Corrado Segre

Sur un cas particulier de la surface de Kummer. Lettre à M.K. Rohn

Berichten der math-phys. Classe der K. Sächs. Ges. der Wissenschaften, Vol. **34** (1884), p. 132–135

in: Corrado Segre, Opere, a cura della Unione Matematica Italiana, Volume III, Edizione Cremonese, Roma, 1961, p. 502–505

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Segre_CW_3_502>

LIII.

SUR UN CAS PARTICULIER DE LA SURFACE DE KUMMER

Lettre à M. K. ROHN (vorgelegt von Prof. KLEIN)

« Berichten der math.-phys. Classe der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften »,
XXXIV, 1884, pp. 132-135.

Dans votre Note *Ueber einige specielle Fälle der Kummerschen Fläche* (Berichte der k. sächs. Gesellschaft der Wissensch., Mai 1884) vous avez étudié ces cas particuliers de la surface de KUMMER qui sont 2, 3, 4 fois tétraédroïdes, mais il semble que vous n'ayez pas vu qu'il y a en outre une surface qui est *six* fois tétraédroïde.

Voici de quelle manière j'y suis parvenu. J'indique avec vous par 1 2 3 4 5 6 les six complexes linéaires fondamentaux d'une surface de KUMMER. Dans la série des complexes quadratiques dont elle est la surface singulière ces six complexes forment une involution, par exemple l'involution (12) (34) (56), lorsque la surface est tétraédroïde relativement au tétraèdre fondamental (12) (34) (56) (c'est-à-dire au tétraèdre dont les couples d'arêtes opposées sont les directrices des congruences 12, 34, 56). Or six éléments 1 2 3 4 5 6 peuvent former plusieurs involutions seulement dans les cas ayant les types suivants : 1° (12) (45) (36), (12) (35) (46) : on a alors une surface doublement tétraédroïde par rapport aux deux tétraèdres ayant ces mêmes symboles. — 2° (12) (45) (36), (16) (34) (25), (14) (23) (56) (les six éléments forment alors deux cycles (135) (246) d'une même homographie cyclique) : deux de ces involutions ayant pour conséquence la troisième on en déduit fort simplement le théorème de M. STÉPHANOS que les trois tétraèdres représentés par ces symboles forment un système *desmique* [1] ; la surface correspondante est tétraédroïde par rapport

---

[1] C. STÉPHANOS, *Sur les systèmes desmiques des tétraèdres*, Bull. des sc. math., (2) 3, 1879, 1e partie.

à ces trois tétraèdres. — 3⁰ les trois involutions précédentes avec la (14) (25) (36): (les six éléments forment le cycle projectif (1 2 3 4 5 6)): la surface est quatre fois tétraédroïde. — 4⁰ enfin les six involutions :

$$A_{pq}: (12)(45)(36) \qquad A_{pr}: (16)(34)(25) \qquad A_{ps}: (14)(23)(56)$$
$$A_{rs}: (12)(35)(46) \qquad A_{qs}: (15)(34)(26) \qquad A_{qr}: (13)(24)(56);$$

les trois couples 12, 34, 56 sont alors deux-à-deux harmoniques, c'est-à-dire ils forment le covariant sextique T d'une forme quartique, ou bien, en les représentant sur la sphère, *l'octaèdre* [2].

Or vous avez bien considéré les trois premiers cas, mais non pas ce quatrième: il conduit aux conséquences suivantes.

Il y a une surface de Kummer *qui est tétraédroïde six fois (le nombre maximum de fois) par rapport à six tétraèdres qui forment* 3 *couples* $\mathrm{A}_{pq}\,\mathrm{A}_{rs}$, $\mathrm{A}_{pr}\,\mathrm{A}_{qs}$, $\mathrm{A}_{ps}\,\mathrm{A}_{qr}$ *de tétraèdres ayant deux arêtes opposées communes, et* 4 *ternes desmiques de tétraèdres (trois tétraèdres ayant commun un indice forment un terne). Les* 3 *couples d'arêtes opposées communes aux* 3 *couples sont les arêtes d'un nouveau tétraèdre fondamental* T (12) (34) (56) (*qui détermine parfaitement les six tétraèdres* A, *comme étant ceux qui ont commun avec lui un couple d'arêtes opposées).*

Cette surface de Kummer, sans invariants absolus, n'est pas un cas particulier de celle qui est 4 fois tétraédroïde. La disposition de ses points et plans singuliers est bien remarquable. On peut diviser les 16 points singuliers en 4 groupes de quatre points, sommets de tétraèdres I, II, III, IV desmiques avec T: j'indiquerai en conséquence les points singuliers par les couples de symboles I1, . . . , I4, . . . , IV1 , . . . , IV4; et analoguement pour les plans singuliers. Alors je trouve le tableau suivant, qui donne les six points ou plans singuliers appartenant à chaque plan ou point singulier et qui lui correspondent par rapport aux six complexes fondamentaux 1 , . . . , 6 :

$$\mathrm{I}\begin{cases}1 & \mathrm{II3\ \ II4\ \ III4\ \ III2\ \ IV2\ \ IV3}\\ 2 & \mathrm{II4\ \ II3\ \ III3\ \ III1\ \ IV1\ \ IV4}\\ 3 & \mathrm{II1\ \ II2\ \ III2\ \ III4\ \ IV4\ \ IV1}\\ 4 & \mathrm{II2\ \ II1\ \ III1\ \ III3\ \ IV3\ \ IV2}\end{cases} \qquad \mathrm{II}\begin{cases}1 & \mathrm{I3\ \ I4\ \ IV4\ \ IV2\ \ III2\ \ III3}\\ 2 & \mathrm{I4\ \ I3\ \ IV3\ \ IV1\ \ III1\ \ III4}\\ 3 & \mathrm{I1\ \ I2\ \ IV2\ \ IV4\ \ III4\ \ III1}\\ 4 & \mathrm{I2\ \ I1\ \ IV1\ \ IV3\ \ III3\ \ III2}\end{cases}$$

(2) Ces six involutions correspondent aux six rotations d'un demi-tour qui superposent l'octaèdre à soi-même sans laisser fixe aucun de ses sommets.

III						
1	IV3	IV4	I4	I2	II2	II3
2	IV4	IV3	I3	I1	II1	II4
3	IV1	IV2	I2	I4	II4	II1
4	IV2	IV1	I1	I3	II3	II2

IV						
1	III3	III4	II4	II2	I2	I3
2	III4	III3	II3	II1	I1	I4
3	III1	III2	II2	II4	I4	I1
4	III2	III1	II1	II3	I3	I2

De là on peut aussi tirer la manière suivant laquelle les éléments singuliers de la surface se correspondent par rapport aux quadriques fondamentales. On sait que les 10 quadriques fondamentales se divisent par rapport au tétraèdre T en deux groupes de 4 et de 6. Or la notation, que j'ai choisie, est telle qu'un point et un plan singuliers, lorsqu'ils sont polaires par rapport à une quadrique du premier groupe ont commun le premier symbole, et en particulier lorsqu'ils sont polaires par rapport à la quadrique (135) (246) ils sont représentés par les deux mêmes symboles ; tandis que s'ils sont polaires par rapport à l'une des trois quadriques (124) (356), (125) (346), (134) (256) appartenant au groupe de 6, ils ont commun le second symbole.

Je trouve en outre cet autre tableau qui donne les quatre points ou plans singuliers appartenant aux faces ou aux sommets des six tétraèdres fondamentaux A, par rapport auxquels la surface est tétraédroïde :

A_{pq}			
I3	I4	II3	II4
I1	I2	II1	II2
III3	III4	IV3	IV4
III1	III2	IV1	IV2

A_{pr}			
I2	I4	III2	III4
I1	I3	III1	III3
II2	II4	IV2	IV4
II1	II3	IV1	IV3

A_{ps}			
I2	I3	IV2	IV3
I1	I4	IV1	IV4
II2	II3	III2	III3
II1	II4	III1	III4

A_{rs}			
I3	I4	II1	II2
I1	I2	II3	II4
III3	III4	IV1	IV2
III1	III2	IV3	IV4

A_{qs}			
I2	I4	III1	III3
I1	I3	III2	III4
II2	II4	IV1	IV3
II1	II3	IV2	IV4

A_{qr}			
I2	I3	IV1	IV4
I1	I4	IV2	IV3
II2	II3	III1	III4
II1	II4	III2	III3

Chaque plan singulier contient six points, sommets des six tétraèdres A et sommets du quadrilatère complet d'intersection du plan avec T, quadrilatère dont le triangle diagonal coupe la conique du plan (par rapport à laquelle il est conjugué) suivant les six points singuliers de celui-ci.

Je vous ai montré ces deux tableaux, parce qu'ils donnent toutes les propriétés de la configuration dont il s'agit ; mais je ne m'arrêterai pas à les relever. Remarquez seulement que chacun des quatre tétraèdres I, II, III, IV, dans lesquels j'ai décomposé le système des points singuliers, forme un terne desmique avec le tétraèdre analogue de plans singuliers représenté par le même symbole et avec T. De plus ces quatre tétraèdres de points singuliers (ou ceux de plans singuliers) sont desmiques entre eux deux-à-deux : ainsi I et II forment un terne desmique avec un tétraèdre ayant deux sommets communs avec A_{pq} (sur une arête de T) et les deux autres communs avec A_{rs} (sur l'arête opposée de T) ; etc.

Quant à l'équation de la surface, on peut lui donner la forme très simple

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 + 4x_1x_2x_3x_4 = 0\,,$$

en prenant T pour tétraèdre des coordonnées. Cette équation, d'où l'on peut tirer toutes les propriétés de la surface, montre qu'elle se transforme en elle-même par un groupe de $16 \cdot 24$ homographies différentes (et par autant de corrélations). — Si on considère le faisceau de surfaces du 4e ordre

$$\Sigma x_i^4 + 4\lambda\, x_1x_2x_3x_4 = 0,$$

il contient seulement quatre surfaces ayant des points singuliers (en exceptant T): celles qui correspondent à $\lambda = \pm 1$ ou bien à $\lambda = \pm\sqrt{-1}$; et elles sont toutes des surfaces de Kummer de mon espèce. Les deux premières (ou bien les deux autres) ont mêmes complexes fondamentaux ; les configurations de leurs points et plans singuliers sont telles que les quatre tétraèdres I, II, III, IV de points singuliers de l'une forment par leurs faces les quatre tétraèdres homologues de plans singuliers de l'autre, et réciproquement.

Turin, le 9 Août 1884.