Corrado Segre

Ricerche sui fasci di coni quadrici in uno spazio lineare qualunque

Atti R. Acc. Scienze Torino, Vol. **19** (1883-84), p. 878–896

in: Corrado Segre, Opere, a cura della Unione Matematica Italiana, Volume III, Edizione Cremonese, Roma, 1961, p. 485–501

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Segre_CW_3_485>

LII.

RICERCHE SUI FASCI DI CONI QUADRICI IN UNO SPAZIO LINEARE QUALUNQUE

« Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino »,
vol. XIX, 1883-84, pp. 692-710.

In un lavoro pubblicato tra le Memorie di quest'illustre Accademia (1) abbiamo mostrato quali siano le proprietà generali dei fasci di quadriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni, e basandoci su un teorema analitico del signor WEIERSTRASS intorno ad un fascio di forme quadratiche il cui determinante non sia identicamente nullo (2) ne abbiamo dedotto il modo di classificare completamente per ciascuno spazio tali fasci di quadriche, nella ipotesi che questi non si compongano esclusivamente di quadriche degeneri o *coni*. Ci proponiamo ora di studiare brevemente appunto quel caso prima escluso, mostrando alcune proprietà notevoli dei fasci di coni quadrici, specialmente quelle che possono servire a distinguere tra loro cioè a classificare i fasci di coni quadrici, in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni. Seguiremo un procedimento sintetico, ma per essere più completi mostreremo anche come i nostri risultati si possano trovare analiticamente basandosi su una trasformazione particolare data dal signor KRONECKER di un fascio di forme quadratiche di determinante

(1) *Studio sulle quadriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni*, Mem. Acc. Torino, (2) 36, 1884 [questo volume, p. 25]. Alcune proposizioni che enuncieremo senza dimostrazione, specialmente sul principio di questa Nota, si troveranno dimostrate in quella Memoria.

(2) *Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen*, Monatsber. Akad. Wiss. Berlin, Mai 1868, pp. 310-338.

nullo (³), e ne dedurremo che la classificazione dei fasci di coni quadrici si riduce in sostanza alla classificazione già studiata dei fasci di quadriche non degeneri.

Proprietà generali.

1. In uno spazio lineare ad n dimensioni S_n diciamo *cono quadrico* (⁴) di *specie* r una quadrica (ad $n-1$ dimensioni) avente un S_{r-1} doppio, vale a dire ottenuta proiettando da quell'S_{r-1} una quadrica generale ad $n-r-1$ dimensioni (intersezione del cono con un S_{n-r} qualunque); quell'S_{r-1} diremo *sostegno* del cono (od anche *vertice* quando si riduca ad un punto, cioè pei coni di 1ª specie). Un tal cono ha dunque i suoi punti disposti su ∞^{n-r-1} S_r passanti pel sostegno: in tutti i punti di un tale S_r esso ha uno stesso S_{n-1} tangente.

Il cono contiene inoltre degli S_m passanti pel sostegno e tali che il loro numero di dimensioni m stia tra r e $(n+r-1)/2$ od $(n+r-2)/2$ (a seconda che l'uno o l'altro di questi due numeri è intero), potendo raggiungere entrambi quei limiti. Diremo per brevità *spazi generatori* del cono tali S_m. Gli S_{n-1} tangenti al cono nei punti di un S_m generatore, ossia lungo gli S_r generatori contenuti in questo, formano un sistema lineare $m-r$ volte infinito, e si tagliano quindi in un $S_{n+r-m-1}$, il quale tocca il cono lungo tutto quell'S_m, cioè lo taglia in un cono di specie $m+1$ avente questo spazio per sostegno. Diremo perciò quell'$S_{n+r-m-1}$ *tangente* al cono considerato lungo l'S_m generatore. Ogni S_r generatore appartenente all'S_m ha l'S_{n-1} tangente passante per questo $S_{n+r-m-1}$ e viceversa ogni S_{n-1} passante per questo è tangente al cono lungo un S_r generatore, appartenente all'S_m; e la corrispondenza così stabilita tra

(³) V. le osservazioni che il KRONECKER fece seguire alla Memoria citata del WEIERSTRASS (ibid. pp. 339-346) e la Nota *Ueber Schaaren von quadratischen Formen* (Monatsberichte, Januar, 1874, pp. 59-76) alla p. 73. Cogliamo quest'occasione per ringraziare il Prof. KRONECKER per le spiegazioni gentilmente dateci per lettera su queste sue ricerche analitiche ed altre ad esse affini.

(⁴) Non avendo da considerare coni di ordine superiore al 2º, tralasceremo spesso per brevità l'aggettivo *quadrico*. E per ragioni analoghe parlando di *spazi lineari* diremo semplicemente *spazi* e li rappresenteremo colla lettera S accompagnata da un indice inferiore che indichi il numero delle dimensioni (e non da esponenti). Tutti gli spazi (lineari o no) che considereremo s'intenderanno contenuti in S_n, e quindi a numero di dimensioni $< n$.

quelle due varietà lineari $m - r$ volte infinite degli S_r generatori appartenenti all'S_m e degli S_{n-1} passanti per lo spazio tangente lungo questo S_m è proiettiva (come risulta dalla teoria della polarità rispetto ad una quadrica).

2. Parecchie delle proposizioni sui fasci di quadriche, che trovammo nella Memoria citata, valgono anche, come provano le dimostrazioni ivi date, se il numero dei coni contenuti in quei fasci diventa infinito, cioè se si ha un fascio di coni quadrici. Così è sempre vero che gli S_{n-1} polari dei vari punti dello spazio rispetto ad un tal fascio formano altrettanti fasci tutti proiettivi a questo e quindi fra loro. Se per un punto coincidono gli S_{n-1} polari rispetto a due e quindi a tutte le quadriche del fascio, quel punto è doppio per una quadrica del fascio; e viceversa per ogni punto doppio di una quadrica del fascio tutti gli S_{n-1} polari rispetto alle altre quadriche coincidono. In particolare, se quel punto appartiene alla *base* (intersezione di tutte le quadriche) del fascio esso ne sarà un punto doppio e l'S_{n-1} tangente in esso a tutte le quadriche taglierà quella di cui esso è punto doppio nel cono quadrico ad $n - 2$ dimensioni tangente nel punto stesso alla base del fascio.

Ogni S_ν taglia il fascio di coni in un fascio di quadriche a $\nu - 1$ dimensioni; in generale questo fascio si comporrà tutto di coni quando $\nu > n - r$.

3. Nello studio che intendiamo fare dei fasci di coni quadrici è chiaro che possiamo escludere subito il caso in cui il fascio si compone di coni i cui sostegni abbiano un punto (od uno spazio) comune, poichè un tal fascio (e quindi anche la sua base) si ottiene proiettando da quel punto (o da quello spazio) un fascio di quadriche, generali o degeneri, di uno spazio a meno di n dimensioni. Le proprietà di questo secondo fascio darebbero dunque immediatamente quelle del primo fascio di coni; e in particolare gl'invarianti assoluti dei due fasci sarebbero gli stessi. Ad esempio un fascio di coni di specie r aventi lo stesso sostegno S_{r-1} ha proprietà, particolarizzazioni ed invarianti assoluti che sono dati da quelli del fascio di quadriche generali in cui esso è tagliato da un S_{n-r} qualunque. Basta adunque studiare quei fasci di coni quadrici in cui i sostegni di questi non hanno alcun punto comune; e noi ci occuperemo in fatti esclusivamente di questi.

Da ciò deduciamo una limitazione per la specie r dei coni del fascio. Poichè i sostegni S_{r-1} di due qualunque di essi non devono aver punti comuni (chè altrimenti tutti i sostegni avrebbero quei punti comuni) dovrà essere $2(r-1)<n$, cioè $r<n/2+1$, sicchè la specie dei coni del nostro fascio non può superare $n/2$ od $(n+1)/2$ secondo che n è pari o dispari. Troveremo anzi più tardi, seguendo lo stesso concetto, un limite più piccolo (v. n⁰ 13).

Luogo dei vertici di un fascio di coni di 1ª specie.

4. Consideriamo anzitutto un fascio di coni di 1ª specie, facendo astrazione per ora dai coni di specie superiore che in generale vi saranno pure, ma in numero finito, nel fascio. I vertici di quei coni di 1ª specie formeranno una serie continua di ∞^1 punti corrispondenti univocamente al fascio di coni, poichè se uno stesso punto fosse vertice per due coni sarebbe vertice per tutti, il che escludiamo (n⁰ 3); quindi, poichè le quadriche di un fascio formano una serie razionale, quei vertici formeranno una curva razionale. Un S_{n-1} taglierà il fascio dato in un fascio di quadriche generali ad $n-2$ dimensioni, nel quale vi saranno al più n coni; quindi in quell'S_{n-1} vi saranno al più n vertici di coni del fascio dato. Dunque il luogo dei vertici dei coni (di 1ª specie) di quel fascio è una curva razionale il cui ordine non può superare n.

5. A risultati più precisi e ad altri pure importanti giungeremo con un'altra via, che ci darà anche la generazione della curva. Dalle proposizioni ricordate al n⁰ 2 segue che il vertice di un cono del fascio di coni di 1ª specie avrà uno stesso S_{n-1} polare rispetto a questi; e siccome l'S_{n-1} polare di un punto qualunque rispetto ad un cono passa pel sostegno di questo, così quell'S_{n-1} passerà pei vertici di tutti i coni del fascio, cioè conterrà la curva considerata e quindi anche quel vertice di cui esso è polare. Ne segue che questo vertice sta su tutti i coni del fascio e che questi hanno in esso uno stesso S_{n-1} tangente. Dunque:

La curva luogo dei vertici di un fascio di coni di 1ª *specie appartiene alla base di questo fascio, anzi ne è una curva doppia lungo cui tutti i coni del fascio si toccano, poichè in ciascun punto di essa tutti i coni hanno uno stesso* S_{n-1} *tangente. Gli* S_{n-1} *tangenti, che così corrispondono ai punti della curva, contengono tutti questa curva.*

6. Sia m il numero minimo di dimensioni che possa avere uno spazio lineare passante per quella curva, ossia, come diremo più brevemente, supponiamo che questa appartenga ad un S_m. Gli S_{n-1}

polari (tangenti) dei punti di quella curva rispetto ad un cono di 1ª specie arbitrario del fascio formeranno, poichè quella curva passa pel vertice, una serie semplicemente infinita appartenente ad una serie lineare $m-1$ (e non meno) volte infinita di S_{n-1} (5). Vedemmo al numero precedente che tutta quella serie semplicemente infinita di S_{n-1} contiene quella curva e quindi anche l'S_m cui essa appartiene; dunque anche quella serie lineare $m-1$ volte infinita di S_{n-1}, ossia l'S_{n-m} per cui essa passa, conterrà quella curva e quell'S_m. D'altronde quella serie lineare $m-1$ volte infinita a cui appartiene la serie semplicemente infinita considerata di S_{n-1} non può mutare col cono di 1ª specie arbitrario del fascio, poichè altrimenti quest'ultima apparterrebbe ad una serie lineare meno che $m-1$ volte infinita. Concludiamo adunque che:

Lo spazio lineare $\mathrm{S_m}$ *a cui appartiene la curva dei vertici è contenuto nella base del fascio. Lungo esso tutti i coni del fascio hanno lo stesso spazio* $\mathrm{S_{n-m}}$ *tangente.*

7. Ciò premesso, consideriamo due determinati coni di 1ª specie f', f'' del fascio, dei quali siano x', x'' i vertici. Ogni S_{n-1} passante per quell'S_{n-m}, cioè appartenente alla serie lineare $m-1$ volte infinita considerata, tocca quei due coni lungo due *raggi* (S_1) uscenti rispettivamente da x', x'', e vi è corrispondenza proiettiva tra gli S_{n-1} di quel sistema ed i raggi delle due *stelle* di centri x', x'' contenute nello spazio S_m (n^0 1). Quindi anche queste stelle sono tra loro proiettive. Un punto x comune a due raggi corrispondenti è un punto di S_m nel quale f', f'' hanno lo stesso S_{n-1} tangente, vale a dire è il vertice di un altro cono del fascio (n^0 2), e viceversa ogni vertice di un cono del fascio è un punto in cui f', f'' hanno lo stesso S_{n-1} tangente ed è quindi comune a due raggi corrispondenti delle due stelle. Dunque la curva dei vertici dei coni è il luogo dei punti d'intersezione dei raggi corrispondenti di due stelle proiettive nello spazio S_m, cioè una curva razionale d'ordine m normale per questo spazio (6). Sicchè concludiamo finalmente:

Il luogo dei vertici di un fascio di coni quadrici di 1ª *specie è una curva normale* $\mathrm{C^m}$ *di uno spazio lineare* $\mathrm{S_m}$.

---

(5) Fa eccezione il caso in cui $m=1$; allora il luogo dei vertici dei coni è una retta (S_1) lungo cui questi coni sono toccati da uno stesso S_{n-1}.

(6) V. VERONESE, *Behandlung der projectivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Princip des Projicirens und Schneidens*, Math. Ann., XIX, pp. 161-234, p. 219.

8. Il fatto che quell'S_m deve essere uno spazio generatore per tutti i coni del fascio ci dà una notevole limitazione pel numero m. In fatti (n^0 1) il numero m delle dimensioni di uno spazio generatore di un cono di 1^a specie ad $n-1$ dimensioni non può superare $(n-1)/2$ oppure $n/2$ secondo che n è impari o pari (il che risulta subito del resto dal fatto che quell'S_m essendo contenuto nell'S_{n-m} tangente lungo esso a tutti i coni sarà $m \leqq n-m$, cioè $m \leqq n/2$). Dunque:

L'ordine m *della curva dei vertici non può superare* (n — 1)/2 *ovvero* n/2 *secondo che* n *è impari o pari.*

9. Dalla ricerca fatta (n^i 6, 7) ricaviamo inoltre questi risultati:

Lungo la curva normale C^m *luogo dei vertici dei coni del fascio gli* S_{n-1} *tangenti comuni a questi coni formano una serie semplicemente infinita di classe* m — 1 (*cioè l'ente correlativo ad una* C^{m-1} *normale*).

La condizione necessaria e sufficiente affinchè due coni quadrici di 1^a *specie determinino un fascio di coni quadrici è che essi abbiano lo stesso spazio tangente lungo uno spazio generatore comune.*

Luogo dei sostegni di un fascio di coni di specie qualunque.

10. Consideriamo ora in generale un fascio di coni di specie qualunque r, cioè aventi degli S_{r-1} per sostegni. Come notammo (n^0 3) si può supporre che il fascio sia tale che due qualunque di quegli S_{r-1} non si taglino. Vogliamo cercare quale specie di varietà ad r dimensioni sia il luogo di quegli ∞^1 S_{r-1}.

Supponiamo che lo spazio di numero minimo di dimensioni in cui quella varietà è contenuta sia un S_m. L'S_{n-r} polare di uno qualunque di quegli S_{r-1} rispetto a tutto il fascio di coni passerà per tutti gli altri S_{r-1}: dunque gli ∞^1 S_{n-r} polari dei sostegni dei coni passano per la varietà costituita da questi sostegni e quindi anche per l'S_m che la contiene. E siccome questo ha per polare rispetto ad uno qualunque dei coni un $S_{n+r-m-1}$ per cui passano gli ∞^1 S_{n-r} suddetti, e nel quale starà in conseguenza quell'S_m che è in essi contenuto, così tutto questo spazio S_m appartenendo al proprio spazio polare starà su tutti i coni del fascio. Inoltre quel suo spazio polare (tangente) $S_{n+r-m-1}$ sarà lo stesso rispetto a tutti i coni del fascio, giacchè esso appartiene agli ∞^1 S_{n-r} e se questi avessero comuni vari $S_{n+r-m-1}$ ne seguirebbe dalla polarità che gli ∞^1 S_{r-1} non starebbero su un solo S_m, come supponemmo. Dunque:

Un fascio di coni di specie r *si compone di coni aventi comune un* S_m *passante pei loro sostegni e l'*$S_{n+r-m-1}$ *tangente lungo esso.*

11. Così vediamo pure che:

La condizione affinchè il fascio di quadriche determinato da due coni di specie r *si componga tutto di tali coni è che quei due abbiano comune uno spazio generatore e lo spazio tangente lungo esso.*

È chiaro che questa condizione non è solo necessaria ma anche sufficiente, poichè se quello spazio generatore comune ai due coni è un S_m, sicchè lo spazio tangente lungo esso sia un $S_{n+r-m-1}$, tutte le quadriche del fascio dovranno contenere quell'S_m ed esser toccate lungo esso dall'$S_{n+r-m-1}$, il che non può accadere se non sono coni di specie r aventi quell'S_m per spazio generatore (o coni di specie più elevata).

12. Siano f', f'' due coni qualunque di specie r del fascio ed S'_{r-1}, S''_{r-1} i loro sostegni. Tutti gli S_{n-1} passanti per l'$S_{n+r-m-1}$ toccano f' lungo degli S_r passanti per S'_{r-1} e descriventi una forma proiettiva a quella descritta dai detti S_{n-1} (n^0 1); e similmente gli stessi S_{n-1} toccano f'' lungo degli S_r passanti per S''_{r-1} e descriventi una forma proiettiva a quella composta di quegli S_{n-1}. Quindi gli S_r passanti per S'_{r-1} e giacenti in S_m e quelli per S''_{r-1} descrivono due forme proiettive in S_m ed il luogo dei punti d'intersezione degli S_r corrispondenti sarà per conseguenza [7] una F_r^{m-r+1} contenente ∞^1 S_{r-1}, tra cui S'_{r-1} e S''_{r-1}, e costituente appunto il luogo dei sostegni dei coni di specie r del fascio, perocchè un punto comune a due S_r corrispondenti di quei due sistemi avrà un solo spazio tangente ad f', f'' e quindi a tutto il fascio, cioè sarà un punto doppio di qualche cono del fascio. Dunque:

Il luogo dei sostegni di un fascio di coni di specie r *è una* F_r^{m-r+1} *dello spazio generatore comune* S_m *lungo cui essi hanno uno stesso spazio tangente.*

13. Un cono di specie r può contenere un S_m solo quando (n^0 1) $m \leqq (n+r-1)/2$ e quindi $m-r+1 \leqq (n-r+1)/2$. Dunque:

---

(7) Come si può vedere considerando un S_{m-r} qualunque dell'S_m e la proiettività determinata su esso dai due sistemi proiettivi di S_r: gli $m-r+1$ punti doppi di quella proiettività sono i punti del luogo cercato appartenenti a quell'S_{m-r}. Del resto conviene per studiare le proprietà di quel luogo F_r^{m-r+1} considerarlo come rappresentato dall'annullarsi dei determinanti di una matrice. V. VERONESE, loc. cit., p. 215.

L'ordine del luogo dei sostegni dei coni del fascio non può superare $(n-r+1)/2$ *od* $(n-r)/2$ *(secondo che l'uno o l'altro di questi numeri è intero), e il numero delle dimensioni dello spazio generatore comune, in cui sta quel luogo dei sostegni, non può superare* $(n+r-1)/2$ *od* $(n+r-2)/2$.

Di qui deduciamo per r un limite inferiore a quello trovato al n° 3. In fatti, affinchè due qualunque dei sostegni S_{r-1} (e quindi tutti) non abbiano punti comuni, stando entrambi in un S_m, deve essere $m>2(r-1)$. Ma $m\leqq(n+r-1)/2$, oppure $m\leqq(n+r-2)/2$. Dunque $(n+r-1)/2>2(r-1)$, donde $3(r-1)<n$, cioè $r<n/3+1$; oppure $r<(n-1)/3+1$. Laonde pei fasci di coni quadrici non ottenibili proiettando da un punto o da uno spazio fasci di quadriche a minor numero di dimensioni avremo che:

La specie dei coni di un fascio non può superare quello fra i tre numeri $(n-1)/3$, $n/3$, $(n+1)/3$ *che è intero.*

È poi facile vedere, applicando la proposizione del n° 11, che esistono effettivamente fasci di coni (non ottenibili con proiezioni) di specie data non superiore al detto limite.

14. Lungo tutti i punti della F_r^{m-r+1} luogo dei sostegni dei coni del fascio questi si toccano mutuamente, sicchè quella è una varietà doppia per la base del fascio. Gli S_{n-1} tangenti ai coni nei suoi punti formano dunque una serie r volte infinita di classe $m-r$ composta di ∞^1 serie lineari $r-1$ volte infinite di S_{n-1}; come risulta dalla polarità rispetto ad uno qualunque dei coni osservando che quella F_r^{m-r+1} ne contiene il sostegno.

15. Si sarebbe potuto giungere ai risultati ottenuti, o almeno ad una parte di essi, con quest'altro ragionamento. Se un fascio di quadriche si compone di coni di specie r, gli S_{n-1} polari di ogni punto dello spazio rispetto ai coni stessi passano rispettivamente pei loro sostegni. Prendendo adunque nello spazio $n-r+1$ punti arbitrari, i loro S_{n-1} polari rispetto ad uno di quei coni si tagliano precisamente nel suo sostegno; e siccome gli S_{n-1} polari di quei punti rispetto a tutti i coni del fascio formano altrettanti fasci proiettivi tra loro e col fascio di coni, così il luogo dei sostegni dei coni del fascio sarà il luogo degli S_{r-1} d'intersezione degli S_{n-1} corrispondenti di $n-r+1$ fasci proiettivi. Parrebbe dunque che quel luogo fosse dell'ordine $n-r+1$; ma siccome nel fascio vi sono in generale dei coni di specie superiore ad r, essi producono un abbassamento nell'ordine.

I coni di specie superiore del fascio.

16. Consideriamo di nuovo un fascio di coni di 1ª specie, la cui curva dei vertici sia d'ordine m, sicchè vi sia un S_{n-m} tangente a tutto il fascio lungo l'S_m contenente quella curva. Quell'S_{n-m} taglierà ciascun cono del fascio secondo un cono ad $n-m-1$ dimensioni avente quell'S_m per sostegno, cioè di specie $m+1$; e quindi tutto il fascio primitivo sarà tagliato secondo un fascio di tali coni aventi lo stesso S_m per sostegno. Secando questo secondo fascio con un S_{n-2m-1} dell'S_{n-m} (con che si ottiene un fascio di quadriche generali nel quale vi saranno generalmente $n-2m$ coni di 1ª specie) si scorge che esso contiene in generale $n-2m$ coni di specie $m+2$, i cui sostegni sono degli S_{m+1} passanti per l'S_m e formanti un gruppo di spazi coniugati rispetto a tutti i coni del fascio. Lungo questi $n-2m$ S_{m+1} l'S_{n-m} sarà dunque toccato da $n-2m$ coni del fascio primitivo, i quali per conseguenza, toccando lungo degli S_{m+1} un S_{n-m}, saranno di 2ª specie; vediamo inoltre che essi avranno per sostegni degli S_1 posti su quegli S_{m+1} e taglianti in conseguenza l'S_m (in punti della curva dei vertici). Viceversa ogni cono del fascio di specie superiore alla prima sarà toccato dall'S_{n-m} non più soltanto lungo l'S_m, ma lungo uno spazio a maggior numero di dimensioni passante per l'S_m. Dunque:

In generale in un fascio di coni di 1ª *specie in cui il luogo dei vertici di questi sia una curva d'ordine* m *vi sono* $\mathrm{n}-2\mathrm{m}$ *coni di* 2ª *specie. I sostegni* S_1 *di questi si appoggiano su quella curva (senza stare nello spazio* S_m *che la contiene).*

17. Consideriamo più in generale un fascio di coni di specie r i cui sostegni siano gli S_{r-1} di una certa F_r^{m-r+1} sita su un S_m. Lungo questo S_m ogni cono del fascio è toccato, come vedemmo, da un $S_{n+r-m-1}$ fisso, il quale in conseguenza taglia il dato fascio secondo un fascio di coni aventi l'S_m per sostegno. E come in questo secondo fascio vi sono in generale $n+r-2m-1$ coni di specie $m+2$, cioè aventi per sostegni degli S_{m+1} passanti per quell'S_m, così conchiudiamo:

In generale in un fascio di coni di specie r *in cui il luogo dei sostegni appartenga ad un* S_m *(e sia quindi una* $\mathrm{F}_\mathrm{r}^{\mathrm{m}-\mathrm{r}+1}$*) vi sono*

$n + r - 2m - 1$ *coni di specie* $r + 1$. *I loro sostegni passano per degli* S_{r-1} *del luogo detto (ma non stanno nell'*S_m) (8).

18. Lo stesso si può dimostrare considerando un S_{n-r} qualunque dello spazio: taglierà il dato fascio in un fascio di quadriche generali, in cui vi sarebbero generalmente $n - r + 1$ coni (di 1a specie). Ma la F^{m-r+1} taglia quell'S_{n-r} in $m - r + 1$ punti posti sull'intersezione coll'S_m: questi punti sono dunque vertici di altrettanti di quei coni, ma ciascuno di essi conta due volte, poichè ciascuno di quei vertici sta sul fascio di quadriche. Dunque non vi sono più che $n - r + 1 - 2(m - r + 1) = n + r - 2m - 1$ coni in quel fascio e quindi altrettanti coni di specie $r + 1$ nel dato fascio.

19. Se il fascio di coni di specie r non è generale, potranno alcuni dei coni di specie $r + 1$ venire a coincidere o in un tal cono o in un cono di specie superiore ad $r + 1$. Ma allora nel fascio di coni di specie $m + 1$ d'intersezione del dato coll'$S_{n+r-m-1}$ tangente lungo l'S_m coincideranno pure altrettanti coni di specie $m + 2$ in un cono di specie $m + 2$ o superiore; e viceversa. Di qui appare che le particolarità che può presentare il fascio di coni di specie r sono date dalle particolarità di quel fascio di coni di specie $m + 1$ dell'$S_{n+r-m-1}$ aventi l'S_m per sostegno comune, ossia dalle particolarità del fascio di quadriche generali in cui il fascio di coni di specie r è tagliato da un $S_{n+r-2m-2}$ contenuto nell'$S_{n+r-m-1}$. Ma le particolarità che può presentare un fascio di quadriche generali ci sono note: quindi potremo dedurne le particolarità del nostro fascio di coni.

Rappresentazione analitica dei fasci di coni di 1a specie.

20. Il signor KRONECKER ha dato, come dicemmo in principio, una forma canonica per un fascio di forme quadratiche aventi de-

(8) Questo passaggio dei sostegni dei coni di specie superiore del fascio per degli S_{r-1} della F_r^{m-r+1}, passaggio che non si presenta solo nel caso generale, ma anche nei casi particolari, si spiega facilmente riflettendo che, nel fascio essendovi continuità, ad un cono di specie superiore è infinitamente vicino un cono di specie r, e quindi sul sostegno del primo cono vi sarà un S_r infinitamente vicino al sostegno S_r di questo, cioè un S_r appartenente alla F_r^{m-r+1}.

terminante nullo, dalla quale avremmo pure potuto ottenere i nostri risultati. Segue in fatti dalle ricerche di quello scienziato che un fascio di coni (di 1[a] specie) si può sempre rappresentare, dicendo $x_0, x_1, \ldots, x_n$ le coordinate omogenee di punti in S_n, coll'equazione:

$$(1)\qquad \left(u \sum_{k=0}^{k=m-1} x_{2k}\, x_{2k+1} + v \sum_{k=0}^{k=m-1} x_{2k+1}\, x_{2k+2}\right) + (u\, \Phi + v\, \Psi) = 0\,,$$

dove $u:v$ è il parametro variando il quale si ottiene ogni cono del fascio, Φ e Ψ sono forme quadratiche contenenti solo più le variabili $x_{2m+1}, x_{2m+2}, \ldots, x_n$, ed m è un certo numero intero che può variare da uno ad un altro fascio.

Ora il vertice di quello tra quei coni che corrisponde ad un valor qualunque di $u:v$ si ha derivando quell'equazione (1): le sue coordinate soddisfano dunque alle equazioni:

$$(2)\qquad \begin{cases} ux_1 = 0\,, \quad ux_0 + vx_2 = 0\,, \quad ux_3 + vx_1 = 0\,, \quad ux_2 + vx_4 = 0\,, \\ ux_5 + vx_3 = 0\,, \ldots, \quad ux_{2k+1} + vx_{2k-1} = 0\,, \quad ux_{2k} + vx_{2k+2} = 0\,, \\ \qquad \ldots, \quad ux_{2m-2} + vx_{2m} = 0\,, \quad vx_{2m-1} = 0\,, \end{cases}$$

$$(3)\qquad u\frac{d\Phi}{dx_i} + v\frac{d\Psi}{dx_i} = 0 \qquad (i = 2m+1\,,\ 2m+2\,, \ldots, n)\,.$$

Ma le (2) dànno:

$$x_1 = x_3 = x_5 = \ldots = x_{2m-1} = 0\,,$$

$$ux_0 + vx_2 = 0\,, \quad ux_2 + vx_4 = 0\,, \ldots, ux_{2m-2} + vx_{2m} = 0\,,$$

donde eliminando $u:v$ e notando che per un valore qualunque di questa le equazioni (3) non sono soddisfatte che annullando tutte le variabili che vi entrano:

$$(4)\qquad \begin{cases} x_1 = x_3 = x_5 = \ldots = x_{2m-1} = 0\,; \quad x_{2m+1} = x_{2m+2} = \ldots = x_n = 0\,, \\ \qquad \begin{vmatrix} x_0 & x_2 & x_4 \ldots x_{2m-2} \\ x_2 & x_4 & x_6 \ldots x_{2m} \end{vmatrix} = 0\,. \end{cases}$$

Queste equazioni determinano sull'S_m che unisce i punti di riferimento 0 2 4 6 ... (2m) una curva normale d'ordine m, la quale sarà dunque il luogo dei vertici dei coni del fascio.

Quello spazio S_m appartiene a tutti i coni del fascio, poichè l'equazione (1) è evidentemente soddisfatta per $x_1 = x_3 = x_5 = \ldots = x_{2m-1} = 0$, $x_{2m+1} = x_{2m+2} = \ldots = x_n = 0$. L'$S_{n-1}$ tangente in un punto qualunque di esso ad un cono qualunque del fascio ha l'equazione della forma

$$\sum_{k=0}^{k=m-1} a_k x_{2k+1} = 0 ,$$

sicchè lo spazio $x_1 = x_3 = x_5 = \ldots = x_{2m-1} = 0$ tocca lungo quell'S_m tutti i coni. Dunque ritroviamo in questo modo che il luogo dei vertici dei coni di 1ª specie di un fascio è una curva normale di uno spazio generatore comune a questi coni e che lungo questo spazio i coni hanno uno stesso spazio tangente.

21. Pei valori di $u:v$ che annullano il determinante di $u\Phi + v\Psi$ le equazioni (3) non sono più soddisfatte soltanto annullando le coordinate che vi entrano, e quindi il sistema delle equazioni (2), (3) diventa indeterminato, e non determina più un solo punto doppio, cioè un vertice, del cono (1), ma bensì una retta doppia, od un piano doppio, ecc., come sostegno di quel cono, che ora viene ad essere di specie superiore alla 1ª. Nel caso più generale i valori di $u:v$ per cui il determinante di $u\Phi + v\Psi$ si annulla sono tanti quante le variabili contenute in questa forma, cioè $n - 2m$. Dunque in generale in un fascio di coni di 1ª specie i cui vertici formino una C^m vi sono $n - 2m$ coni di 2ª specie (V. n⁰ 16).

22. Lo spazio tangente $x_1 = x_3 = x_5 = \ldots = x_{2m-1} = 0$ comune al fascio di coni taglia questo fascio (1) secondo quadriche la cui equazione è appunto

$$u\Phi + v\Psi = 0 ,$$

cioè secondo un fascio di coni di specie $m+1$ aventi per sostegno comune l'S_m congiungente i punti $0\ 2\ 4\ 6 \ldots (2m)$. Le particolarità che può avere questo fascio (od il fascio di quadriche non degeneri in cui esso è tagliato da un S_{n-2m-1}) ed in particolare i suoi invarianti assoluti dànno precisamente *tutte* le particolarità e gl'invarianti assoluti del fascio di coni di 1ª specie considerato, come mostra l'equazione (1).

Rappresentazione analitica dei fasci di coni di 2ª specie e di specie superiori.

23. Dall'equazione canonica (1) del fascio di coni di 1ª specie si deduce facilmente l'equazione canonica di un fascio di coni di specie superiore. In fatti supponiamo che nella (1) anche la forma

$u\Phi + v\Psi$ abbia il determinante identicamente nullo, qualunque siano u, v: allora anche ad $u\Phi + v\Psi$ si potrà dare una forma analoga al 1° membro della (1), sicchè l'equazione (1) del nostro fascio di coni prenderà la forma:

$$(1') \quad \begin{cases} \left(u \sum_{k=0}^{k=m-1} x_{2k}\, x_{2k+1} + v \sum_{k=0}^{k=m-1} x_{2k+1}\, x_{2k+2}\right) \\ + \left(u \sum_{k=m}^{k=\mu-1} x_{2k+1}\, x_{2k+2} + v \sum_{k=m}^{k=\mu-1} x_{2k+2}\, x_{2k+3}\right) \\ + (u\Phi' + v\Psi') = 0, \end{cases}$$

dove Φ', Ψ' sono forme quadratiche di $x_{2\mu+2}, x_{2\mu+3}, \ldots, x_n$. In questo caso le equazioni (2), (3) ci mostrano che il nostro fascio si compone non più di coni di 1ª specie, ma di coni di 2ª specie e per ciascun valore di $u : v$ esse ci determinano la retta che è sostegno del corrispondente cono. Quelle equazioni ci dànno ora in luogo delle (4):

$$x_1 = x_3 = \ldots = x_{2m-1} = 0, \quad x_{2m+2} = x_{2m+4} = \ldots = x_{2\mu} = 0,$$

$$x_{2\mu+2} = x_{2\mu+3} = \ldots = x_n = 0,$$

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_2 \ldots x_{2m-4} & x_{2m-2} & x_{2m+1} & x_{2m+3} \ldots x_{2\mu-1} \\ x_2 & x_4 \ldots x_{2m-2} & x_{2m} & x_{2m+3} & x_{2m+5} \ldots x_{2\mu+1} \end{vmatrix} = 0,$$

e ci mostrano quindi che il luogo delle rette costituenti il sostegno dei coni di 2ª specie del fascio è una rigata razionale (a 2 dimensioni) d'ordine μ contenente curve direttrici normali degli ordini m e $\mu - m$ (9), e appartenente all'$S_{\mu+1}$ che congiunge i punti di riferimento $0\ 2\ 4 \ldots (2m)\ (2m+1)\ (2m+3) \ldots (2\mu+1)$, che è uno spazio generatore comune a tutti i coni.

(9) V. la nostra Nota *Sulle rigate razionali in uno spazio lineare qualunque*, Atti Acc. Torino, XIX, Febbraio 1884 [queste Opere, I, p. 1]. In essa abbiamo mostrato come in uno spazio lineare a $\mu+1$ dimensioni le rigate razionali d'ordine μ formino varie specie (ciascuna delle quali non ha invarianti assoluti) distinte tra loro per l'ordine minimo delle curve direttrici in esse contenute. Questi risultati si estendono con ragionamenti affatto analoghi a quelli ivi usati alle superficie ad r dimensioni composte di ∞^1 S_{r-1}: in un S_ν tali superficie di ordine $\nu - r + 1$ non si distinguono tra loro che per gli ordini minimi di curve direttrici in esse contenute. Abbiamo mostrato ciò pel caso di $r = 2$ nella Nota citata: ci occuperemo del caso di $r = 3$ prossimamente in una nuova Nota [queste Opere, I, p. 17].

24. L'S_{n-1} tangente in un punto qualunque di quell'$S_{\mu+1}$ a uno dei coni ha l'equazione della forma

$$\sum_{k=0}^{k=m-1} a_k\, x_{2k+1} + \sum_{k=m}^{k=\mu-1} b_k\, x_{2k+2} = 0\,;$$

quindi l'$S_{n-\mu}$ tangente lungo quell'$S_{\mu+1}$ ad ogni cono del fascio è uno stesso, ossia è per tutti lo spazio

$$x_1 = x_3 = \ldots = x_{2m-1} = x_{2m+2} = x_{2m+4} = \ldots = x_{2\mu} = 0.$$

Questo taglia il fascio (1′) dei coni di 2ª specie in un fascio di coni ad $n-\mu-1$ dimensioni di specie $\mu+2$ aventi per sostegno comune quell'$S_{\mu+1}$ e per equazione

$$u\,\Phi' + v\,\Psi' = 0.$$

Ai valori di $u:v$ che annullano il determinante di $u\,\Phi' + v\,\Psi'$ corrispondono nel fascio coni di 3ª specie o di specie superiore. Nel caso più generale quella forma contenendo $n-2\mu-1$ variabili vi sono altrettanti coni di 3ª specie nel fascio. Ma in casi particolari alcuni di questi potranno coincidere in un cono di 3ª specie od anche di specie superiore: ciò dipenderà dal determinante di $u\Phi'+v\Psi'$ e dai suoi subdeterminanti e si potrà quindi giudicare considerando quel fascio di coni di specie $\mu+2$ in cui il dato fascio è tagliato dall'$S_{n-\mu}$ tangente lungo l'$S_{\mu+1}$.

25. Potrebbe la forma $u\Phi' + v\Psi'$ avere ancora il determinante identicamente nullo; allora il fascio si comporrà di coni di 3ª specie e ponendo $u\Phi' + v\Psi'$ sotto forma analoga alla (1) e poi sostituendo nella (1′) si avrà una rappresentazione canonica dei fasci di coni di 3ª specie. E così continuando vediamo in questo modo quale sia l'equazione canonica di un fascio di coni di specie qualunque r, e quell'equazione ci conduce a ritrovare i risultati prima ottenuti sinteticamente. Ma inoltre noi veniamo così a giustificare pienamente quanto avevamo detto sulla fine del n° 19 ed otteniamo la seguente importante proposizione, che con quelle prima trovate permette di fare una classificazione completa dei fasci di coni quadrici per ogni dato spazio, riducendola in definitiva ad una classificazione di fasci di quadriche generali:

In un fascio di coni quadrici di specie r *vi sono due distinte particolarità da considerare*: 1° *il luogo degli* S_{r-1} *che sono sostegni di quei coni; tale luogo è una varietà ad* r *dimensioni (di cui vedemmo alcune proprietà), il cui ordine può variare da un fascio ad un altro e che non presenta altri invarianti che gli ordini delle curve* *(direttrici) d'ordini minimi in essa contenute.* 2° *il fascio di coni in cui il dato fascio è tagliato dallo spazio tangente a tutti i coni di questo lungo quel loro spazio generatore comune che è lo spazio (di dimensioni minime) contenente la varietà suddetta: questi nuovi coni hanno per sostegno comune quest'ultimo spazio e tutte le particolarità del loro fascio (come gl'invarianti assoluti) dànno luogo alle varie particolarità (tra cui gl'invarianti assoluti) del fascio dato* ([10]).

Fasci di coni quadrici negli spazi a 2, 3, 4 e 5 dimensioni.

26. Come applicazione dei risultati generali ottenuti vediamo quali siano i vari fasci di coni negli spazi lineari a numero di dimensioni $\leqq 5$. Avremo solo da applicare quelli relativi ai fasci di coni di 1ª specie, tranne che per lo spazio a 5 dimensioni; perocchè solo in questo si presenta un fascio di coni di 2ª specie in cui i sostegni non passano per uno stesso punto e che quindi non si può ottenere proiettando un fascio di coni di 1ª specie a minor numero di dimensioni (n° 13).

Per gli spazi ad 1 e a 2 dimensioni vi è poco da dire. Nel primo il fascio di *coni* è costituito da un'involuzione in cui tutte le coppie di punti coincidono in un punto doppio. Nel secondo i fasci di (*coni*) coniche degenerate in coppie di rette o si compongono di coppie di rette aventi comune il punto doppio (involuzione quadratica) oppure hanno per luogo dei punti doppi di quelle una retta comune a tutte le coppie (n° 6) e quindi si compongono di quella e rispettivamente delle rette di un fascio. Non esiste, propriamente parlando, il fascio di rette doppie (coni di 2ª specie), poichè affinchè due rette doppie determinino un fascio di tali coniche esse devono coincidere (n° 11).

Nello spazio a 3 dimensioni vi sono anzitutto i fasci di coni aventi comune il vertice (od un punto doppio): sono coni di 1ª specie se proiettano da questo punto un fascio ordinario di coniche, mentre sono coni di 2ª specie, cioè coppie di piani, se proiettano

---

([10]) Così si potrà distinguere i fasci di coni quadrici di specie r in varie classi a seconda dei caratteri del luogo dei sostegni e della *caratteristica* del fascio di coni d'intersezione collo spazio tangente considerato: allora per ogni data classe di fasci i soli invarianti saranno quelli del gruppo formato da quei coni del fascio che sono di specie superiore ad r (V. il § 3 della 2ª Parte della nostra Memoria citata in principio).

una delle due sorta di fasci di coppie di rette viste dianzi. Si hanno così tutti i fasci di coppie di piani. Quanto ai fasci di coni di 1ª specie (coni quadrici ordinari) vi sono ancora quelli per cui non vi è un vertice comune, ma i vertici hanno per luogo una retta: allora tutti quei coni saranno toccati lungo questa retta da uno stesso piano (n^0 6) e quindi si taglieranno ancora secondo una conica. Viceversa due coni ordinari che si tocchino lungo una generatrice comune determinano un tal fascio di coni.

27. Nello spazio a 4 dimensioni abbiamo anzitutto i fasci di coni aventi comune un punto doppio, cioè ottenuti proiettando da questo i fasci di quadriche generali ed i fasci di coni (considerati al n^0 precedente) dello spazio a tre dimensioni. Otteniamo dunque: il fascio di coni di 2ª specie aventi comune la retta di sostegno (e in particolare il fascio di coppie di spazi ordinari); il fascio di coni di 2ª specie, le cui rette di sostegno formano un fascio nel cui piano (piano generatore comune a tutti quei coni) tutti i coni hanno comune lo spazio (ordinario) tangente; il fascio di coni di 1ª specie aventi comune il vertice (fascio di quadriche determinato da due coni qualunque di 1ª specie, i quali abbiano comune il vertice).

Ma oltre a queste qualità di coni di 1ª specie ve ne sono altre due corrispondenti al supporre che il luogo dei vertici sia una linea di 1^0 o di 2^0 ordine. Se quel luogo è una retta, allora essa appartiene a tutti i coni, i quali saranno toccati lungo essa da uno stesso spazio. Se invece il luogo dei vertici è una conica, il piano di essa apparterrà a tutti i coni e un tal fascio sarà appunto determinato da due coni di 1ª specie arbitrari aventi comune un piano. [11]

28. Nello spazio a 5 dimensioni vi sono i seguenti fasci di coni (applicando quanto si è trovato or ora pei fasci di coni dello spazio a 4 dimensioni ed inoltre i soliti teoremi generali):

Il fascio di coni di 3ª specie aventi comune il piano di sostegno.

---

[11] In un lavoro sulle superficie di quarto ordine (dello spazio ordinario) che verrà presto pubblicato nei *Mathematische Annalen* [questo vol., p. 339] abbiamo discusso verso la fine le superficie basi dei fasci di coni di prima specie dello spazio a 4 dimensioni; superficie di cui una soprattutto è notevole, come quella che è di quarto ordine dotata di una retta doppia (e di nessun'altra retta) e di ∞^2 coniche poste negli spazi passanti per questa: la proiezione di quella superficie su uno spazio ordinario è (come mostrammo in quel lavoro) la superficie di STEINER di quarto ordine e terza classe, oppure qualcuno dei suoi casi particolari.

Il fascio di coni di 3ª specie i cui piani di sostegno formano un fascio e che si compone di coni toccati lungo uno spazio a 3 dimensioni comune (lo spazio contenente quel fascio di piani) da uno stesso S_4.

Il fascio di coni di 2ª specie aventi comune la retta di sostegno.

Il fascio di coni di 2ª specie le cui rette di sostegno formano un fascio, cioè composto di coni toccati lungo un piano generatore comune (contenente quel fascio) da uno stesso S_4.

Il fascio di coni di 2ª specie aventi comune un S_3: le rette costituenti i sostegni di quei coni sono in questo spazio ordinario generatrici di una quadrica ordinaria (n^0 12), o, come caso particolare, di un cono quadrico ordinario.

Il fascio di coni di 1ª specie aventi il vertice comune.

Il fascio di coni di 1ª specie i cui vertici formano una generatrice comune a tutti e lungo cui essi sono toccati da uno stesso S_4.

Il fascio di coni di 1ª specie i cui vertici hanno per luogo una conica: quei coni contengono il piano di questa conica e sono toccati lungo esso da uno stesso S_3.

Torino, 18 Maggio 1884.