de coniques (considérées comme courbes du second ordre) coupant les images des droites doubles en des couples de points des involutions qui y sont déterminées. On a ainsi les propriétés fondamentales de la représentation plane connue de la surface de STEINER et de ses cas particuliers.

Invariants absolus des cyclides. Réalité de ces surfaces.

141. Considérons dans R_4 une variété quadratique φ, qui ne soit pas un cône et qui soit coupée par une autre F_3^2 et en conséquence par le faisceau qu'elle détermine avec celle-ci suivant une $F_2^{2\cdot 2}$ que nous appellerons Γ. Alors si d'un point quelconque de R_4 on prend les espaces polaires par rapport aux variétés du faisceau, ils formeront un faisceau d'espaces (se coupant dans le *plan polaire* du point par rapport à Γ), et si l'on fait varier ce point dans R_4 tous les faisceaux d'espaces que l'on obtient ainsi seront projectifs entre eux et avec le faisceau considéré de F_3^2. Pour chaque cône de 1e ou de 2e espèce du faisceau des F_3^2 il y a dans chacun de ces faisceaux d'espaces polaires un espace qui passe par son sommet ou par son arête. Le groupe de tous ces espaces qui correspondent au groupe de cônes (de 1e ou de 2e espèce) de notre faisceau est donc projectif à ce groupe, c'est-à-dire il a les mêmes invariants absolus que celui-ci : or ces invariants absolus (rapports anharmoniques des quaternes d'éléments du groupe) jouissent de l'importante propriété de former justement un système complet d'invariants absolus de Γ) (86). Et si au groupe des cônes du faisceau on adjoint la variété φ, c'est-à-dire si au groupe des espaces polaires relativement à ces cônes on adjoint l'espace polaire par rapport à φ, on obtient les invariants absolus du système formé par Γ et φ, c'est-à-dire des quantités telles que si elles sont égales pour deux $F_2^{2\cdot 2}$ de même caractéristique situées sur φ, on peut trouver une telle transformation projective de φ en soi-même que l'une de ces $F_2^{2\cdot 2}$ se transforme dans l'autre.

---

(86) Cette proposition est une conséquence d'un théorème de M. WEIERSTRASS sur le système de deux formes quadratiques. Voir le § 3 de la 2e Partie de notre *Studio sulle quadriche* etc. cité à p. 349 [nota (25)].

Si au lieu d'une seule $F_2^{2\cdot 2}$ on considère sur φ les ∞^1 $F_2^{2\cdot 2}$ dans lesquelles φ est coupée par une série de variétés inscrites avec φ dans une même variété développable de la 4^e classe, on démontre facilement que pour toutes ces $F_2^{2.2}$ les groupes des cônes de 1^e ou de 2^e espèce qui y passent (et qui ont respectivement les mêmes sommets ou les mêmes arêtes) ont tous les mêmes rapports anharmoniques.

On peut réduire les propositions regardant les invariants absolus de Γ à ne faire que des constructions sur φ, en prenant sur φ le point dont on cherche les espaces polaires et en substituant à ces espaces leurs quadriques d'intersection avec φ et au plan polaire du point par rapport à Γ sa conique d'intersection avec φ (conique commune à toutes ces quadriques). On construit facilement cette conique comme le lieu des points conjugués harmoniques du point considéré de φ par rapport aux couples de points dans lesquels Γ est coupée par les droites de φ qui passent par ce point.

Maintenant projetons par un point de φ sur R_3 et nous aurons pour les cyclides les propriétés suivantes.

142. Par rapport à une cyclide quelconque chaque point A de l'espace a pour lieu de ses points conjugués harmoniques relativement aux couples de points, dans lesquels les droites passant par A et appuyées sur l'absolu coupent encore la cyclide, un cercle que nous nommerons le *cercle polaire* du point A. Aux ∞^3 points de l'espace correspondent ainsi ∞^3 cercles polaires par rapport à la cyclide donnée; et en considérant toutes les ∞^1 cyclides d'une série homofocale on aura ∞^4 cercles polaires. Or dans le faisceau des sphères passant par un tel cercle il y a pour chaque sphère directrice isolée de ces cyclides une sphère qui lui est orthogonale, tandis que pour chaque faisceau de sphères directrices il y a dans notre faisceau une sphère qui est orthogonale à toutes celles-ci, c'est-à-dire qui passe par le couple de points (-sphères) correspondant. Si l'on détermine ainsi un groupe de sphères dans chaque faisceau ayant pour base l'un des ∞^4 cercles polaires, tous ces groupes seront projectifs entre eux et auront pour invariants absolus les invariants absolus de la série homofocale considérée de cyclides dans la géométrie des inversions, c'est-à-dire des quantités dont l'égalité pour deux séries homofocales de cyclides ayant la même caractéristique est la condition nécessaire et suffisante pour que l'on puisse transformer par des inversions l'une série dans l'autre. — Et si, au lieu de considérer tous les ∞^4 cercles polaires, on considère seulement

une cyclide déterminée et les ∞^3 cercles polaires des points de l'espace par rapport à elle, alors il ne variera pas en passant de l'un à l'autre cercle polaire non seulement les invariants absolus du groupe considéré de sphères passant par un tel cercle, mais ceux du même groupe auquel on adjoigne la sphère nulle ayant pour centre le point dont ce cercle est polaire : et ces invariants seront les invariants absolus de la cyclide dans la géométrie des inversions.

En particulier si le point dont on prend le cercle polaire par rapport à la cyclide se trouve sur celle-ci, ce cercle se réduit à un cercle nul ayant ce point pour centre et situé dans le plan tangent en ce point à la cyclide ; le faisceau de sphères se réduit au faisceau des sphères tangentes en ce point à la cyclide et nous retrouvons alors, mais complétée, une proposition due (pour la cyclide générale) à M. DARBOUX, et que nous avions déjà démontrée au n° 11.

Ces théorèmes nous donnent, par le simple examen de la caractéristique d'une cyclide le nombre de ses invariants absolus. Ainsi la cyclide générale [1 1 1 1 1] en aura 3 (et sa série homofocale 2), les cyclides [2 1 1 1] et [(1 1) 1 1 1] en auront 2 (et leurs séries homofocales 1) tandis que toutes les autres espèces de séries homofocales de cyclides n'ont plus d'invariants absolus, les cyclides [3 1 1], [2 2 1], [(1 1) 2 1], [(2 1) 11] et [(1 1) (1 1) 1] en auront 1 seul, et enfin toutes les autres espèces de cyclides n'en auront aucun.

143. Si la conique double des surfaces, que nous avons étudiées dans ce travail, est réelle, on voit facilement que toutes les différentes espèces de ces surfaces peuvent être réelles. Mais si nous considérons les cyclides, dans le sens ordinaire de ce mot, c'est-à-dire des surfaces dont la conique double n'a pas de points réels (tout en appartenant à un plan réel et à des quadriques réelles), alors plusieurs de ces espèces de surfaces seront de leur nature imaginaires. En effet toutes les droites d'une telle surface doivent en ce cas être imaginaires (puisqu'elles coupent la conique double), et afin que la surface puisse être réelle elles devraient être deux-à-deux imaginaires conjuguées. Or en revoyant nos résultats sur le nombre et la disposition des droites de ces différentes surfaces, on voit que parmi les 18 espèces de cyclides les 8 suivantes

[2 2 1], [3 2], [4 1], [5], [(2 1) 2], [(4 1)], [(2 2) 1], [(3 2)]

ne peuvent pas satisfaire à cette condition, de sorte qu'elles n'embrassent que des surfaces imaginaires. — Or la raison intime de ce fait nous est donnée par un théorème de M. KLEIN (87). Remarquons en effet que si la conique double d'une de nos surfaces est imaginaire, cette surface sera une projection d'une $F_2^{2.2}$ par laquelle passe une variété quadratique (celle φ qui contient le centre de projection) ne contenant que des droites imaginaires. Or les variétés quadratiques générales à 3 dimensions de l'espace à 4 dimensions ont leurs ∞^3 droites réelles (variétés *hyperboliques*) ou imaginaires (variétés *elliptiques*) suivant que dans leurs équations canoniques (à variables réelles) la différence entre le nombre des carrés d'un signe et le nombre des carrés de l'autre signe est 1 ou 3 (88). Donc afin qu'une $F_2^{2.2}$ réelle Γ puisse donner comme projection une cyclide il faut que pour une des variétés quadratiques passant par elle cette différence soit 3. Mais alors ce théorème de M. KLEIN nous dit que le déterminant du faisceau de ces variétés quadratiques aura au moins 3 diviseurs élémentaires réels de degrés impairs. Et comme chacune des 8 caractéristiques que nous avons écrites ci-dessus contient moins de 3 degrés impairs, il s'ensuit qu'elles ne peuvent appartenir à des cyclides réelles. — Les autres 10 caractéristiques contiennent bien au moins 3 degrés impairs, mais ce théorème nous dit en outre que 3 de ces degrés impairs doivent correspondre à des racines réelles du déterminant. De là on peut tirer plusieurs conséquences importantes pour les questions de réalité des cyclides : ainsi les cyclides réelles [1 1 1 1 1], [2 1 1 1], [3 1 1] ont (au moins) 3 cônes de KUMMER réels (en entendant toujours par surface réelle une surface ayant une équation à coefficients réels), la cyclide [(2 1) 1 1] a les deux cônes de KUMMER réels, la cyclide de DUPIN [(1 1) (1 1) 1] a réels le cône de KUMMER et les deux faisceaux de plans qui contiennent deux séries de cercles de cette surface, etc. (89).

---

(87) Voir le n⁰ 16 de son *Inauguraldissertation* : *Ueber die Transformation der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades zwischen Liniencoordinaten auf eine canonische Form* (réimprimé dans le tome XXIII des Math. Ann.).

(88) En général on voit facilement qu'une forme quadratique à n variables, dont l'expression canonique contienne k carrés d'un signe et $n-k$ carrés de signe contraire, représente dans R_{n-1} une variété quadratique a $n-2$ dimensions contenant seulement des espaces linéaires réels dont le nombre des dimensions est moindre que k et $n-k$. Cela donne, pour ainsi dire, la raison intime du théorème d'inertie des formes quadratiques.

(89) On sait qu'une congruence quadratique de droites peut être considérée comme l'intersection de deux variétés quadratiques de l'espace à quatre dimensions (dont l'une représente le complexe linéaire contenant la congruence quadratique). La classification des congruences quadratiques se réduit donc à celle de

Tableau des surfaces du 4e ordre étudiées dans ce travail (90).

Surfaces à conique double proprement dite.

Nos.	Caractéristiques	Classes	
1—31	[1 1 1 1 1]	12	Surface générale.
33	[2 1 1 1]	10	Surface à un point double conique.
43	[3 1 1]	9	Un point biplanaire de 1e espèce.
38	[2 2 1]	8	Deux points coniques.
52	[4 1]	8	Un point biplanaire de 2e espèce.
47	[3 2]	7	Un point conique et un point biplanaire de 1e espèce.
56	[5]	7	Un point biplanaire de 3e espèce.

58,73	[(1 1) 1 1 1]	8	Un couple de points coniques.
93	[(2 1) 1 1]	8	Un point biplanaire de 2e espèce (couple de points coniques coïncidents).
78	[(1 1) 2 1]	6	Trois points coniques.
98	[(2 1) 2]	6	Un point conique et un point biplanaire de 2e espèce.
104	[(3 1) 1]	6	Un point uniplanaire de 1e espèce.
86	[(1 1) 3]	5	Un couple de points coniques et un point biplanaire de 1e espèce.
111	[(4 1)]	5	Un point uniplanaire de 2e espèce.

---

l'intersection de deux variétés quadratiques (dont l'une doit être considérée particulièrement). Or comme dans ce travail nous avons fait cette dernière classification, on peut dire que nous avons fait en même temps *implicitement* celle des congruences quadratiques (classification que nous avions seulement ébauchée dans le Mémoire cité à p. 348, en la dérivant de celle des complexes quadratiques). Nous ne pouvons pas développer cette idée, qui montre un lien très étroit entre les différentes surfaces qui nous ont occupés et les différents cas particuliers de la surface de KUMMER du 4e ordre et de la 4e classe, et qui porterait à des rapprochements très intéressants entre des surfaces qui, à première vue, paraissent n'avoir aucune relation entre elles. Au surplus ce lien et ces rapprochements peuvent être établis dans chaque cas au moyen de la correspondance connue entre la géométrie (projective) d'un complexe linéaire et la géométrie (des inversions) de l'espace ordinaire (S. LIE, Math. Ann., V).

(90) Dans ce tableau nous n'entendons pas donner un résumé du travail: par suite nous ne nommons que les particularités relatives aux points singuliers qui suffisent pour distinguer entre elles les différentes surfaces que nous nom-

Nos.	Caractéristiques	Classes	
116	[(1 1) (1 1) 1]	4	Deux couples de points coniques.
122	[(2 1) (1 1)]	4	Un couple de points coniques et un point biplanaire de 2e espèce.

127	[(2 2) 1]	4	Surface réglée à conique et droite doubles de l'espèce II. de CREMONA.
132	[(3 2)]	4	Surface réglée à conique et droite doubles de l'espèce IV. de CREMONA.

Surfaces à conique cuspidale.

66,74	[(1 1) 1 1 1]	6	Cas général.
94	[(2 1) 1 1]	6	Les deux points-clos de la conique cuspidale coïncident.
79	[(1 1) 2 1]	4	Un point conique.
99	[(2 1) 2]	4	Les deux points-clos coïncident et la surface a aussi un point conique.
105	[(3 1) 1]	4	Il y a un point dans lequel coïncident les deux points-clos avec un point conique.
87	[(1 1) 3]	3	Un point biplanaire (de 1e espèce).
112	[(4 1)]	3	Il y a un point singulier de coïncidence des points-clos avec un point biplanaire.

Surfaces à deux droites doubles (se coupant en un point non triple).

1—31	$[\bar{1}\ 1\ 1\ 1\ 1]$	12	Cas général.
34	$[\bar{1}\ 2\ 1\ 1]$	10	Un point conique.
44	$[\bar{1}\ 3\ 1]$	9	Un point biplanaire de 1e espèce.
39	$[\bar{1}\ 2\ 2]$	8	Deux points coniques.
53	$[\bar{1}\ 4]$	8	Un point biplanaire de 2e espèce.

mons; mais dans le Mémoire même on a vu plusieurs autres propriétés relatives à ces surfaces et qui pourraient aussi servir à les distinguer entre elles. Nous avons omis dans cette énumération quelques surfaces dont nous avons aussi parlé, mais qui peuvent être regardées comme cas particuliers des espèces que nous avons dans ce tableau.

Nos.	Caractéristiques	Classes	
75	$[\bar{1}\,(1\,1)\,1\,1]$	8	Un couple de points coniques.
95	$[\bar{1}\,(2\,1)\,1]$	8	Un point biplanaire de 2e espèce (couple de points coniques coïncidents).
80	$[\bar{1}\,(1\,1)\,2]$	6	Trois points coniques.
106	$[\bar{1}\,(3\,1)]$	6	Un point uniplanaire (de 1e espèce).

117	$[\bar{1}\,(11)\,(11)]$	4	Deux couples de points coniques.

128	$[\bar{1}\,(2\,2)]$	4	Surface réglée à trois droites doubles de l'espèce V. de CREMONA.

Surfaces à une droite double et une droite cuspidale.

40	$[\bar{1}\,2\,2]$	8	Cas général.
53	$[\bar{1}\,4]$	8	Les deux points-clos coïncident.
81	$[\bar{1}\,(1\,1)\,2]$	6	Un point conique.
107	$[\bar{1}\,(3\,1)]$	6	Le point conique du cas précédent va se poser sur la droite cuspidale.
118	$[\bar{1}\,(1\,1)\,(1\,1)]$	4	Deux points coniques.

128	$[\bar{1}\,(2\,2)]$	4	Surface réglée à deux droites (directrices) doubles et une génératrice cuspidale.
129	$[\bar{1}\,(2\,2)]$	4	Surface réglée à deux directrices coïncidentes et une génératrice double.

Surfaces à deux droites cuspidales.

82	$[\bar{1}\,(1\,1)\,2]$	6	Cas général.
108	$[\bar{1}\,(3\,1)]$	6	Cas particulier remarquable (voir le n° 108 cité).
119	$[\bar{1}\,(1\,1)(1\,1)]$	4	Un point conique.

Surfaces à point triple par lequel passent deux droites doubles.

N^{os}.	Caractéristiques	Classes	
35	$[\bar{2}\,1\,1\,1]$	10	Cas général ; le point triple est planaire.
45	$[\bar{3}\,1\,1]$	9	Le point triple est triplanaire (de 1^e espèce).
41	$[\bar{2}\,2\,1]$	8	Un point conique.
54	$[\bar{4}\,1]$	8	Le point triple est un point triplanaire particulier (de 2^e espèce).
48	$[\bar{2}\,3]$	7	Un point biplanaire de 1^e espèce.
49	$[\bar{3}\,2]$	7	Un point conique ; et le point triple est triplanaire (de 1^e espèce).
57	$[\bar{5}]$	7	Le point triple est un point triplanaire particulier (de 3^e espèce).

83	$[\bar{2}\,(1\,1)\,1]$	6	Un couple de points coniques.
100	$[\bar{2}\,(2\,1)]$	6	Un point biplanaire de 2^e espèce (couple de points coniques coïncidents).
88	$[\bar{3}\,(1\,1)]$	5	Le point triple est triplanaire ; et il y a un couple de points coniques.

Surfaces à point triple par lequel passent une droite double et une cuspidale ou deux droites cuspidales.

50	$[\bar{3}\,2]$	7	Une droite double et une droite cuspidale.
57	$[\bar{5}]$	7	Le point clos coïncide avec le point triple.
89	$[\bar{3}\,(1\,1)]$	5	Outre ces droites la surface a un point conique.
90	$[\bar{3}\,(1\,1)]$	5	Par le point triple passent deux droites cuspidales.

Surfaces à point triple par lequel passent trois droites doubles.

137		3	Cas général : surface romaine de STEINER.
138		3	Deux des droites doubles coïncident.
139		3	Les trois droites doubles coïncident.

Surfaces à droite bidouble (contenant deux points triples distincts ou coïncidents).

N^{os}.	Caractéristiques	Classes	
76	$[(\overline{1\,1})\,1\,1\,1]$	8	Cas général : les deux points triples sont planaires.
96	$[(\overline{2\,1})\,1\,1]$	8	Les deux points triples coïncident (en un point triplanaire).
84	$[(\overline{1\,1})\,2\,1]$	6	Un point conique.
101	$[(\overline{2\,1})\,2]$	6	Les deux points triples coïncident et il y a un point conique.
109	$[(\overline{3\,1})\,1]$	6	Les deux points triples coïncident en un point dont deux plans nodaux coïncident.
91	$[(\overline{1\,1})\,3]$	5	Un point biplanaire de 1e espèce.
113	$[(\overline{4\,1})]$	5	Le plan nodal double du point triple de l'avant-dernier cas touche le long d'une droite simple.
120	$[(\overline{1\,1})\,(1\,1)\,1]$	4	Un couple de points coniques.
123	$[(\overline{1\,1})\,(2\,1)]$	4	Un point biplanaire de 2e espèce.
124	$[(\overline{21})\,(1\,1)]$	4	Les deux points triples coïncident, et il y a un couple de points coniques.

Surfaces à droite cuspidale de 2e espèce.

102	$[(\overline{2\,1})\,2]$	6	Cas général : il y a sur la droite un point triple et un point d'osculation de deux nappes.
114	$[(\overline{4\,1})]$	5	Les deux points nommés coïncident en un point triple uniplanaire.
125	$[(\overline{2\,1})\,(1\,1)]$	4	Un point conique.

Surfaces (réglées) à droite triple.

Nos.	Caractéristiques	Classes	
130	$[(\overline{2\,2})\,1]$	4	Cas général : surface réglée de l'espèce III. de CREMONA.
133	$[(\overline{3\,2})]$	4	Surface réglée de l'espèce X. de CREMONA et cas particulier.

Turin, le 8 Avril 1884 (91).

(91) Pendant l'impression de ce travail est paru, dans ce même tome XXIV des Math. Ann. le Mémoire de M. ROHN: *Ueber die Flächen vierter Ordnung mit dreifachem Punkte,* dans lequel on trouve aussi celles parmi nos surfaces qui sont douées de points triples. Cependant elles y sont étudiées à des points de vue tout-à-fait différents du nôtre, de sorte qu'il n'y a presque pas dans notre travail de véritables répétitions de résultats déjà contenus dans ce Mémoire. — En finissant je veux remercier M. ROHN même, et aussi M. KLEIN, pour quelques conseils, qu'ils ont bien voulu me donner après la lecture de mon manuscript, et dont j'ai profité dans la correction des épreuves. (Octobre 1884)