Corrado Segre

Sur les courbes de tangentes principales des surfaces de Kummer (Extrait d'une lettre andressée a M.Th. Reye)

Jour. für die reine und angewandte Math., Vol. **98** (1884), p. 301–303

in: Corrado Segre, Opere, a cura della Unione Matematica Italiana, Volume III, Edizione Cremonese, Roma, 1961, p. 545–547

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Segre_CW_3_545>

LV.

SUR LES COURBES DE TANGENTES PRINCIPALES DES SURFACES DE KUMMER

Extrait d'une lettre adressée à M. Th. Reye par M. Corrado Segre.

« Journal für die reine und angewandte Mathematik »,
Band XCVIII, 1884, pp. 301-303.

Dans votre Mémoire sur les courbes asymptotiques de la surface de Kummer [1] j'ai remarqué surtout le théorème suivant, d'où vous parvenez au résultat que chacune de ces courbes est la base d'un faisceau de surfaces du 4e ordre :

Un plan singulier d'un complexe quadratique quelconque Γ_0, *dont la droite singulière correspondante soit tangente principale de la surface singulière* Φ_0^4 *de ce complexe, est aussi singulier pour le complexe quadratique infiniment voisin appartenant au faisceau des complexes quadratiques* Γ_ν *qui passent par la congruence des droites singulières de* Γ_0 ; *et réciproquement.*

Vous en donnez une démonstration analytique un peu longue et compliquée, et je ne sais si vous avez vu qu'on peut aussi le démontrer synthétiquement de la façon fort simple suivante.

Dans un plan singulier quelconque π de Γ_0 soient A, B les centres des deux faisceaux de droites de ce complexe et P le point singulier correspondant à la droite singulière AB, c'est-à-dire le point de contact de π avec Φ_0^4. Le point P' conjugué harmonique de P par rapport à A et B sera le point de contact de la droite AB avec la série des coniques, situées dans π, du faisceau des complexes Γ_ν. Dans cette série de coniques (ayant encore deux autres

---

(1) *Ueber die Singularitätenflächen quadratischer Strahlencomplexe und ihre Haupttangentencurven* (Dieses Journal, 97, p. 242).

tangentes communes qui passent respectivement par A et B) il n'y a que deux coniques décomposées en couples de points, c'est-à-dire le couple AB, qui appartient à Γ_0, et le couple composé de P' et d'un autre point, couple qui appartient à un certain Γ_ν dont π est aussi plan singulier. Donc si ce Γ_ν est infiniment voisin à Γ_0, et seulement alors, le second couple de points devra coïncider avec le premier, P' coïncidera avec A ou B, et en conséquence aussi P coïncidera avec A ou B, c'est-à-dire la droite singulière AB qui correspond à π sera tangente principale de Φ_0^4. Votre théorème est donc prouvé.

Ce théorème a lieu pour toutes les particularisations de la surface de KUMMER Φ_0^4; mais avez-vous vu comment les lignes asymptotiques se décomposent dans les cas particuliers? Voici comment j'y parviens. On a très facilement (par exemple par les méthodes dont j'ai fait usage dans ma dissertation *Sulla geometria della retta e delle sue serie quadratiche* (2)) la proposition suivante:

Les complexes quadratiques Γ_ν passant par la congruence singulière d'un complexe quadratique quelconque Γ_0 ont les mêmes complexes linéaires fondamentaux, et en particulier les mêmes droites doubles que celui-ci.

Que l'on applique donc votre théorème aux différentes espèces particulières de complexes quadratiques en tenant toujours compte de cette proposition, et l'on verra à quoi se réduisent les lignes asymptotiques des différents cas particuliers de la surface de KUMMER. Voici quelques exemples.

Les lignes asymptotiques de la surface singulière de complexes [2 1 1 1 1], c'est-à-dire de la « *Complexfläche* » générale de PLÜCKER, sont les intersections de cette surface avec des surfaces infiniment voisines de la même espèce, ayant la même droite double. Donc elles sont des courbes du 12^e ordre et de la 12^e classe, ayant sur la droite double de la surface 4 points doubles (et *n'appartenant pas* à des surfaces cubiques).

Les lignes asymptotiques de la surface singulière de complexes [2 2 1 1], c'est-à-dire de la surface quartique à deux droites doubles incidentes et 4 points coniques, sont les intersections de cette surface avec des surfaces infiniment voisines et de la même espèce, ayant les mêmes droites doubles. Donc elles sont d'ordre et classe 8, et elles appartiennent à des surfaces cubiques passant par les deux droites doubles (mais *non pas* à des quadriques).

---

(2) Memorie Acc. Torino, (2) 36 [questo volume p. 127].

Il y a deux espèces réciproques de complexes quadratiques [2 2 2] et l'on trouve ainsi :

Les lignes asymptotiques de la surface cubique à 4 points coniques (réciproque de la surface de STEINER) sont les intersections de celle-ci avec des surfaces cubiques contenant les 3 droites d'elle qui ne passent par aucun point double. Donc elles sont du 6^e ordre (et 4^e classe) et elles seront aussi les intersections de la surface donnée avec des quadriques.

Les lignes asymptotiques de la surface de STEINER du 4^e ordre à 3 droites doubles sont les intersections d'elle avec d'autres surfaces de STEINER ayant les mêmes droites doubles, c'est-à-dire elles sont des courbes du 4^e ordre (de 2^e espèce), ayant ces 3 droites pour cordes, et ayant leurs développables de la 6^e classe et circonscrites à des quadriques.

Remarquez comment ces dernières propositions sur la surface de STEINER et sur les quartiques gauches de 2^e espèce, propositions connues, mais de démonstration directe assez difficile, découlent immédiatement de votre théorème et de la proposition que je vous ai énoncée.

Il y aurait encore d'autres cas particuliers de la surface de KUMMER à examiner, mais je me borne à ces exemples, d'autant plus que pour les surfaces réglées on n'obtient rien de remarquable. Naturellement la même méthode donnerait dans chaque cas ces lignes asymptotiques particulières qui correspondent aux complexes fondamentaux (non spéciaux) de la surface et qui sont les lieux des points doués de tangentes quadriponctuelles.

Turin, le 24 octobre 1884.