Corrado Segre

Sull'equilibrio di un corpo rigido soggetto a forze costanti in direzione ed intensità e su alcune questioni geometriche affini

Mem. di Mat. e di Fis. della Soc. It. delle Scienze (detta dei XL), Vol. **3** (1887), p. 1–35
in: Corrado Segre, Opere, a cura della Unione Matematica Italiana, Volume III, Edizione Cremonese, Roma, 1961, p. 506–544

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Segre_CW_3_506>

LIV.

SULL'EQUILIBRIO DI UN CORPO RIGIDO SOGGETTO A FORZE COSTANTI IN DIREZIONE ED INTENSITÀ E SU ALCUNE QUESTIONI GEOMETRICHE AFFINI [*]

«Memorie di matematica e di fisica della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL)»,
Serie terza, tomo VI, n. 3, 1887, pp. 1-35.

È noto che, dato un corpo rigido sollecitato da forze costanti in intensità e direzione, e tenutone fisso un punto qualunque, esistono in generale 4 posizioni d'equilibrio del corpo, le quali si ottengono facendolo rotare intorno a certe quattro rette passanti pel punto fisso. Il sistema di queste quattro rette fu già studiato dal prof. SIACCI, che ne trovò notevoli proprietà geometriche e gli diede il nome di *quaterna di assi statici* (1). A quelle stesse proprietà noi giungeremo in modo alquanto diverso nel presente lavoro mediante la considerazione di un certo fascio di quadriche che si presenta usando una certa rappresentazione sui punti dello spazio delle rotazioni intorno ad assi passanti per un punto fisso. Ma con questo metodo potremo anche risolvere, adoperando ragionamenti geometrici, altre questioni che si presentavano spontaneamente sulla specie dell'equilibrio che si ha in ciascuna posizione, sul grado e sulle proprietà del complesso degli assi statici corrispondenti ai vari punti dello spazio, su certi punti pei quali vi sono infinite posizioni di equilibrio, ecc. Inoltre se, invece di tener fisso solo un punto del corpo, si tien fissa una retta, si può ancor domandare di trovare le

---

[*] Memoria presentata dal Socio FRANCESCO SIACCI ed approvata dal Socio E. FERGOLA.

(1) V. *Le quaterne statiche nei sistemi di forma invariabile* (Mem. Soc. ital. Scienze, IV, 1882).

posizioni d'equilibrio del corpo: si hanno allora due posizioni simmetriche rispetto alla retta e delle quali una è posizione d'equilibrio stabile. Ma per ogni punto dello spazio passano due rette notevoli in quanto che tenendo fissa una di esse e facendole rotare attorno il corpo, questo si trova sempre in equilibrio. Tali rette hanno una stretta relazione coi quattro assi statici uscenti dal punto stesso, e formano, variando questo nello spazio, una congruenza quadratica appartenente al complesso lineare noto delle rette rispetto a cui il momento del sistema di forze è nullo, e appartenente nello stesso tempo come congruenza di rette doppie al complesso degli assi statici. Si sa che, tenendo fissa una retta di quel complesso lineare, il corpo si trova in equilibrio: ma si può domandare se è in equilibrio stabile oppure in equilibrio instabile. Ora il nostro metodo ci conduce a distinguere perfettamente quelle rette del complesso per cui l'equilibrio è stabile da quelle per cui è instabile, mediante la considerazione di quella congruenza quadratica e della sua superficie focale, superficie la cui forma presenta sempre, indipendentemente dalla natura del corpo e delle forze che vi agiscono, alcuni caratteri che determineremo. Questa stessa considerazione ci conduce pure a dimostrare l'esistenza (reale) di due punti dello spazio, che presentano particolarità assai notevoli quando, tenendo fisso uno di essi, si cercano le posizioni d'equilibrio del corpo. Accenniamo ancora come la considerazione di un certo sistema di rette, che si presenta nello studio del complesso degli assi statici, ci condurrà in un modo, se non erriamo, assai notevole ad un noto teorema di MINDING. Finiremo questo lavoro mostrando come i nostri risultati non abbiano solo importanza per l'astatica, ma possano interpretarsi con poche modificazioni come risultati relativi ad un problema puramente geometrico.

I.

1. Sia dato un corpo o sistema rigido di punti, di cui un punto qualunque abbia x, y, z per coordinate attuali (od iniziali) rispetto ad un sistema rettangolare fisso e sia il punto d'applicazione di una forza di componenti costanti X, Y, Z. Determinare le posizioni d'equilibrio del corpo, assoggettato a condizioni qualunque date, significa trovare le posizioni per cui si ha

$$\Sigma (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = 0,$$

ossia, ponendo

(1) $$U = \Sigma (Xx + Yy + Zz),$$

per cui si ha

$$dU = 0\,;$$

vale a dire quel problema equivale a cercare dove si annulla la variazione della funzione U della posizione del corpo (*momento* del sistema di forze rispetto all'origine), variazione compatibile colle condizioni date a cui è assoggettato il corpo.

Noi ci occuperemo dei casi in cui il corpo è solo libero di rotare intorno ad un punto fisso o ad un asse fisso.

Ogni posizione che un corpo rigido assume movendosi attorno ad un punto fisso O, che sceglieremo come origine del nostro sistema cartesiano, si può ottenere dalla posizione iniziale mediante una rotazione determinata intorno ad un certo asse passante per O. Dicendo Θ l'ampiezza (col segno determinato da una nota convenzione) di una tal rotazione ed l, m, n i coseni di direzione del suo asse, la rotazione sarà pienamente determinata quando si conosceranno le 4 quantità

$$x_0 = \cos\frac{1}{2}\Theta, \quad x_1 = l \operatorname{sen}\frac{1}{2}\Theta, \quad x_2 = m \operatorname{sen}\frac{1}{2}\Theta, \quad x_3 = n \operatorname{sen}\frac{1}{2}\Theta,$$

o meglio i loro mutui rapporti, poichè queste quantità sono evidentemente legate dalla relazione

(2) $$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\,,$$

e d'altronde non cessano di individuare la stessa rotazione quando vengano tutte cambiate di segno. Quindi ogni rotazione del corpo intorno ad asse passante per O sarà individuata dal punto le cui coordinate cartesiane sono i rapporti $x_1 : x_0\,, x_2 : x_0\,, x_3 : x_0$ (ossia $l \operatorname{tg}(\Theta/2)$, $m \operatorname{tg}(\Theta/2)$, $n \operatorname{tg}(\Theta/2)$, e di cui per conseguenza x_0, x_1, x_2, x_3 saranno le coordinate omogenee. Questo punto si costruirà evidentemente portando sull'asse di rotazione a partire da O un segmento uguale a $\operatorname{tg}(\Theta/2)$ (tenendo conto del verso positivo di quell'asse): esso ne sarà l'altro estremo. Così avremo come imagini delle varie rotazioni intorno ad O e delle corrispondenti posizioni del corpo i vari punti dello spazio, e noi diremo *polo* di ogni rotazione quel punto del suo asse che ne è l'imagine. La relazione (2) permetterà di rendere omogenea ogni equazione nelle $x_0\,, x_1\,, x_2\,, x_3$, e quindi di considerare queste come vere coordinate omogenee di un polo [2].

---

[2] Questa rappresentazione delle rotazioni intorno ad assi passanti per un punto fisso mediante i punti dello spazio non è nuova. Essa è già contenuta im-

Se si sposta il corpo dalla sua posizione attuale, tenendone sempre fisso il punto O, in una nuova posizione qualunque le coordinate di un punto del corpo saranno funzioni lineari delle coordinate attuali del punto stesso aventi per coefficienti delle forme quadratiche nelle corrispondenti x_0, x_1, x_2, x_3; sicchè la funzione lineare U delle coordinate dei punti del corpo definita dalla (1) sarà in ciascuna posizione del corpo una forma quadratica di quelle 4 quantità, cioè

$$U = \Sigma\, a_{ik}\, x_i\, x_k\,, \qquad (i, k = 0, 1, 2, 3) \tag{3}$$

dove i coefficienti $a_{ik} = a_{ki}$, dei quali non c'importano per ora le espressioni, sono costanti dipendenti soltanto dal dato sistema di forze e dalla posizione iniziale del corpo.

Ai vari punti $(x_0\, x_1\, x_2\, x_3)$ dello spazio, considerati come poli di rotazioni, corrispondono così per la (3) vari valori per U, valori che questa funzione della posizione del corpo prende in seguito alle rotazioni di questo rappresentate da quei punti. Il momento U è costante ed uguale a u per tutti i punti dello spazio per cui

$$\Sigma\, a_{ik}\, x_i\, x_k = u,$$

ossia, in virtù della (2)

$$\Sigma\, a_{ik}\, x_i\, x_k - u\, \Sigma\, x_i^2 = 0. \tag{4}$$

Quest'equazione quadratica omogenea nelle x_i rappresenta col variare di u le infinite quadriche di un fascio, contenente la sfera S imaginaria $\Sigma x_i^2 = 0$ di centro O e raggio $\sqrt{-1}$ [3] e composto per conseguenza di quadriche omocicliche. La considerazione di questo fascio di quadriche sarà la base della ricerca che intendiamo fare.

---

plicitamente nelle formule date da EULERO per le sostituzioni ortogonali ternarie; fu applicata dal SOMOFF (*Theoretische Mechanik,* II. Theil, p. 375 e seg.) per la risoluzione di alcune questioni di astatica, nelle quali però l'importanza di questa rappresentazione ci pare risulti assai meno che nelle questioni da noi trattate; e recentemente fu studiata accuratamente (con applicazioni però non aventi alcuna relazione colle nostre) dal sig. C. STÉPHANOS nella 2ª parte del suo *Mémoire sur la représentation des homographies binaires par des points de l'espace avec application à l'étude des rotations sphériques,* Math. Ann., XXII, 1883, pp. 299-367.

[3] Ci accadrà più volte in questo lavoro di parlare di imaginari, ma solo per brevità di linguaggio, non perchè essi siano indispensabili. Così alla sfera imaginaria S si potrebbe sostituire la polarità reale, che essa determina tra punti e piani dello spazio. Avvertiamo anche che, contrariamente all'uso seguito in recenti lavori di geometria superiore, a noi è convenuto qui di chiamare *superficie imaginarie* quelle che, pur avendo equazioni a coefficienti reali, non hanno una serie doppiamente infinita di punti reali.

2. Perciò è bene che esponiamo anzitutto alcune proprietà, in parte dovute al prof. CREMONA ed in parte nuove, riguardanti questo fascio [4]. Poichè esso contiene una quadrica imaginaria S, la quale corrisponde ad $u = \infty$, vi sarà una serie di valori finiti di u corrispondenti alle quadriche reali del fascio, e la serie dei valori rimanenti (tra cui il valore ∞) corrisponderà alle quadriche imaginarie. Siano p, p' il minimo ed il massimo dei valori di u della prima serie: le quadriche corrispondenti P_2, P'_2 separeranno quadriche imaginarie da quadriche reali e saranno perciò evidentemente ellissoidi ridotti a punti P, P', cioè coni imaginari aventi questi punti per vertici. Oltre a questi due coni il fascio conterrà due coni quadrici reali Q_2, Q'_2 di vertici Q, Q', corrispondenti a due altri valori q, q' di u, compresi tra p e p' e dei quali sia, ad esempio, q il minore. Poichè la curva base del fascio è imaginaria, i due coni Q_2, Q'_2 non potranno tagliarsi e saranno quindi esterni l'uno all'altro.

Facendo variare u in modo continuo crescendo da p a q, a q', a p' si otterranno tutte le quadriche reali del fascio, ed è chiaro che si avrà l'andamento seguente nella specie di queste quadriche. Crescendo u a partire da p la quadrica (4) da ellissoide ridotto ad un punto P si estende ad ellissoide reale e poi, passando per un paraboloide ellittico, diventa iperboloide a due falde, finchè per $u = q$ si riduce al cono reale Q_2. Crescendo ancor u la quadrica diventa un iperboloide ad una falda (tutto esterno al cono Q_2, poichè non può tagliarlo) che comprende anzitutto Q_2 nel suo interno e Q'_2 all'esterno, ma che poi, passando pel paraboloide iperbolico, viene a comprendere Q'_2 all'interno e Q_2 all'esterno; finchè per $u = q'$ l'iperboloide ad una falda si ridurrà al cono reale Q'_2. Indi la quadrica diventa iperboloide a due falde e poi, passando di nuovo per un paraboloide ellittico, ellissoide e finisce per ridursi ad un punto P', cioè al cono imaginario P'_2 quando diventa $u = p'$. — Riflettendo anche che per ogni punto dello spazio passa una sola quadrica reale del fascio, sicchè due quadriche reali non hanno comune alcun punto reale, si scorge che le quadriche ellittiche (ellissoidi ed iperboloidi a due falde, separati da paraboloidi ellittici) formano due serie distinte, l'una interna al cono Q_2, e l'altra interna a Q'_2, ed abbracciano tutti i punti interni all'uno od all'altro cono, mentre le quadriche iperboliche o rigate comprendono tutto lo spazio che è esterno ad

(4) V. CREMONA: *Mémoire de géométrie pure sur les surfaces du 3e ordre*, n° 169 (Crelle's J., 68, p. 123), oppure *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Oberflächen* (Berlin 1870), p. 224.

entrambi i coni Q_2, Q'_2. Di qui segue che il punto P sta entro Q_2, mentre P' sta entro Q'_2.

3. Ciò premesso proponiamoci anzitutto di trovare le posizioni d'equilibrio del corpo, supposto libero di muoversi comunque intorno al punto fisso O. Una tal posizione corrisponde, come vedemmo, a $dU = 0$, essendo U espresso dalla (3) in funzione delle x_i, quantità legate in questo caso unicamente dall'equazione (2). Ne segue che quella condizione si scinde nelle 4 seguenti

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \Sigma\, a_{ik}\, x_i\, x_k - 2ux_i = 0,$$

essendo u un nuovo parametro. Ora confrontando queste equazioni colla (4) si vede che esse esprimono che il punto (x_i) è vertice di un cono quadrico rappresentato dalla (4) per un valore conveniente di u. Ma i coni del fascio (4) sono in generale 4 e, come vedemmo, hanno tutti il vertice reale. Dunque: *un corpo* (5) *libero di rotare intorno ad un punto ha in generale quattro diverse posizioni d'equilibrio.* — I poli di queste quattro posizioni saranno i punti P, P', Q, Q', vertici dei quattro coni del nostro fascio, e le rette che congiungono questi punti ad O saranno gli assi delle rotazioni che portano il corpo dalla posizione iniziale rispettivamente a quelle posizioni d'equilibrio, cioè gli *assi statici* corrispondenti al punto fisso O.

Indicheremo rispettivamente con (P), (P'), (Q), (Q') le 4 posizioni d'equilibrio. Esse presentano tra loro diversità di carattere. In fatti abbiamo visto al n^0 precedente come nella serie dei valori che U od u in forza della (3) o (4) assume nei vari punti (x_i) dello spazio, il valore p assunto in P è il minimo ed il valore p' assunto in P' è il massimo mentre i valori q, q' corrispondenti ai punti Q, Q' non sono nè minimo nè massimo. (Nelle vicinanze di Q, ad esempio, il cono Q_2 separa punti in cui U è minore da punti in cui è maggiore di q). Ora è noto che l'equilibrio di un corpo qualunque in una data posizione è *instabile* o *stabile* se in quella posizione la funzione delle forze $\int \Sigma\, (X\, dx + Y\, dy + Z\, dz)$ è minima o massima rispettivamente; altrimenti l'equilibrio non è nè stabile nè instabile, ossia è *indifferente* (6). Nel nostro caso la funzione delle forze è appunto

---

(5) Sottintenderemo sempre che il corpo è soggetto a forze costanti in direzione ed intensità.

(6) È notevole il fatto (che il prof. SIACCI ci fece osservare) che questa proposizione, fondamentale per la distinzione delle varie specie d'equilibrio, ed

quella che abbiamo chiamata U: noi vediamo dunque che delle 4 posizioni d'equilibrio la (P) è instabile, la (P') è stabile, e le (Q), (Q') sono indifferenti. Ossia:

Delle quattro posizioni d'equilibrio di un corpo mobile intorno a un punto una è d'equilibrio stabile, un'altra d'equilibrio instabile, e le rimanenti due d'equilibrio indifferente [7].

4. Gli assi statici ed i loro quattro poli corrispondenti godono di varie proprietà notevoli, che furono scoperte dal prof. SIACCI [8] e che sono tutte incluse in questa, che il tetraedro di quei quattro poli $PP'QQ'$, cioè dei vertici dei coni del nostro fascio di quadriche, è (per una nota proposizione sui fasci di quadriche) proprio-coniugato rispetto a queste e particolarmente rispetto alla polarità determinata dalla sfera S. Di qui si deduce, ad esempio, ricordando le relazioni che in una tale polarità legano un punto ed il suo piano polare o due rette polari:

I poli delle quattro posizioni d'equilibrio del corpo sono vertici di un tetraedro le cui altezze si tagliano nel punto fisso O *e sono i quattro assi statici corrispondenti; due spigoli opposti qualunque di questo tetraedro hanno direzioni ortogonali. Quindi il piano di due qualunque dei 4 assi statici è normale al piano degli altri due.*

Ad ogni punto dello spazio corrispondono così, considerandolo come un punto fisso rispetto al corpo, quattro assi statici aventi le dette proprietà. Esiste dunque un *complesso* di assi statici definito dal sistema di forze e dalla posizione iniziale del corpo: vedremo più tardi (n^0 21) che questo complesso è del 6^0 grado.

5. Abbiamo supposto nei due n^i precedenti che il corpo fosse affatto libero di rotare intorno al punto fisso O. Poniamo ora invece

---

ammessa come vera da molto tempo, non fu ancora dimostrata completamente in modo rigoroso. Solo nel caso in cui la funzione delle forze è massima fu dimostrato rigorosamente che vi è equilibrio stabile da LEJEUNE DIRICHLET (*Ueber die Stabilität des Gleichgewichts*, Crelle's J., 32, p. 85). Però nel nostro caso, in cui le forze sono costanti, crediamo non sia difficile l'assicurarsi della verità della proposizione su cui ci basiamo.

(7) Questo risultato, che credevamo nuovo, si trova già, almeno in parte, nella *Theorie der Bewegung und der Kräfte* dello SCHELL (2^e Auflage, II. Band, p. 276): però la dimostrazione ivi data ci pare più complicata che la nostra, poichè si basa sulla teoria dell'ellissoide centrale.

(8) Memoria citata, § 4. — Le stesse proprietà furono poi dimostrate in altro modo, forse meno elegante, dal prof. E. PADOVA nella Nota *Intorno agli assi statici nei sistemi di forma invariabile* (Atti Ist. Veneto, (6) 1, 1882-3).

che esso non possa che rotare intorno ad un dato asse r passante per O. Ad ogni punto di r come polo corrisponde una determinata rotazione del corpo intorno ad r ed un determinato valore di U per la posizione così assunta dal corpo, cioè quel valore di u che corrisponde alla quadrica del fascio passante pel punto stesso. Il fascio di quadriche taglia r, com'è noto, secondo le coppie di punti di un'involuzione; e siccome nel fascio vi sono quadriche imaginarie (p. e. la sfera S), così i due punti doppi di quell'involuzione sono reali. Quindi le coppie dell'involuzione che si riducono a questi punti doppi separeranno la serie delle coppie reali dalla serie di coppie che, pur corrispondendo a valori reali del parametro u, sono imaginarie, e quindi non corrispondono a rotazioni reali. Quindi i valori che U assume per rotazioni del corpo intorno ad r hanno un massimo ed un minimo corrispondenti alle rotazioni aventi per poli i due punti doppi di quell'involuzione, cioè i due punti in cui r è toccata da quadriche del fascio. Dunque, per quanto dicemmo sopra (n^0 3), il corpo raggiungerà con quelle rotazioni due posizioni di equilibrio, di cui l'una stabile e l'altra instabile. Siccome poi quei due poli, per una nota proprietà dell'involuzione, sono (coniugati armonici rispetto ai due punti d'intersezione di r con S, ossia) coniugati nell'inversione di centro O e potenza -1, così le tangenti trigonometriche delle metà delle rotazioni corrispondenti intorno ad r daranno per prodotto -1, vale a dire quelle rotazioni differiranno di π. Conchiudiamo dunque:

Se il corpo è libero di rotare intorno ad un asse fisso, esso ha due posizioni d'equilibrio, l'una stabile, l'altra instabile, e può passare dall'una all'altra mediante una rotazione di mezzo giro.

6. In tal modo ad ogni asse passante per O corrispondono due rotazioni intorno ad esso che producono equilibrio, ove l'asse stesso sia tenuto fisso, e quindi corrispondono, come poli di quelle rotazioni, due punti dell'asse coniugati rispetto all'inversione di centro O e potenza -1.

Il cono circoscritto da O ad una quadrica del nostro fascio si comporrà di assi tali che per una delle due posizioni d'equilibrio, che il corpo ha tenendo fisso successivamente ciascuno di essi, il valore del momento U è lo stesso: vediamo dunque che tali assi formano un cono quadrico e che i poli delle rotazioni corrispondenti formano una conica nel piano polare di O rispetto alla quadrica considerata. Aggiungiamo che variando il valore particolare considerato di U il piano di quella conica si muove parallelamente a se stesso, poichè i piani polari di O rispetto al fascio di quadriche (tra cui il piano polare rispetto ad S, cioè il piano all'infinito) formano fascio; di qui si deduce anzi che gli assi di quella conica si muovono parallelamente a se stessi col variare di U (9). Considerando in particolare i valori p, p' di U, cioè i due coni imaginari (P), (P') del fascio di quadriche, le coniche corrispondenti si ridurranno ai punti P, P'; e poichè p e p' sono valori minimo e massimo di U non appartenenti ad altri punti dello spazio, segue che quelle 2 posizioni d'equilibrio instabile o stabile che avevamo trovato pel corpo supponendolo affatto libero di rotare intorno ad O sono ancora posizioni d'equilibrio della stessa natura se si tien fisso l'asse statico corrispondente.

La cosa è diversa per le 2 posizioni d'equilibrio indifferente, che vedemmo rappresentate dai punti Q, Q'. Qui bisogna distinguere tre casi secondo che il punto O è esterno ai due coni (Q), (Q') del fascio, ovvero interno all'uno od all'altro, casi che avremo ancora da distinguere in seguito (10). Ricordando le cose esposte ai n^{i} precedenti e particolarmente quelle riguardanti il variare di U nei punti (x_i) dello spazio, si hanno immediatamente i risultati seguenti. Se O è esterno ad ambi i coni (Q), (Q'), delle due posizioni d'equilibrio indifferente del corpo libero di rotare intorno ad O l'una (avente Q per polo) è d'equilibrio instabile se si tien fisso l'asse statico corrispondente, mentre l'altra (avente Q' per polo) è d'equilibrio stabile se si tien fisso l'asse statico corrispondente. Se invece O è interno al cono (Q) entrambe quelle posizioni sono d'equilibrio stabile quando si tengono fissi rispettivamente gli assi statici corrispondenti. Se infine O è interno al cono (Q') entrambe quelle posizioni diventano d'equilibrio instabile tenendone fissi gli assi statici corrispondenti. — La conica poi che consideravamo per ogni quadrica del

(9) Il luogo di questa serie di coniche è una superficie ciclide cubica, per la quale S è una delle cinque sfere direttrici e P, P', Q, Q' sono i centri delle altre.

(10) Che tutti tre questi casi si presentano effettivamente sarà dimostrato più tardi; che possano presentarsi si può vedere nel seguente modo. I centri delle quadriche del nostro fascio formano una certa curva (cubica sghemba), di cui la parte che comprende i centri delle quadriche imaginarie forma un tratto finito (poichè tra le quadriche imaginarie non vi sono paraboloidi) e continuo avente per estremità i due punti P, P'. Quindi, poichè P è interno al cono (Q) e P' è interno al cono (Q'), e questi due coni sono esterni l'uno all'altro, segue che quel tratto di curva avrà punti interni a (Q), punti interni a (Q'), e punti esterni ad entrambi; sicchè il punto O, che è centro della quadrica imaginaria S del fascio, potrà presentare i tre diversi casi suddetti.

fascio si riduce per uno dei due coni (Q), (Q') al vertice oppure ad una coppia di rette reali, secondo che O è interno od esterno a quel cono.

7. Tra le quadriche del fascio ne esiste sempre una, ed una sola, passante per O. Se O è esterno a (Q), (Q') essa è una quadrica rigata; se è interno all'uno di quei due coni essa è ellittica. Le tangenti in O a quella quadrica sono notevoli in quanto che, tenendo fissa l'una di esse, l'una delle due corrispondenti posizioni d'equilibrio del corpo avrà il polo in O (n^0 5), e quindi l'altra avrà il polo all'infinito; quindi delle due rotazioni che portano il corpo in tali posizioni l'una sarà d'ampiezza nulla e l'altra di mezzo giro. Dunque:

Per ogni punto dello spazio passa un fascio di rette tali che, tenuta fissa una qualunque di esse, il corpo si trova in equilibrio. Le rette godenti di questa proprietà formano dunque un complesso lineare.

Questo complesso lineare è quello ben conosciuto, che fu scoperto da MÖBIUS e CHASLES; ma il modo con cui ne abbiamo ora provata l'esistenza ci pare notevole per eleganza e semplicità.

8. Se O è esterno ai coni (Q), (Q'), il piano tangente in O alla quadrica del fascio passante per questo punto la taglierà in due rette reali notevolissime: ciascuna di esse si può infatti riguardare come tangente a quella quadrica in tutti i suoi punti (e non più nel solo punto O). Considerando dunque ciascuno di quei punti come polo d'una rotazione, si ha che ciascuna di quelle due rette gode della proprietà che, facendo rotare il corpo intorno ad essa, il momento U non varia ed il corpo è sempre in equilibrio se la retta si tien fissa. Se O è interno ad uno dei due coni (Q), (Q') quelle due rette diventano imaginarie.

Per ogni punto dello spazio passano due rette (reali od imaginarie) tali che tenendo fissa una di esse il corpo è sempre in equilibrio, comunque lo si sposti attorno alla retta stessa. Tali rette formano una congruenza quadratica appartenente al complesso lineare considerato precedentemente.

Vedremo più tardi (n^0 28) come esista realmente una porzione di spazio per ciascun punto della quale passano due rette reali aventi la proprietà detta. Tali rette chiameremo per brevità *assi* *d'equilibrio costante* [11]; indicheremo con Γ la congruenza quadratica da esse costituita e con L il complesso lineare trovato al n⁰ precedente, che contiene quella congruenza.

9. I due assi d'equilibrio costante $r_1\, r_2$ uscenti dal punto O godono di una proprietà notevole rispetto ai 4 assi statici corrispondenti ad O. In fatti si consideri il piano π tangente in O alla quadrica del nostro fascio passante per O, piano che vedemmo tagliare questa quadrica appunto in $r_1\, r_2$: essendo il tetraedro $PP'QQ'$ proprio coniugato rispetto a tutto il fascio ed in particolare rispetto a quella quadrica, i suoi spigoli opposti taglieranno π in coppie di punti coniugati armonici rispetto ad $r_1\, r_2$. Dunque:

I due assi d'equilibrio costante uscenti da un punto qualunque dello spazio sono coniugati armonici rispetto alle tre coppie di facce opposte del quadrispigolo determinato dai quattro assi statici corrispondenti al punto considerato.

Questa proposizione mostra come, conoscendo il complesso lineare L e gli assi statici corrispondenti ai vari punti dello spazio, si possa costruire la congruenza Γ degli assi d'equilibrio costante. Vedremo ora come anzi basti conoscere il complesso degli assi statici perchè questa congruenza (e quindi anche quel complesso lineare) sia determinata.

10. Le due rette $r_1\, r_2$ uscenti dal punto O e appartenenti ai due sistemi di generatrici della quadrica del fascio passante per O coincidono solo quando quella quadrica è un cono, cioè quando O sta sull'uno dei due coni (Q), (Q') del fascio. In questo caso, che appunto ci rimaneva ancora da considerare, la generatrice di quel cono nella quale coincidono $r_1\, r_2$ è evidentemente un asse statico, poichè congiunge O ad uno dei 4 punti P, P', Q, Q'. Viceversa se una delle due rette $r_1\, r_2$ della congruenza Γ uscenti da O è uno dei 4 assi statici corrispondenti ad O, la quadrica del fascio che la contiene sarà un cono e le due rette coincideranno (Lo stesso risulterebbe del resto dalla proposizione del n⁰ precedente). Dunque:

Per un punto tale che i due assi d'equilibrio costante passanti per esso coincidano, vale a dire per ogni punto della superficie focale della congruenza quadratica costituita dagli assi d'equilibrio costante,

---

(11) Questi assi non vanno confusi cogli *assi d'equilibrio* (*Gleichgewichtsaxen*) di Möbius, i quali sono tali che il corpo rigido *supposto libero* rimane in equilibrio rotando loro attorno.

e solo per ogni tal punto, quell'asse è un asse statico. — In altri termini: *il luogo geometrico di un punto, pel quale uno dei quattro assi statici corrispondenti è asse d'equilibrio costante, è la superficie focale della congruenza degli assi d'equilibrio costante.*

In generale una retta del complesso degli assi statici è asse statico per uno solo dei suoi punti ([12]). Ma una retta della congruenza quadratica Γ avendo, com'è noto, due fuochi, cioè essendo tangente in due punti alla superficie focale di Γ, sarà asse statico per entrambi questi punti; e sarà perciò retta doppia pel complesso degli assi statici. Dunque:

Ogni asse d'equilibrio costante è asse statico pei due punti in cui esso tocca la superficie focale della congruenza quadratica. Questa congruenza degli assi d'equilibrio costante è una congruenza doppia pel complesso degli assi statici.

È poi chiaro che ogni asse d'equilibrio costante, considerato come asse statico pei suoi due fuochi, corrisponde ad una posizione d'equilibrio indifferente pel corpo, supposto libero di muoversi attorno ad uno di questi.

11. Dal fatto che una quadrica del nostro fascio non può essere incontrata in punti reali da alcun'altra, segue che essa separa due porzioni dello spazio in cui rispettivamente U è maggiore o minore del valore che questa funzione assume nei punti della quadrica stessa. Applicando questo alla quadrica passante per O nell'ipotesi che essa sia rigata, e quindi le due rette $r_1\, r_2$ d'intersezione col piano π siano reali, noi vediamo che nel fascio delle rette giacenti in π e uscenti da O le $r_1\, r_2$ separano quelle, pei cui punti il valore di U è maggiore di quello assunto in O, da quelle pei cui punti è minore. Abbiamo così il seguente risultato, che completeremo più tardi:

Se per un punto dello spazio passano due assi reali d'equilibrio costante, essi separano quelle rette del loro fascio per le quali, tenute fisse, la posizione attuale del corpo è d'equilibrio stabile da quelle per cui essa è d'equilibrio instabile. — Invece per un punto pel quale non passano assi d'equilibrio costante (reali) il fascio corrispondente delle rette per cui, tenute fisse, la posizione attuale del corpo è d'equilibrio si compone tutto di rette per cui l'equilibrio è stabile, oppure tutto di rette per le quali l'equilibrio è instabile.

([12]) Quest'asserzione, di cui si potrebbe dubitare, si può dimostrare rigorosamente servendosi delle formule e dei ragionamenti che si esporranno in seguito (V. n° 18).

Se poi per un punto passano due assi d'equilibrio costante coincidenti, fatta astrazione da questa retta, accadrà lo stesso che nel secondo caso.

12. Oltre alla congruenza quadratica Γ di rette doppie del complesso di 6° grado degli assi statici, questo avrà comune col complesso lineare L un'altra congruenza quadratica: vogliamo vedere di quale proprietà godono le sue rette. Se il punto O è tale che il piano π tangente in O alla quadrica del fascio passante per esso contenga uno dei 4 assi statici [relativi] ad O, cioè contenga uno dei 4 punti P, P', Q, Q' senza che quella quadrica sia uno dei coni, questo punto sarà, in virtù di proposizioni viste, all'infinito [13]; e reciprocamente. In tal caso gli altri tre di quei 4 vertici saranno in un piano passante per O e perpendicolare alla direzione di quel punto all'infinito; ecc. ecc. Dunque:

Quegli assi statici pei quali la corrispondente rotazione del corpo è di mezzo giro (sicchè tenendoli fissi il corpo è attualmente in equilibrio) formano una congruenza quadratica. Se ad un punto dello spazio corrisponde un tal asse statico, gli altri tre assi statici stanno in un piano perpendicolare a quell'asse ed hanno per poli i vertici di un triangolo per cui il punto considerato è il punto delle altezze. Il primo asse statico è una bisettrice degli angoli dei due assi d'equilibrio costante uscenti dal punto considerato.

13. In un fascio (reale) di quadriche, in cui esistano quadriche imaginarie, qual'è appunto il nostro, non possono due dei 4 coni venir a coincidere senza degenerare nello stesso tempo in una coppia di piani (reali, oppure imaginari coniugati); perchè quando due coni vengono a coincidere in un cono non degenere i loro vertici, che erano coniugati rispetto alle quadriche del fascio, coincideranno in

---

[13] Noi escludiamo qui ed escluderemo sempre nel seguito il caso particolare in cui O sia appunto uno dei 4 vertici P, P', Q, Q', nel qual caso gli altri tre sono all'infinito in direzioni formanti una terna ortogonale. In tal caso il corpo si troverebbe già inizialmente in equilibrio, se il punto O è fisso; vale a dire il sistema di forze si ridurrebbe ad una risultante unica (passante per O): caso appunto che non vogliamo esaminare (almeno nel presente lavoro), sia per non dilungarci troppo, sia perchè esso fu studiato finora assai più che non il caso generale. Però il nostro metodo si presterebbe benissimo a questo esame: esso ci darebbe già, come si vede, la nota proposizione che il corpo passa da una posizione di equilibrio alle altre tre rotando di mezzo giro intorno agli assi di una terna ortogonale passante per O.

un punto comune a queste quadriche e che quindi dovrebbe pure appartenere alle quadriche imaginarie del fascio, il che non può essere, poichè quel punto è reale ([14]). Ora nel nostro caso, ricordando le denominazioni introdotte, possono coincidere i coni (P) e (Q) oppure (Q) e (Q'), oppure (Q') e (P'). Nel 1° caso e nel 3° coincidendo un cono reale con un cono imaginario, essi si ridurranno ad una coppia di piani imaginari coniugati, aventi quindi una retta reale comune: una delle due serie di quadriche ellittiche sarà scomparsa e ne rimarrà ancor una, oltre alla serie di quadriche rigate. Nel 2° caso invece i due coni reali $(Q), (Q')$ coincideranno in una coppia di piani reali: la serie delle quadriche rigate del fascio scomparirà e questo conterrà solo più quadriche ellittiche formanti due serie, di cui l'una compresa entro una coppia di diedri opposti formati da quella coppia di piani, e l'altra compresa entro l'altra coppia. Di qui segue che i due punti P, P' si troveranno in due diedri adiacenti di quella coppia di piani; il che risulta anche direttamente dal fatto che essi devono essere separati armonicamente da questi piani. Applicando inoltre le proposizioni prima viste, avremo:

Se ad un punto dello spazio, tenuto fisso, corrispondono più di quattro posizioni d'equilibrio del corpo, gliene corrisponderanno infinite, i cui poli avranno per luogo una retta ed i cui assi statici formeranno perciò un fascio. Inoltre vi saranno ancora in generale due posizioni isolate d'equilibrio e gli assi statici corrispondenti saranno in un piano perpendicolare al piano del fascio, mentre la congiungente i due poli corrispondenti avrà direzione normale alla retta luogo dei poli di quel fascio. Quest'ultima retta è parallela al piano dei due assi d'equilibrio costante uscenti dal punto considerato, cioè al piano che corrisponde a questo punto rispetto al complesso lineare L; *questo piano taglia il fascio di assi statici in un asse statico che pre-*

([14]) Questo concetto può estendersi facilmente allo spazio ad n dimensioni e fornisce una dimostrazione sintetica notevole dell'importante teorema di WEIERSTRASS: *il determinante di un fascio di forme quadratiche (ad un numero qualunque di variabili) in cui esista una forma definita ha tutti i divisori elementari del 1° grado.* In tale dimostrazione si osservi anzitutto che i vertici dei coni di un fascio di quadriche, in cui esista una quadrica imaginaria, sono tutti reali, poichè se due di essi fossero imaginari coniugati la loro congiungente taglierebbe quella quadrica in due punti imaginari coniugati e armonici rispetto a quelli, il che non può essere, per una nota proprietà dei gruppi armonici. Con ciò resta pure dimostrato che tutti quei divisori elementari sono reali, cioè che tutti i coni del fascio di quadriche hanno equazioni reali, se si osserva che non possono esservi due tali coni i quali siano imaginari coniugati, ma col vertice comune reale.

senta le particolarità considerate al n⁰ 12. — Gli assi statici del fascio corrispondono a posizioni d'equilibrio della stessa specie, e i due assi statici isolati ad equilibrio rispettivamente delle altre due specie. Se gli assi statici del fascio corrispondono ad equilibrio indifferente, allora pel punto considerato non passano certamente assi d'equilibrio costante reali; in caso contrario può accadere che passino tali assi reali ed i loro angoli saranno allora bisecati dal piano del fascio di assi statici e dal piano dei due assi statici isolati.

Vedremo poi (n^0 23) che i punti dello spazio a cui corrispondono infinite posizioni d'equilibrio del corpo costituiscono un'ellisse ed un'iperbole.

14. Se nelle ipotesi del n^0 precedente la coppia di piani del fascio di quadriche è reale, esiste nel fascio questa sola quadrica rigata e noi possiamo supporre che il punto O cada appunto su uno dei due piani: abbiamo allora un'eccezione all'ultimo enunciato, perocchè per O passerà un fascio di assi d'equilibrio costante posti in quel piano e costituenti nello stesso tempo un fascio di assi statici corrispondenti ad O. Viceversa se per O passa un fascio di assi d'equilibrio costante è chiaro (n^0 8) che saremo appunto in quel caso. Dunque:

Se per un punto dello spazio esiste un fascio di assi statici corrispondenti ad equilibrio indifferente ed esiste inoltre un asse d'equilibrio costante reale, questo apparterrà necessariamente a quel fascio; anzi tutto il fascio di assi statici sarà composto di assi d'equilibrio costante. Viceversa ogni fascio di assi d'equilibrio costante sarà un fascio di assi statici corrispondenti al suo centro. Per questo punto passeranno ancora due assi statici corrispondenti, ecc. ecc., come al numero precedente.

Vedremo più tardi che esistono sempre in generale nello spazio due tali fasci e quindi anche due punti aventi le dette proprietà (V. n^0 28).

Oltre ai casi particolari considerati finora ne rimarrebbero altri più particolari da considerare, come quelli in cui il fascio di quadriche comprende due coppie di piani oppure un piano doppio, casi ai quali il nostro metodo si presterebbe colla massima facilità. Ma appunto per questo ed anche per ragione di brevità noi li tralasceremo; tanto più che in generale non esistono punti dello spazio per cui tali casi più particolari si presentino.

II.

15. Finora le nostre ricerche si rivolsero principalmente agli assi passanti per uno stesso punto arbitrario dello spazio ed alle loro relazioni col corpo dato. Ora dovremo invece occuparci con maggior cura dei sistemi formati nello spazio da quelli notevoli tra gli assi stessi, e particolarmente del complesso degli assi statici e della congruenza degli assi d'equilibrio costante. Perciò mentre prima noi prendevamo l'origine del sistema di riferimento nel punto che volevamo considerare, d'or innanzi supporremo fissato ad arbitrio un sistema di riferimento il quale non varierà nè col muoversi del corpo (come prima), nè col variare del punto considerato.

Nelle ipotesi del n^0 1, se nell'espressione (1) del momento del sistema di forze rispetto all'origine O si sostituiscono alle coordinate x, y, z di un punto del corpo i valori che esse hanno dopo una rotazione $(x_0\, x_1\, x_2\, x_3)$ attorno ad O, cioè i valori

$$(5)\quad \begin{cases} x' = \;(x_0^2+x_1^2-x_2^2-x_3^2)\,x+2\,(x_1x_2-x_0x_3)\,y+2\,(x_1x_3+x_0x_2)\,z \\ y' = 2(x_1x_2+x_0x_3)\,x+(x_0^2-x_1^2+x_2^2-x_3^2)\,y+2\,(x_2x_3-x_0x_1)\,z \\ z' = 2\,(x_1x_3-x_0x_2)\,x+2\,(x_2x_3+x_0x_1)\,y+(x_0^2-x_1^2-x_2^2+x_3^2)\,z\,, \end{cases}$$

si ottiene per espressione di quel momento *dopo* questa rotazione la (3), dove i coefficienti a_{ik} hanno i seguenti valori, che solo ora c'importano [15]:

$$(6)\quad \begin{cases} \qquad\qquad a_{00}=\Sigma(Xx+Yy+Zz) \\ a_{11}=\Sigma(Xx-Yy-Zz),\; a_{22}=\Sigma(Yy-Zz-Xx),\; a_{33}=\Sigma(Zz-Xx-Yy), \\ a_{01}=a_{10}=\Sigma(Zy-Yz),\; a_{02}=a_{20}=\Sigma(Xz-Zx),\; a_{03}=a_{30}=\Sigma(Yx-Xy), \\ a_{23}=a_{32}=\Sigma(Zy+Yz),\; a_{31}=a_{13}=\Sigma(Xz+Zx),\; a_{12}=a_{21}=\Sigma(Yx+Xy). \end{cases}$$

Questi valori sono costanti note, poichè (non è male ripeterlo) x, y, z sono le coordinate di un punto del corpo nella sua posizione iniziale riferito al sistema cartesiano fisso. Ma se vogliamo considerare rotazioni non più intorno all'origine O, ma intorno ad un punto qualunque O' dello spazio, di coordinate a, b, c, noi potremo anzitutto determinare ancora ogni tal rotazione mediante 4 numeri x_i legati dalla relazione

$$(2)\qquad x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2=1,$$

---

[15] V. SIACCI, loc. cit., § 1.

e ciò precisamente nello stesso modo indicato al n⁰ 1, scegliendo O' come origine di un sistema di assi paralleli agli assi fissi: il punto avente rispetto a questi assi nuovi per coordinate $x_1 : x_0$, $x_2 : x_0$, $x_3 : x_0$ sarà il *polo* di quella rotazione (e starà sul suo asse); ma noi considereremo anche come *imagine* della rotazione o della posizione che essa fa prendere al corpo il punto avente quei rapporti per coordinate rispetto agli assi fissi, sicchè per ogni rotazione intorno ad O' il segmento (dell'asse di rotazione) che va da O' al polo sarà equipollente al segmento che va da O all'imagine della rotazione, cioè al raggio vettore di quest'imagine. Ogni rotazione del corpo (e la posizione che questo prende in conseguenza) sarà così determinata da due punti: il centro di rotazione ed il polo, ovvero l'imagine della rotazione. Ciò posto l'espressione del momento del sistema rispetto al punto $O'(a, b, c)$ dopo una rotazione $(x_0\, x_1\, x_2\, x_3)$ del corpo intorno a questo punto sarà data da

$$U' = \Sigma\, a'_{ik}\, x_i\, x_k\,,$$

dove a'_{ik} si ottiene da a_{ik} ponendo in luogo di x, y, z rispettivamente $x - a, y - b, z - c$. Facendo effettivamente questi cambiamenti nelle formole (6) e sostituendo i valori così ottenuti delle a'_{ik} nella espressione di U', ponendo inoltre per brevità

$$\Sigma X = L,\ \Sigma Y = M,\ \Sigma Z = N, \tag{7}$$

e ritenendo sempre le a_{ik} definite dalla (6), si otterrà facilmente

$$\left\{\begin{aligned} U' = \Sigma a_{ik} x_i x_k & - a(Lx_0^2 + Lx_1^2 - Lx_2^2 - Lx_3^2 - 2Nx_0x_2 + 2Mx_0x_3 + 2Nx_1x_3 + 2Mx_1x_2) \\ & - b(Mx_0^2 - Mx_1^2 + Mx_2^2 - Mx_3^2 - 2Lx_0x_3 + 2Nx_0x_1 + 2Lx_1x_2 + 2Nx_2x_3) \\ & - c(Nx_0^2 - Nx_1^2 - Nx_2^2 + Nx_3^2 - 2Mx_0x_1 + 2Lx_0x_2 + 2Mx_2x_3 + 2Lx_1x_3). \end{aligned}\right. \tag{8}$$

16. Poniamo ora che si cerchino le posizioni d'equilibrio del corpo tenendone fisso il punto arbitrario O'. Esse corrisponderanno a $dU' = 0$, ossia in forza della (2), a

$$\frac{\partial U'}{\partial x_i} - 2u'\, x_i = 0, \qquad (i = 0, 1, 2, 3).$$

Le quattro equazioni qui compendiate ci mostrano che il punto (x_i) imagine di una posizione d'equilibrio è vertice di un cono del fascio di quadriche

$$U' - u'\, \Sigma x_i^2 = 0, \tag{9}$$

fascio che congiunge la quadrica $U' = 0$ definita dalla (8) alla sfera S di centro O e raggio $\sqrt{-1}$. Ora la (8) ci mostra che variando il punto $O'(a, b, c)$ nello spazio, la corrispondente quadrica $U' = 0$ descrive un sistema lineare *tre volte* infinito di quadriche (*lineare* in quanto queste si considerano come luoghi di punti), il quale è rappresentato *linearmente* dallo spazio dei punti O': noi indicheremo con (V) questo sistema di quadriche. Da ciò segue poi che il fascio di quadriche rappresentato dalla (9) descrive col variare del punto O' un sistema lineare *quattro volte* infinito di quadriche, che noi indicheremo con (W). Noi abbiamo così il seguente metodo per trovare le 4 posizioni d'equilibrio corrispondenti ai vari punti dello spazio e per costruire in conseguenza il complesso degli assi statici:

Per avere le 4 posizioni d'equilibrio corrispondenti ad un punto qualunque O′ *dello spazio considerato come fisso si congiunga la quadrica corrispondente ad* O′ *nel sistema* (V) *alla sfera fissa* S: *il fascio di quadriche così ottenuto conterrà in generale* 4 *coni i cui vertici rappresenteranno quelle posizioni d'equilibrio; perocchè conducendo da* O′ *segmenti equipollenti a quelli che vanno dal punto fisso* O *a quei* 4 *vertici, i loro estremi saranno i poli di quelle* 4 *posizioni e quindi le loro rette saranno i* 4 *assi statici corrispondenti.*

17. Introduciamo le abbreviazioni seguenti:

$$(10)\qquad \begin{cases} \alpha_0 = Lx_1 + Mx_2 + Nx_3 \\ \alpha_1 = -Lx_0 + Nx_2 - Mx_3 \\ \alpha_2 = -Mx_0 - Nx_1 + Lx_3 \\ \alpha_3 = -Nx_0 + Mx_1 - Lx_2, \end{cases}$$

da cui segue

$$(11)\qquad x_0\alpha_0 + x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = 0.$$

Allora le 4 equazioni

$$\frac{1}{2}\frac{\partial U'}{\partial x_i} - u' x_i = 0,$$

in cui U' è definito dalla (8) diverranno

$$(12)\qquad \begin{cases} \Sigma a_{0k}\, x_k + a\alpha_1 + b\alpha_2 + c\alpha_3 - u'x_0 = 0 \\ \Sigma a_{1k}\, x_k - a\alpha_0 + b\alpha_3 - c\alpha_2 - u'x_1 = 0 \\ \Sigma a_{2k}\, x_k - a\alpha_3 - b\alpha_0 + c\alpha_1 - u'x_2 = 0 \\ \Sigma a_{3k}\, x_k + a\alpha_2 - b\alpha_1 - c\alpha_0 - u'x_3 = 0. \end{cases}$$

Esse ci dànno quei punti (x_i) che sono vertici di coni del sistema (W). Ora moltiplicando queste 4 equazioni rispettivamente per α_0,

α_1, α_2, α_3 e sommandole, si ha, tenendo conto della (11),

(13) $$\Sigma a_{ik}\, \alpha_i\, x_k = 0.$$

Quelle 4 equazioni presentano dunque la particolarità che da esse si possono eliminare le 4 variabili a, b, c, u'. La (13), in cui le α_i s'intendano espresse dalle (10), rappresenta una quadrica. Abbiamo dunque la seguente importante proposizione:

Se per ciascun punto dello spazio si considerano i poli delle 4 corrispondenti posizioni d'equilibrio e per un punto arbitrario dello spazio O *si conducono segmenti equipollenti a quelli che congiungono ciascun punto ai 4 poli corrispondenti, i loro estremi hanno per luogo una quadrica.*

La definizione che così si ha di questa quadrica mostra che quando il punto O si muove nello spazio, essa non fa altro che muoversi con esso per traslazioni, senza mutare affatto di forma. La sua considerazione ha molta importanza nella teoria di cui ci occupiamo. Noi chiameremo F quella quadrica. La sua equazione (13) ha coefficienti reali; si può anzi dimostrare con un semplice ragionamento geometrico che *la quadrica* F *è sempre reale e rigata,* fatto su cui avremo da appoggiarci in seguito ([16]).

18. Vogliansi trovare nel complesso degli assi statici quegli assi statici che hanno una data direzione (e corrispondono, come noi sempre supponiamo, a punti a distanza finita). Dal punto O dovremo

---

([16]) Che la quadrica F sia reale risulta già dalla proposizione precedente, ricordando che per ciascun punto dello spazio considerato come fisso i poli delle 4 corrispondenti posizioni d'equilibrio sono reali. Ma possiamo anche provarlo e dimostrare nello stesso tempo il fatto enunciato che F è rigata mediante le seguenti considerazioni geometriche. Le equazioni (10) stabiliscono, come si può verificare immediatamente, tra i punti di coordinate omogenee x_i e α_i una corrispondenza projettiva involutoria, dotata di due rette luoghi di punti uniti r, r' le cui equazioni sono appunto le (16) del seguito di questo lavoro e mostrano che r, r' sono rette imaginarie coniugate e sghembe. La (13) poi, la quale esprime che il punto (x_i) appartiene ad F dice pure che i due punti (x_i) ed (α_i) sono coniugati rispetto alla quadrica $\Sigma a_{ik}\, x_i\, x_k = 0$; laonde F si può definire come il luogo delle coppie di punti coniugati rispetto a questa quadrica e separati armonicamente dalle rette r, r'. Di qui segue che F è reale e che rispetto ad essa r, r' sono rette polari reciproche: quindi le 2 coppie di punti in cui F è tagliata da r, r' sono congiunte tra loro da 4 generatrici della superficie. Ma poichè r, r' sono imaginarie coniugate, ai due punti imaginari in cui r taglia F sono coniugati rispettivamente i due punti imaginari in cui r' taglia F e quindi le due rette che congiungono quelli rispettivamente a questi sono reali. Dunque la quadrica reale F ha due generatrici reali ed è quindi una quadrica rigata.

condurre una parallela a quella direzione: essa incontrerà la quadrica F in due punti, che supporremo anzitutto reali, e che rappresenteranno due serie di assi statici. Sia (x_i) un punto di F considerato come imagine di assi statici: per esso verificandosi la equazione (13), le (12) si ridurranno a sole tre distinte e determineranno a, b, c (ed u') in funzioni lineari di un parametro, p. e. di u' (funzioni che determineremo più tardi). Dunque il luogo dei punti $O'(a, b, c)$ per cui il punto fisso (x_i) di F è imagine di una posizione d'equilibrio, cioè di un asse statico, è una retta. Ai punti O' di questa retta corrisponderanno nel sistema (V) di quadriche mediante la (8) un fascio di quadriche, ciascuna delle quali è congiunta ad S mediante un fascio contenente un cono col vertice in (x_i); e gl'infiniti coni di vertice (x_i) così ottenuti formano a loro volta un fascio (come si scorge considerando due soli di essi ed il fascio che li congiunge, fascio che apparterrà necessariamente al sistema lineare doppiamente infinito di quadriche che congiunge S al primo fascio di quadriche considerato). Poichè F è rigata, si può sempre circoscriverle da O un cono reale, il quale separerà quelle rette uscenti da O che tagliano realmente F da quelle che non la tagliano. Dunque:

Per un punto qualunque O *esce un cono quadrico (circoscritto alla corrispondente quadrica* F) *le cui rette esterne uscenti da* O *dànno le direzioni di tutti gli assi statici, mentre le rette interne non sono parallele ad alcun asse statico. In altri termini esiste sul piano allo infinito una conica reale (la conica all'infinito di quel cono) pei cui punti interni non passano assi statici. Invece per ciascun punto allo infinito esterno a quella conica passano due fasci di assi statici paralleli corrispondenti rispettivamente ai punti di due linee rette e (aventi i poli su due parallele a queste rette, cioè) corrispondenti rispettivamente a due ampiezze di rotazione costanti. Per ciascun punto poi di quella conica i due fasci di assi statici che ne escono sono coincidenti.*

In generale è chiaro che le due rette luoghi dei punti a cui corrispondono assi statici aventi una data direzione non stanno in un piano, ed a maggior ragione che i due fasci corrispondenti di assi statici paralleli sono distinti; sicchè nel complesso degli assi statici una retta qualunque è in generale asse statico per uno solo dei suoi punti. Però quei due fasci di rette del complesso passanti per uno stesso punto all'infinito avranno comune una retta, che sarà doppia pel complesso e sarà asse statico per entrambi i punti in cui essa incontra le due rette dianzi considerate. Ma questa retta doppia dovrà necessariamente appartenere alla congruenza quadratica Γ, che noi vedemmo (n^0 10) comporsi di rette doppie del complesso degli assi statici. Quindi poichè per ogni punto all'infinito passa una sola retta di Γ, il piano all'infinito conterrà un fascio di rette di Γ: risultato che verrà confermato nello studio diretto di questa congruenza ([17]).

19. Nelle cose esposte ultimamente noi supponevamo sempre che gli assi statici considerati corrispondessero a punti a distanza finita. Senza questa osservazione si potrebbe pensare alla seguente obbiezione: in generale un sistema lineare 4 volte infinito di quadriche gode della proprietà che ogni punto dello spazio è doppio per una quadrica del sistema; or com'è che pel nostro sistema (W) abbiamo trovato al n^0 17 che i punti doppi di quadriche del sistema riempiono, non già tutto lo spazio, ma solo la quadrica F? Per rispondere a quest'obbiezione ricordiamo che noi siamo giunti a quel risultato mediante eliminazione dalle equazioni (12). Ora se in queste alle coordinate cartesiane *non omogenee* a, b, c (ed al parametro u') noi sostituiamo i rapporti $a:d$, $b:d$, $c:d$ (e $u':d$), in modo che d, a, b, c diventino le coordinate *omogenee* dello stesso punto O' prima considerato, e moltiplichiamo le (12) per d (sicchè esse assumeranno la stessa forma di prima, colla sola differenza che le diverse somme saranno ora moltiplicate per d), indi operiamo su esse come prima, otterremo in luogo della (13)

$$d \Sigma\, a_{ik}\, \alpha_i\, x_k = 0 .$$

Quindi se il punto (x_i) non sta sulla quadrica F sarà $d = 0$, vale a dire il punto O' sarà all'infinito; e viceversa.

Vediamo dunque anzitutto che veramente noi avevamo trascurato soltanto gli assi statici corrispondenti ai punti all' infinito, assi che riempiono 4 volte, come vedremo, il piano all'infinito, e che certamente non hanno vera importanza. Se poi nelle equazioni (12) trasformate nel modo detto poniamo $d = 0$, corrispondentemente all'ipotesi che il punto O' sia all'infinito, esse equivarranno solo

---

([17]) In questo lavoro noi ci siamo occupati solo di una particolare congruenza contenuta nel complesso degli assi statici, cioè di Γ, perchè essa presenta molta importanza dai due punti di vista geometrico e meccanico. Però sarebbe forse interessante di esaminare anche quella particolare congruenza che è costituita dagli assi statici paralleli alle generatrici del cono circoscritto da O alla quadrica F.

più a tre distinte, *qualunque sia il punto* (x_i), e, dato questo, determineranno univocamente i rapporti $a:b:c:u'$, e quindi la direzione del punto all'infinito O'. Quelle equazioni si riducono evidentemente ad esprimere che (x_i) è punto doppio per la quadrica

$$V_0 + u'\Sigma x_i^2 = 0\,, \tag{14}$$

essendo

$$\left\{\begin{aligned} V_0 = {} & a(Lx_0^2 + Lx_1^2 - Lx_2^2 - Lx_3^2 - 2Nx_0x_2 + 2Mx_0x_3 + 2Nx_1x_3 + 2Mx_1x_2) \\ & + b(Mx_0^2 - Mx_1^2 + Mx_2^2 - Mx_3^2 - 2Lx_0x_3 + 2Nx_0x_1 + 2Lx_1x_2 + 2Nx_2x_3) \\ & + c(Nx_0^2 - Nx_1^2 - Nx_2^2 + Nx_3^2 - 2Mx_0x_1 + 2Lx_0x_2 + 2Mx_2x_3 + 2Lx_1x_3)\,. \end{aligned}\right. \tag{15}$$

L'equazione $V_0 = 0$ rappresenta, col variare dei rapporti di a, b, c, le quadriche di un sistema lineare doppiamente infinito contenuto in (V), e che noi rappresenteremo con (V_0). Facendo anche variare u' la (14) rappresenta le quadriche di quel sistema lineare triplamente infinito (T) che congiunge (V_0) alla sfera S. Noi abbiamo visto che ogni punto dello spazio (x_i) è doppio per una quadrica di questo sistema triplamente infinito (T); d'altronde è chiaro che questo non si compone tutto di coni: dunque esso dovrà contenere ∞^2 coppie di piani, sì che per ogni punto passi una retta doppia di una tal coppia. Ciò conduce a pensare che il sistema (T) possa esser costituito da quadriche passanti per due rette fisse sghembe, giacchè in un sistema triplamente infinito di quadriche così definito non vi sono coni, ma bensì ∞^2 coppie di piani aventi per rette doppie le rette della congruenza lineare che ha per direttrici quelle due rette fisse. Ed effettivamente si può verificare che tutte le quadriche di (T), cioè rappresentate dall'equazione (14), contengono le due rette r, r' definite rispettivamente da due delle equazioni

$$\left\{\begin{aligned} \varrho x_0 + Lx_1 + Mx_2 + Nx_3 &= 0 \\ -Lx_0 + \varrho x_1 + Nx_2 - Mx_3 &= 0 \\ -Mx_0 - Nx_1 + \varrho x_2 + Lx_3 &= 0 \\ -Nx_0 + Mx_1 - Lx_2 + \varrho x_3 &= 0\,, \end{aligned}\right. \tag{16}$$

nelle quali per ϱ si pongano successivamente le due radici della equazione

$$\varrho^2 = -(L^2 + M^2 + N^2)\,. \tag{17}$$

Queste equazioni (16) e (17) mostrano che quelle due rette r, r' sono imaginarie coniugate e di 2^a specie, vale a dire in posizione sghemba. — Ad ogni punto O' all'infinito corrisponde in (V) una quadrica di (V_0), la quale è congiunta ad S mediante un fascio appartenente a (T) in cui non vi sono coni propriamente detti, ma solo due coppie di piani (imaginari coniugati) le cui rette doppie si appoggiano su r, r'.

C'importava giungere a questi risultati affine di poter escludere nel seguito quelle soluzioni estranee che proverrebbero da assi statici impropriamente detti, cioè situati all'infinito.

20. Proponiamoci, ad esempio, di trovare la curva che sulla quadrica F è formata dalle imagini delle quaterne di assi statici corrispondenti ai vari punti O' (a distanza finita) di una retta qualunque data g. A tal fine notiamo che, in causa della corrispondenza lineare tra i punti $O'(a, b, c)$ dello spazio e le quadriche del sistema (V), ai punti di g corrisponderanno in questo sistema le quadriche di un fascio: i vertici dei coni degl'infiniti fasci che congiungono ogni quadrica di questo alla quadrica fissa S sono appunto le imagini degli assi statici corrispondenti ai punti di g, e costituiscono la curva Jacobiana della rete che congiunge il primo fascio di quadriche ad S. La curva Jacobiana di una rete di quadriche è, come si sa, del 6^0 ordine. Ma nel nostro caso quel fascio contiene una quadrica di (V_0) (corrispondente al punto all'infinito di g), la quale è congiunta ad S (n^0 19) da un fascio di quadriche contenente due coppie di piani: le due rette doppie di queste coppie faranno parte della curva Jacobiana. Escludendole, e notando che esse saranno in posizione sghemba, si avrà come parte rimanente di quella curva una curva sghemba di 4^0 ordine *e 1^a specie* (18). Dunque:

Le posizioni d'equilibrio o gli assi statici corrispondenti ai punti di una retta hanno per imagini sulla quadrica definita nel teorema del n^o 16 i punti di una quartica di 1^a specie.

Consideriamo un piano arbitrario σ passante per la retta arbitraria g. Il piano condotto da O parallelamente a σ taglia la quartica di F, che vedemmo rappresentare gli assi statici corrispondenti ai punti di g, in 4 punti i quali saranno le imagini di quelli tra questi assi statici che stanno sul piano σ. Vediamo così che *su*

(18) In generale quando la curva di 6^0 ordine generata nel modo noto da tre spazi sovrapposti collineari viene a contenere due rette *sghembe*, la rimanente curva di 4^o ordine è *di 1^a specie.* Veggasi ad esempio: NÖTHER, *Eindeutige Raumtransformationen* (Math. Ann., III, p. 565). CREMONA, *Ueber die Abbildung algebraischer Flächen* (Göttinger Nachr., 1871, Nr. 5; oppure Math. Ann., IV, p. 218).

ogni piano vi sono quattro assi statici corrispondenti a punti di una sua retta data. Donde segue, osservando che per ogni punto di g passano pure 4 assi statici corrispondenti al punto stesso:

Gli assi statici corrispondenti ai punti di una retta formano una rigata di 8^o *grado avente quella retta per retta quadrupla.*

21. Possiamo ora determinare assai facilmente il grado del complesso degli assi statici. A tal fine dovremo trovare quanti assi statici stanno in un dato piano σ e passano per un suo punto G. Nel piano σ stanno infiniti assi statici: conduciamo da G la retta g che va al punto a cui corrisponde uno di quegli assi e la parallela g' all'asse stesso; avremo nel fascio di rette $G\sigma$ una corrispondenza tale tra g e g' che, ove due rette corrispondenti coincidano, e solo allora, esse dànno luogo ad un asse statico appartenente a quel fascio. Ora, data g, vi sono, come vedemmo dianzi (n^0 20), nel piano σ 4 assi statici corrispondenti a punti di g, e quindi 4 rette g' parallele a questi assi condotte da G. Viceversa, data g', gli assi statici paralleli ad essa corrispondono ai punti di due diverse rette (n^0 18), le quali tagliano σ in due punti congiunti a G mediante 2 rette g corrispondenti a g'. Dunque la corrispondenza considerata tra g, g' è una corrispondenza (4,2). D'altronde la sua natura ci mostra che in generale essa non ha coincidenze multiple; dunque, pel principio di corrispondenza, vi saranno $4+2=6$ rette in cui coincidono due corrispondenti g, g', ossia 6 assi statici appartenenti al fascio considerato $G\sigma$.

Il complesso degli assi statici è di sesto grado.

Considerando adunque gli assi statici passanti per un punto dato, essi formeranno un cono di 6^0 ordine passante pei 4 assi statici che corrispondono a quel punto. Ne segue tosto che: *I punti dello spazio ai quali corrispondono assi statici passanti per un punto fisso formano una curva d'ordine* 10 *avente un punto quadruplo in quel punto fisso; le tangenti alla curva in questo punto sono i 4 assi statici corrispondenti ad esso.*

22. Nel considerare gli assi statici che hanno una data direzione, abbiamo incontrato (n^0 18) certe rette tali che per tutti i punti di ciascuna di esse uno dei 4 assi statici corrispondenti ha direzione fissa (e l'ampiezza di rotazione corrispondente costante). Rivolgeremo ora la nostra attenzione su queste rette, e così giungeremo per una via affatto nuova ad uno dei risultati più celebri dell'astatica.

Tali rette formano una congruenza, che indicheremo con Λ, e che è evidentemente del 4⁰ ordine, perocchè ad un punto qualunque dello spazio corrispondono 4 assi statici e quindi per esso passano 4 rette di Λ luoghi dei punti a cui corrispondono assi statici rispettivamente paralleli a quelli ed aventi la stessa ampiezza di rotazione. Gli assi statici paralleli corrispondenti ai punti di una retta di Λ hanno tutti per imagine uno stesso punto della quadrica F, punto che si può considerare adunque come imagine di quella retta di Λ: questa congruenza è così rappresentata univocamente sulla quadrica F. Orbene, proponiamoci anzitutto di trovare le equazioni di quella retta di Λ che ha per imagine un dato punto (x_i) di F (od in altri termini, che corrisponde ad una data direzione di asse statico e ad una data ampiezza di rotazione corrispondente, direzione ed ampiezza legate dall'equazione (13)). Le a, b, c indicando le coordinate di un punto qualunque di quella retta, avranno luogo le equazioni (12), di cui solo 3 saranno indipendenti, in forza della (13). Ora dalle (12) possiamo eliminare facilmente b e c moltiplicandole rispettivamente per α_1, $-\alpha_0$, $-\alpha_3$, α_2 e sommando; si ha così

$$\varphi_1 + a\,\Sigma\,\alpha_i^2 + u'\,(-x_0\,\alpha_1 + x_1\,\alpha_0 + x_2\,\alpha_3 - x_3\,\alpha_2) = 0\,,$$

dove φ_1 (e così in seguito φ_2, φ_3) indica una certa forma quadratica nelle x_i, che non c'importa sviluppare. Sostituendo in quest'equazione alle α le loro espressioni (10) e scrivendo anche le due equazioni ottenute operando in modo analogo, avremo

$$)\quad\left\{\begin{aligned} \Sigma\alpha_i^2\cdot a &= -\varphi_1 - u'(Lx_0^2 + Lx_1^2 - Lx_2^2 - Lx_3^2 - 2Nx_0x_2 + 2Mx_0x_3 + 2Nx_1x_3 + 2Mx_1x \\ \Sigma\alpha_i^2\cdot b &= -\varphi_2 - u'(Mx_0^2 - Mx_1^2 + Mx_2^2 - Mx_3^2 - 2Lx_0x_3 + 2Nx_0x_1 + 2Lx_1x_2 + 2Nx_2x \\ \Sigma\alpha_i^2\cdot c &= -\varphi_3 - u'(Nx_0^2 - Nx_1^2 - Nx_2^2 + Nx_3^2 - 2Mx_0x_1 + 2Lx_0x_2 + 2Mx_2x_3 + 2Lx_1x \end{aligned}\right.$$

Queste equazioni (nei cui primi membri in luogo di $\Sigma\alpha_i^2$ si potrebbe in forza delle (10) mettere $L^2 + M^2 + N^2$) rappresentano appunto la retta cercata di Λ, esprimendo le coordinate di un suo punto qualunque in funzione di un parametro u'. Ciò che c'importa considerare sovratutto in esse sono quelle tre forme quadratiche nelle x_i che nei secondi membri moltiplicano appunto u' (forme che già comparivano nella (8)): esse saranno evidentemente proporzionali ai coseni direttivi di quella retta. Ora esse si ottengono immediatamente dalle tre quantità L, M, N applicando a queste la sostituzione ortogonale *inversa* della (5). D'altronde L, M, N in causa delle (7) sono proporzionali ai coseni direttivi dell'asse principale del nostro sistema di forze, asse che non muta direzione quando si fa muovere il corpo. Se g è quella retta di Λ e si dà al corpo intorno ad un punto qualunque fisso O' di g, la rotazione rappresentata da (x_i), il corpo verrà in posizione d'equilibrio, cioè il sistema di forze verrà a ridursi ad una risultante unica (parallela sempre alla direzione fissa dell'asse principale) passante per O'. E poichè le formule (5) si applicano appunto a quella rotazione (finchè si tratta solo di trasformare *direzioni*), così l'osservazione precedente ci dice che se poi si fa la rotazione inversa intorno ad O', cioè si riporta il corpo alla posizione iniziale, quella risultante unica diverrà appunto la retta g. Concludiamo dunque che *la congruenza Λ è costituita da quelle rette del corpo nella sua posizione iniziale, le quali con vari movimenti di quello diventano risultanti uniche del sistema di forze.*

Questo risultato si poteva anche ottenere senza calcoli, applicando la nota proposizione, che rotazioni di uguali ampiezze intorno ad assi paralleli equivalgono ad una qualunque di esse seguita da traslazioni.

23. Ottenuta così una nuova definizione della congruenza Λ, noi l'applicheremo insieme con la primitiva e coi metodi finora usati a trovare la vera costituzione *geometrica* (e non più *meccanica*) di Λ. Sia ancora g una retta qualunque di Λ : come già dicemmo al n^0 18, ad ogni suo punto O' corrisponde nel sistema (V) una quadrica di un determinato fascio corrispondente a g, e questa quadrica è congiunta ad S mediante un fascio, di cui un cono ha il vertice nel punto (x_i) di F. Variando O' su g questo cono quadrico conserva questo vertice ma descrive un certo fascio, in cui vi saranno, com'è noto, 3 coppie di piani. L'una di queste coppie si compone dei due piani imaginari-coniugati che congiungono il punto (x_i) alle due rette r, r' ; essa appartiene al sistema (T) di quadriche e corrisponde al punto all'infinito di g (n^0 19). Le altre due coppie di piani corrisponderanno a punti a distanza finita di g e non apparterranno a (T): ma i punti doppi di quadriche del sistema 4 volte infinito (W) non appartenenti al sistema triplamente infinito (T) contenuto in questo stanno sempre, come vedemmo, sulla quadrica rigata F; dunque le rette doppie di quelle due coppie di piani sono le due generatrici di F che passano pel punto (x_i). Nel fascio di coni le 3 coppie di piani hanno dunque le rette doppie reali, ma la prima coppia è imaginaria: quindi le 4 rette comuni al fascio sono imaginarie, e sarà reale quella sola coppia che si compone dei piani congiungenti quelle tra queste 4 rette che sono imaginarie coniugate. Notando ancora che le generatrici di F formano due sistemi ben distinti, noi vediamo che la

congruenza $\varLambda$ ha due curve focali, le quali sono i luoghi dei punti ai quali corrispondono fasci di assi statici, cioè ai quali, considerati come fissi, corrispondono infinite posizioni d'equilibrio del corpo; l'una di quelle curve è luogo di quei punti per cui le infinite posizioni d'equilibrio sono d'equilibrio indifferente, l'altra luogo di quelli per cui queste posizioni sono d'equilibrio stabile oppure instabile (V. n⁰ 13).

Cerchiamo ora che cosa sono quelle due curve focali. Anzitutto poichè esse non hanno punti comuni e per ogni punto dello spazio passano solo 4 rette di $\varLambda$, cioè 4 rette che le taglino entrambe, e inoltre la loro definizione geometrica mostra che esse devono essere dello stesso ordine, è chiaro che esse saranno del 2^0 ordine, cioè saranno due coniche. Ma possiamo ritrovare questo e vedere nello stesso tempo come sono disposte le due curve l'una rispetto all'altra nel seguente modo. Consideriamo un punto qualunque O' dell'una curva ed il cono di rette di $\varLambda$ uscenti da O', cioè il cono che projetta da O' l'altra curva; ad O' corrisponde un fascio di assi statici e consideriamo intorno a questi le rotazioni inverse a quelle che portano il corpo fisso in O' nelle varie posizioni d'equilibrio: come queste, così quelle inverse avranno i loro poli su una certa retta s. Conducendo da O' la parallela h all'asse principale del sistema di forze, segue da quanto abbiamo visto al n⁰ precedente che il cono considerato delle rette di $\varLambda$ uscenti da O' si compone delle varie posizioni che riceve h in seguito alle suddette rotazioni inverse, cioè alle rotazioni intorno ad O' aventi per poli i punti di una retta s. Quindi il trovare la specie di quel cono si riduce ad un problema di cinematica affatto elementare. Per risolverlo si conduca per O' quel piano che è normale al piano $O's$ e che passa per la parallela ad s condotta da O' e in esso si tiri quella retta t che fa con questa parallela (in un verso conveniente) l'angolo la cui tangente è data dalla distanza di O' da s. Il noto teorema sulla composizione delle rotazioni intorno ad assi passanti per un punto mostra allora immediatamente, ricordando la definizione del *polo* di una rotazione, che ogni rotazione avente il polo su s equivale ad una fissa, scelta ad arbitrio, di queste rotazioni seguita da una rotazione (d'ampiezza variabile) intorno all'asse costruito t. Applicando questo fatto alla retta h, vediamo che essa, in seguito alle rotazioni aventi per poli i punti di s, descrive un cono di rivoluzione avente per asse t. Dunque i coni che proiettano l'una curva focale dai punti dell'altra sono coni quadrici di rivoluzione e quindi, per un noto teorema geometrico, le due curve saranno un'ellisse ed un'iperbole *focali* l'una dell'altra. — Riassumendo i risultati ottenuti ultimamente, noi siamo così giunti al noto teorema di MINDING [19]:

Dato un corpo rigido soggetto a forze costanti in direzione ed intensità (il cui sistema non si riduca ad una coppia unica), quelle rette del corpo che per posizioni convenienti di questo diventano risultanti uniche del sistema di forze costituiscono la congruenza delle rette appoggiate su un'ellisse ed un'iperbole focali l'una dell'altra.

Di più possiamo aggiungere in seguito ai ragionamenti fatti:

In una determinata posizione del corpo quelle due coniche sono il luogo di un punto, tenendo fisso il quale e lasciando il corpo libero di rotargli attorno, esso può assumere infinite posizioni d'equilibrio. Ma pei punti dell'ellisse queste posizioni sono di equilibrio indifferente, mentre pei punti dei due rami dell'iperbole esse sono rispettivamente d'equilibrio stabile ed instabile [20].

III.

24. Lo scopo principale di questa 3ª parte del nostro lavoro sarà lo studio della congruenza quadratica Γ degli assi d'equilibrio costante, congruenza che vedemmo esser composta di rette doppie del complesso degli assi statici. Dovremo perciò far uso di considerazioni diverse da quelle che ci servirono nelle due parti precedenti.

Siano ancora x, y, z le coordinate di un punto qualunque del corpo nella posizione attuale rispetto ad una terna di assi rettangolari fissi e X, Y, Z le componenti secondo questi della forza applicata al punto stesso. Siano l, m, n i coseni direttivi di una retta r uscente dall'origine O: facendo rotare il corpo intorno ad r di un angolo θ (nel verso definito dalla direzione positiva di r), il punto

---

(19) V. *Ueber den Ort sämmtlicher Resultanten eines der Drehung unterworfenen Systemes von Kräften* (Crelle's J., 15, 1836, pp. 27-38). Nell'enunciato di MINDING, a vero dire, il corpo è supposto fisso e sono le direzioni delle forze che si fanno mutare in modo da far sempre tra loro gli stessi angoli e da conservare gli stessi punti di applicazione; però è noto (e MINDING stesso fu forse il primo ad osservarlo) che ciò non differisce in sostanza dal muovere il corpo lasciando fisse le direzioni delle forze.

(20) Come si vede, questo enunciato, che completa il teorema di MINDING, fu da noi dimostrato interamente, tranne che per la parte riguardante la distinzione tra i due rami dell'iperbole; quanto a questa parte del nostro enunciato dobbiamo avvertire che finora non ne abbiamo ancor trovato una dimostrazione rigorosa.

$(x\ y\ z)$ verrà ad avere per nuove coordinate:

$$(19)\quad \begin{cases} x' = [l^2 + (1-l^2)\cos\theta]\,x + [lm - lm\cos\theta - n\,\mathrm{sen}\theta]\,y + [ln - ln\cos\theta + m\,\mathrm{sen}\theta]\,z \\ y' = [lm - lm\cos\theta + n\,\mathrm{sen}\theta]\,x + [m^2 + (1-m^2)\cos\theta]\,y + [mn - mn\cos\theta - l\,\mathrm{sen}\theta]\,z \\ z' = [ln - ln\cos\theta - m\,\mathrm{sen}\theta]\,x + [mn - mn\cos\theta + l\,\mathrm{sen}\theta]\,y + [n^2 + (1-n^2)\cos\theta]\,z. \end{cases}$$

Sarà dunque

$$\Sigma(Xx' + Yy' + Zz') = \Sigma(lx + my + nz)(lX + mY + nZ) +$$
$$+ \cos\theta\,[\Sigma(Xx + Yy + Zz) - l^2\Sigma Xx - m^2\Sigma Yy - n^2\Sigma Zz - lm\Sigma(Xy + Yx)$$
$$- ln\,\Sigma(Xz + Zx) - mn\,\Sigma(Yz + Zy)] +$$
$$+ \mathrm{sen}\,\theta\,[l\,\Sigma(Zy - Yz) + m\,\Sigma(Xz - Zx) + n\,\Sigma(Yx - Xy)].$$

Ciò posto, supponiamo che il corpo sia solo libero di rotare intorno all'asse fisso r, sicchè la sola quantità variabile sia θ. Per le posizioni d'equilibrio sarà

$$\frac{d}{d\theta}\Sigma(Xx' + Yy' + Zz') = 0.$$

Nell'espressione di $\Sigma(Xx' + Yy' + Zz')$ indichiamo per brevità con $\varphi(l\ m\ n)$ il coefficiente di $\mathrm{sen}\,\theta$, che è una forma lineare in l, m, n, e con $\Phi(l\ m\ n)$ il coefficiente di $\cos\theta$, che sarà una forma quadratica in queste quantità se converremo che in esso si moltiplichi la parte indipendente da esse $\Sigma(Xx + Yy + Zz)$ per $(l^2 + m^2 + n^2)$, che vale 1. Allora quell'equazione d'equilibrio diverrà

$$\frac{d}{d\theta}(\Phi\cos\theta + \varphi\,\mathrm{sen}\,\theta) = 0,$$

ossia

$$-\Phi\,\mathrm{sen}\,\theta + \varphi\cos\theta = 0,$$

donde

$$(20)\qquad \cot\theta = \frac{\Phi}{\varphi}.$$

Quest'equazione determinando $\cot\theta$, e dando quindi per θ due valori che differiscono di π, ci fa ritrovare il risultato del n^0 5 sulle due posizioni d'equilibrio corrispondenti a ciascun asse r uscente da O. L'equazione $\varphi = 0$ ci determina in particolare un fascio di rette r per cui $\theta = 0$, oppure $\theta = \pi$, cioè il fascio uscente da O di rette del complesso lineare L trovato al n^0 7. L'equazione $\Phi = 0$ ci mostra che la rotazione da eseguire per raggiungere una posizione d'equilibrio è di un angolo retto per tutte le rette r di un cono quadrico uscente da O. E in generale per un dato valore di θ l'equazione (20), cioè (rendendola omogenea in l, m, n):

$$\Phi^2 - \cot^2\theta \cdot \varphi^2 (l^2 + m^2 + n^2) = 0, \tag{20'}$$

rappresenta un cono di 4^0 ordine costituito dalle rette r per cui l'ampiezza θ della rotazione corrispondente ad una posizione d'equilibrio ha il valor dato. Variando θ, quel cono di 4^0 ordine descrive un fascio, le cui particolarità si leggono nell'ultima equazione: principale quella di aver tutti i coni del fascio come rette doppie le due rette date dalle equazioni

$$\Phi = 0, \qquad \varphi = 0.$$

Per ciascuna di queste due rette l'equazione (20), ossia la condizione d'equilibrio del corpo, è soddisfatta qualunque valore si dia a θ. Dunque esse non sono altro che i due assi d'equilibrio costante uscenti da O, di cui dimostrammo altrimenti l'esistenza al n^0 8. Del resto il metodo,, di cui ivi facevamo uso, condurrebbe pure facilmente al fascio di coni di 4^0 ordine ora considerato.

25. Consideriamo ora gli assi r uscenti non più dall'origine, ma da un punto qualunque $(x_0\, y_0\, z_0)$ dello spazio. Basterà a tal fine nelle equazioni del n^0 precedente porre $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ in luogo di x, y, z. Con ciò diverrà:

$$\begin{aligned}\Phi = {} & (l^2 + m^2 + n^2)\,[\Sigma(Xx + Yy + Zz) - x_0\,\Sigma X - y_0\,\Sigma Y - z_0\,\Sigma Z] - \\ & - l^2\,\Sigma Xx - m^2\,\Sigma Yy - n^2\Sigma Zz + l^2 x_0\,\Sigma X + m^2\,y_0\,\Sigma Y + n^2\,z_0\,\Sigma Z - \\ & - lm\,\Sigma\,(Xy + Yx) - ln\,\Sigma\,(Xz + Zx) - mn\,\Sigma\,(Yz + Zy) + lmy_0\,\Sigma X + \\ & + lm\,x_0\,\Sigma Y + ln\,z_0\,\Sigma X + ln\,x_0\,\Sigma Z + mn\,z_0\,\Sigma Y + mn\,y_0\,\Sigma Z, \\ \varphi = {} & l\Sigma\,(Zy - Yz) + m\Sigma\,(Xz - Zx) + n\Sigma\,(Yx - Xy) + \\ & + (ny_0 - mz_0)\,\Sigma X + (lz_0 - nx_0)\,\Sigma Y + (mx_0 - ly_0)\,\Sigma Z.\end{aligned}$$

Introduciamo di nuovo le abbreviazioni (6) e (7), e poniamo inoltre

$$\alpha = ny_0 - mz_0\,, \quad \beta = lz_0 - nx_0\,, \quad \gamma = mx_0 - ly_0\,, \tag{21}$$

sicchè sarà identicamente

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0, \tag{22}$$

ed $l, m, n, \alpha, \beta, \gamma$ saranno le coordinate plückeriane della retta r passante per $(x_0\,, y_0\,, z_0)$ ed avente i coseni direttivi l, m, n. Avremo allora :

$$(23)\quad \begin{cases} 2\Phi = (a_{00} - a_{11})\, l^2 + (a_{00} - a_{22})\, m^2 + (a_{00} - a_{33})\, n^2 - 2a_{12}\, lm - \\ \qquad - 2a_{13} ln - 2a_{23} mn + 2L(n\beta - m\gamma) + 2M(l\gamma - n\alpha) + 2N(m\alpha - l\beta) \\ \varphi = a_{01}\, l + a_{02}\, m + a_{03}\, n + L\alpha + M\beta + N\gamma\,. \end{cases}$$

Vediamo così che l'equazione del complesso lineare L delle rette per le quali, tenute fisse, il corpo si trova attualmente in equilibrio, è

$$a_{01}\, l + a_{02}\, m + a_{03}\, n + L\alpha + M\beta + N\gamma = 0,$$

fatto ben noto. Inoltre vediamo che quelle rette, intorno a cui rotando di un angolo retto e tenendole fisse il corpo viene ad essere in equilibrio formano un complesso quadratico di equazione $\Phi = 0$, dove Φ è dato dalla (23). Aggiungendo a quest'equazione la (22) moltiplicata per un'indeterminata s e formando il determinante dell'equazione quadratica così ottenuta si trova che esso vale

$$s^2\, (s^2 + L^2 + M^2 + N^2)^2,$$

donde si deduce facilmente che la superficie singolare di quel complesso si scinde nel piano all'infinito ed una superficie di 3° ordine e 4ª classe (reciproca della superficie romana di STEINER) contenente quelle due rette all'infinito del complesso lineare L, le quali sono tangenti all'assoluto, ed inoltre la congiungente dei loro punti di contatto: queste tre rette sono doppie pel complesso quadratico ([21]). Così sostituendo nell'equazione (20′) a φ e Φ le loro espressioni (23), si ha un fascio di complessi di 4° grado, per ciascuno dei quali θ ha un valor dato; ecc. ecc.

26. La congruenza quadratica Γ degli assi d'equilibrio costante è l'intersezione del complesso lineare L col complesso quadratico $\Phi = 0$; quindi essa ha per rette doppie quelle due rette all'infinito di L che vedemmo essere doppie per questo complesso quadratico.

([21]) Inoltre si deduce che quel complesso quadratico appartiene a quella categoria particolare che, insieme col nostro amico D.r LORIA, abbiamo studiato nella Memoria *Sur les différentes espèces de complexes du 2e degré des droites qui coupent harmoniquement deux surfaces du second ordre* (Math. Ann., XXIII, pp. 213-234 [questo volume p. 1]). — Veggasi anche per le proposizioni sulle congruenze quadratiche e sui complessi quadratici, di cui faremo uso, la nostra Memoria *Sulla geometria della retta e delle sue serie quadratiche* (Mem. Acc. Torino, (2) 36, 1884 [questo volume, p. 127]).

Ma a noi importa anche il vedere se la congruenza Γ presenta altre particolarità projettive all'infuori di queste rette doppie.

A tal fine ci conviene far qui un'eccezione al metodo usato in tutto il lavoro, cioè fare una scelta particolare del sistema di riferimento affine di evitare lunghi calcoli. Supporremo che si sia preso per asse delle z l'asse principale del sistema di forze, cioè l'asse del complesso lineare L. Allora l'equazione di questo dovrà, com'è noto, prendere la forma

$$\gamma = kn. \tag{24}$$

Quindi confrontando coll'espressione di φ, si vede che sarà

$$a_{01} = a_{02} = L = M = 0,$$

ed inoltre

$$k = -\frac{a_{03}}{N}.$$

Sostituendo dunque nell'equazione $\Phi = 0$ (23) ed eliminando inoltre γ, sì da questa che dalla (22) mediante la (24), esse diverranno rispettivamente

$$(a_{00} - a_{11})\, l^2 + (a_{00} - a_{22})\, m^2 + (a_{00} - a_{33})\, n^2 - 2a_{12}\, lm - 2a_{13}\, ln - \\ - 2a_{23}\, mn + 2N(m\alpha - l\beta) = 0\,,$$

$$l\alpha + m\beta + kn^2 = 0\,.$$

Queste due equazioni quadratiche tra le sole 5 variabili $l\, m\, n$ $\alpha\, \beta$ rappresentano la congruenza Γ. Da esse deduciamo tutte le particolarità che questa presenta nel seguente modo: sottragghiamo la prima dalla seconda moltiplicata per $2s$ e formiamo il determinante dell'equazione quadratica così ottenuta. Esso sarà

$$\begin{vmatrix} a_{11} - a_{00} & a_{12} & a_{13} & s & N \\ a_{12} & a_{22} - a_{00} & a_{23} & -N & s \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} - a_{00} + 2ks & 0 & 0 \\ s & -N & 0 & 0 & 0 \\ N & s & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (2ks + a_{33} - a_{00})(s^2 + N^2)^2$$

Come funzione di s questo determinante ha dunque due radici doppie imaginarie coniugate $\pm Ni$ ed una radice semplice reale $(a_{00} - a_{33})/2k$; le due radici doppie non appartengono a tutti i subdeterminanti di 4° ordine, ed il rapporto anarmonico delle 3 radici e del numero ∞ non ha un valor numerico particolare. Da tutto questo deduciamo che la congruenza quadratica Γ ha per caratteristica [221] ed è affatto generale (dal punto di vista projettivo) tra quelle aventi questa caratteristica. Quindi essa avrà appunto due sole rette doppie: le loro coordinate $l\,m\,n\,\alpha\,\beta$ saranno rispettivamente proporzionali ai valori che i subdeterminanti complementari degli elementi di una linea qualunque di quel determinante prendono per $s = \pm Ni$, donde si deduce immediatamente che esse sono precisamente, come già trovammo in altro modo, quelle due rette all'infinito di L, le quali toccano l'assoluto. — La superficie focale della congruenza Γ avrà poi queste due rette per rette doppie e sarà la superficie singolare di una serie omofocale *generale* di complessi quadratici aventi per caratteristica [2211] (22).

27. Da questi risultati possiamo ottenere un concetto abbastanza completo della forma di quella superficie focale con puri ragionamenti geometrici: l'uso dell'equazione della superficie per questo scopo condurrebbe a calcoli assai complicati.

La superficie ha un solo punto reale all'infinito: il punto d'intersezione delle due rette doppie (cioé il punto che corrisponde al piano all'infinito rispetto al complesso lineare L, vale a dire il punto all'infinito dell'asse di questo complesso). Le tangenti in quel punto alla superficie coprono doppiamente il piano all'infinito, cioè in quel punto si toccano due falde della superficie. Si vede facilmente che quel punto non è isolato, cioè che queste due falde sono reali ed inoltre che esse sono da parti opposte rispetto al piano all'infinito. Quindi mentre una sezione piana qualunque della superficie è una linea chiusa, ogni sezione piana parallela alla direzione del punto all'infinito, cioè parallela all'asse principale, si estenderà all'infinito in due versi opposti con due parti paraboliche.

Ricordiamo poi che in generale la superficie singolare di un complesso quadratico [2211] ha 4 punti doppi e 4 piani tangenti

(22) V. oltre alla nostra Memoria citata per ultimo il noto lavoro del sig. WEILER: *Ueber die verschiedenen Gattungen der Complexe zweiten Grades* (Math. Ann., VII, pp. 145-207). — Abbiamo svolto completamente i ragionamenti del n° 26, perchè, se non erriamo, è questa la prima volta che viene applicato ad un caso particolare il metodo dei divisori elementari per riconoscere le particolarità projettive della congruenza quadratica determinata da un complesso lineare ed un complesso quadratico dati. — Aggiungiamo che l'equazione della superficie focale di Γ si avrebbe immediatamente scrivendo che il cono quadrico ed il piano di $\Phi = 0$ e $\varphi = 0$ uscenti dal punto $(x\,y\,z)$ si toccano, e mostrerebbe che quella superficie ha per rette doppie quelle due rette all'infinito, per cui $x^2 + y^2 = 0$.

doppi che corrispondono a quei punti rispetto a ciascuno dei due complessi lineari (non speciali) *fondamentali* di quella superficie; i 4 punti doppi determinano, presi in ordine conveniente, un quadrilatero sghembo, di cui due lati opposti tagliano l'una retta doppia e gli altri due l'altra. Ora nel nostro caso le due rette doppie della nostra superficie stanno in un piano reale (all'infinito) ma sono imaginarie-coniugate; quindi i lati di quel quadrilatero saranno imaginari, ed ai due che tagliano una retta doppia saranno rispettivamente coniugati i due che tagliano l'altra (poichè la congruenza Γ avendo equazioni reali, anche la sua superficie focale avrà l'equazione reale). Dunque due lati adiacenti sono imaginari-coniugati e gli altri due lati, pure adiacenti, saranno pure imaginari coniugati; quindi due vertici, cioè due punti doppi della nostra superficie, saranno reali, mentre gli altri due punti doppi saranno imaginari-coniugati e quindi congiunti, come quelli, da una diagonale reale. I piani che passano per l'una o l'altra diagonale del quadrilatero formano due serie di piani reali taglianti la superficie in coppie di coniche. — Siano D e D' i due punti doppi reali. Il complesso lineare reale L essendo uno dei due complessi lineari fondamentali per la nostra superficie, segue che dei 4 piani tangenti doppi due saranno imaginari ed altri due δ, δ', corrispondenti a D e D' rispetto ad L, saranno reali e passeranno (com'è facile vedere) per la retta DD'. Ciascuno di questi due piani tangenti doppi δ, δ' toccherà la superficie lungo una conica, la quale dovendo passare per D e D' sarà necessariamente reale. Correlativamente i coni nodali dei punti doppi D, D' saranno reali; essi toccano δ e δ' lungo le tangenti rispettivamente in D, D' alle coniche di contatto di quei piani.

Facciamo ora rotare un piano intorno alla retta DD' partendo dalla posizione δ e andando alla posizione δ' entro quella coppia d'angoli diedri opposti determinati da δ, δ' entro la quale sta, ad esempio, il cono nodale di D: l'intersezione del piano colla superficie si scinderà in due coniche aventi nel punto reale D due tangenti reali e distinte, cioè le due generatrici d'intersezione del piano con quel cono. Dunque quelle due coniche, non potendo essere imaginarie coniugate, saranno reali, ed avranno per conseguenza in D' tangenti reali: quindi il cono nodale di D' starà entro gli stessi due diedri di δ, δ' che quello di D. Se il piano mobile passa negli altri diedri, le due coniche d'intersezione colla superficie coincidono e poi divengono imaginarie (coniugate). Dunque la superficie è tutta racchiusa entro la prima coppia di diedri opposti determinati da δ, δ' (coppia di diedri che d'or innanzi indicheremo semplicemente con

$\delta\,\delta'$): entro essa starà anche la direzione del punto reale all'infinito della superficie. — Ciò posto, ogni piano compreso nella coppia di diedri $\delta\,\delta'$ taglia la superficie in due ellissi passanti per D e D', tranne quello che va al punto all'infinito e che quindi taglia in due parabole passanti pei 2 punti stessi e rivolgenti le loro concavità per versi opposti; ora il luogo di tutti gli archi d'ellissi (o parabole) posti da una parte della retta DD' (rispetto ad un piano passante per DD' e giacente nei diedri adiacenti a $\delta\,\delta'$) è una falda della superficie, e il luogo degli altri archi delle stesse curve è un'altra falda. La superficie si compone adunque di due falde indefinite toccantisi soltanto nei due punti doppi D, D' (e all'infinito). Su ciascuna di esse si hanno due archi d'ellissi di contatto rispetto ai piani doppi δ, δ'; questi due archi costituiscono la curva parabolica della falda e comprendono la regione iperbolica di questa, mentre la parte indefinita che sta al di là dei due archi è a curvatura ellittica e si può paragonare per la forma ad un paraboloide ellittico. Ciò risulta assai chiaramente dalla considerazione fatta delle ellissi e parabole poste nei piani per DD'.

La nostra superficie divide così lo spazio in 3 porzioni: una interna all'una falda (il paragone col paraboloide ellittico spiega senz'altro che cosa intendiamo qui per *interno*), una interna all'altra ed infine la parte di spazio esterna alle due falde.

28. Da queste proposizioni, riguardanti la forma della superficie focale della congruenza Γ degli assi d'equilibrio costante, possiamo ora dedurne altre riguardanti sia questa congruenza stessa, sia il complesso lineare L che la contiene, considerati l'una e l'altro dal punto di vista meccanico.

Anzitutto è chiaro, che siccome le rette passanti per un punto interno ad una falda di quella superficie tagliano tutte questa falda in due punti reali e distinti almeno, così per un tal punto non passeranno tangenti doppie reali della superficie, cioè non passeranno rette reali di Γ. D'altronde siccome le due rette di questa congruenza uscenti da un punto non possono da imaginarie divenir reali o viceversa che coincidendo, cioè che quando il punto attraversa la superficie focale, così per ogni punto esterno alle due falde passeranno due rette reali di Γ. Dunque (n^0 11) il fascio di rette del complesso lineare L passanti per un punto interno all'una falda si compone tutto di rette, per ciascuna delle quali, tenuta fissa, la posizione attuale del corpo è d'equilibrio stabile, oppure tutto di rette, per cui l'equilibrio del corpo è instabile; mentre nel fascio di rette di

L uscenti da un punto esterno ad ambe le falde i due assi d'equilibrio costante separano quelle rette per cui l'equilibrio del corpo è stabile da quelle per cui è instabile.

I due fasci di rette $D\delta$ e $D'\delta'$ sono i soli fasci reali di rette di Γ, cioè di assi di equilibrio costante (oltre al fascio di rette all'infinito del complesso lineare L). Dunque (n^0 14) a ciascuno dei due punti D, D', considerato come fisso, corrispondono infinite posizioni d'equilibrio indifferente del corpo (posizioni i cui corrispondenti assi statici formano precisamente quei due fasci di assi d'equilibrio costante), sicchè (n^0 23) l'ellisse di MINDING passerà per D e D'. Siccome poi per ogni punto di quest'ellisse non passano assi d'equilibrio costante reali (n^0 13), così noi vediamo anche come uno dei due archi dell'ellisse separati da D, D' sarà interno all'una falda della superficie focale di Γ e l'altro sarà interno all'altra falda. — Imaginando che un punto passi dalla regione interna all'una falda a quella interna all'altra, movendosi, ad esempio, su quell'ellisse, ed osservando che un fascio di rette di L corrispondenti tutte ad equilibrio stabile del corpo nella posizione attuale si muta in un fascio di rette di L corrispondenti tutte ad equilibrio instabile solo quando quel fascio movendosi con continuità passa per un fascio di assi d'equilibrio costante, si giunge facilmente a questa conclusione, che completa un risultato precedente: il fascio di rette del complesso lineare L passanti per un punto interno all'una falda si compone tutto di rette per cui, tenute fisse, la posizione attuale del corpo è d'equilibrio stabile, mentre per le rette uscenti da un punto interno all'altra falda la posizione attuale del corpo è d'equilibrio instabile [23].

Non esistono rette del complesso L le quali taglino entrambe le falde della superficie focale di Γ. Per le rette di L che tagliano una delle due falde questa c'indica se esse, tenute fisse, corrispondono ad equilibrio stabile oppure ad equilibrio instabile per la posizione attuale del corpo. Quanto poi a quelle rette di L che non tagliano alcuna delle due falde, per distinguere se una data di esse corrisponde ad equilibrio stabile o ad equilibrio instabile si considerino le due rette di Γ che escono da un suo punto qualunque

---

[23] La dimostrazione qui data di questo fatto non è perfettamente rigorosa. Si otterrebbe forse una dimostrazione rigorosa ricorrendo a considerazioni (che qui abbiamo voluto evitare) intorno alla rigata delle tangenti quadripunte della superficie focale di Γ ed alle tangenti doppie di una curva piana di 4^0 ordine dotata di due punti doppi.

(tangenti doppie, che possono anche essere *isolate*, della nostra superficie): esse comprenderanno in due angoli adiacenti le due falde della superficie, e secondo che la retta data sta nell'angolo che comprende la falda tagliata da rette di L corrispondenti ad equilibrio stabile, oppure nell'altro angolo, essa corrisponderà pure, tenuta fissa, ad equilibrio stabile attuale del corpo, oppure ad equilibrio instabile.

Con ciò è risoluta la principale questione che si potesse fare intorno alla distinzione delle rette del complesso lineare L per le loro proprietà statiche rispetto al corpo.

IV.

29. Prima di finire vogliamo far notare come le nostre ricerche si possano interpretare come studii di due diversi problemi geometrici. In sostanza noi abbiamo supposto dato un sistema rigido di punti (x, y, z) e delle costanti corrispondenti X, Y, Z, e ci siamo occupati di trovare quelle posizioni del sistema per cui è nulla la variazione della funzione lineare delle coordinate di quei punti

$$\Sigma\,(Xx + Yy + Zz),$$

sia quando il sistema è fisso in un punto, sia quando è fisso ad una retta, di distinguere quali tra quelle posizioni corrispondono a massimo od a minimo di quella funzione e di porre in relazione tra loro le diverse posizioni e i movimenti (rotazioni) con cui esse si ottengono dalla posizione iniziale del sistema. Ora, aggiungendo a quella funzione una costante indeterminata, possiamo dire che essa esprime la somma delle distanze dei punti del sistema da piani qualunque fissi corrispondenti ai punti moltiplicate per costanti qualunque date. Dunque la teoria svolta si può considerare come riguardante il seguente problema:

Dato un sistema rigido mobile di punti ed un sistema fisso di piani rispettivamente corrispondenti a quei punti, studiare quelle posizioni del sistema di punti per cui è nulla la variazione della somma dei prodotti di costanti date per le distanze dei punti dai piani dati (e quindi quelle posizioni per cui questa somma è massima o minima), sia quando il sistema è solo libero di rotare intorno ad un punto fisso arbitrario dello spazio, sia quando è solo libero di rotare intorno ad un asse arbitrario.

Tutti, senza eccezione, i risultati ottenuti si potranno tradurre come risultati riguardanti questo problema. Il complesso lineare L, la congruenza quadratica Γ, il complesso di 6° grado degli assi statici, l'ellisse e l'iperbole di MINDING, ecc. ecc., avranno tutti un significato per questo nuovo problema; basterà invece che posizioni d'equilibrio stabile, instabile, od indifferente, dire posizioni del sistema rigido per cui quella tal somma è massima o minima, od ha la variazione nulla senza essere nè massima nè minima. La cosa è così evidente che crediamo inutile dilungarci su essa.

30. Un'altra applicazione, meno immediata però, trovano i nostri risultati al seguente problema:

Dati due sistemi rigidi d'egual numero di punti corrispondentisi tra loro e di cui l'uno si considera come fisso e l'altro come mobile o intorno ad un punto fisso arbitrario o intorno ad una retta arbitraria, studiare quelle posizioni del sistema mobile per cui è nulla la variazione della somma dei prodotti di costanti date pei quadrati delle distanze dei punti di questo sistema dai punti corrispondenti del sistema fisso (distinguendo quelle posizioni per cui questa somma è massima o minima).

Sia infatti $(x\, y\, z)$ un punto del sistema mobile, $(x_1\, y_1\, z_1)$ il punto corrispondente del sistema fisso ed m la costante corrispondente. Allora quella somma sarà

$$\Sigma m\,[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2]=\Sigma m\,(x^2+y^2+z^2)+$$
$$+\,\Sigma m\,(x_1^2+y_1^2+z_1^2)+\Sigma\,(-\,2mx_1x-\,2my_1y-\,2mz_1z).$$

Quindi, se l'origine si suppone fissa, sicchè il sistema mobile sia solo libero di rotare o intorno all'origine o intorno ad un asse passante per essa, la sola parte variabile in quella somma sarà

$$\Sigma\,(-\,2mx_1x-2my_1y-2mz_1z),$$

che è appunto del tipo di $\Sigma\,(Xx+Yy+Zz)$. I risultati ottenuti nella 1ª parte di questo lavoro, quando consideravamo solo gli assi passanti per un punto fisso, si applicheranno dunque ancora perfettamente a questo problema; vi saranno ancora per ogni punto dello spazio 4 assi corrispondenti analoghi agli assi statici e presentanti le stesse relazioni mutue di questi ([24]); esisteranno un complesso lineare ed una congruenza quadratica analoghi rispettivamente ad L e Γ, ecc. ecc. — Ma i risultati delle parti seguenti non saranno più veri in generale, tradotti per questo problema; perocchè quelle sup-

([24]) Dobbiamo al prof. SIACCI l'osservazione che i risultati da esso ottenuti intorno alle quaterne di assi statici si potevano applicare al problema in cui si tratta di render nulla la variazione della somma dei quadrati delle distanze tra i punti corrispondenti di due sistemi rigidi.

ponevano che cambiando il punto fisso nello spazio la somma, la cui variazione si doveva render nulla, rimanesse sempre la stessa (a meno di una costante), le quantità X, Y, Z restando immutate; fatto che non si presenta più nel nuovo problema. Quindi il complesso degli assi statici non possiamo più asserire che si conservi del 6° grado; nè possiamo asserire che le curve analoghe alle due coniche focali di MINDING saranno ancora due tali coniche, ecc. Noi usciremmo dai limiti che ci siamo imposti, cercando quali modificazioni subisce la nostra teoria per questo nuovo problema; altri potrà farlo seguendo gli stessi procedimenti da noi usati ([25]).

([25]) Anche nella ricerca di astatica, che principalmente ci occupò in questo lavoro, rimarrebbero varie questioni da trattare. Così vi sarebbero da studiare le proprietà meccaniche dei punti posti sul piano di una delle due coniche di MINDING o sull'asse comune ad entrambe, vi sarebbe da cercare la natura di un sistema rigido tale che quelle due coniche si riducano a due parabole, ecc. Ma noi abbiamo dovuto limitarci, per mancanza di tempo, a ciò che ci parve più importante; anzi abbiamo dovuto per quella stessa ragione dare (come notammo a suo luogo) due dei nostri risultati senza dimostrazione o con dimostrazione poco rigorosa (il che ci parve preferibile al sopprimere quei risultati).

Torino, 20 Agosto 1884.