Corrado Segre

Alcune considerazioni elementari sull'incidenza di rette e piani nello spazio a quattro dimensioni

Rend. Circolo Mat. Palermo, Vol. **2** (1888), p. 45–52

in: Corrado Segre, Opere, a cura della Unione Matematica Italiana, Volume IV, Edizione Cremonese, Roma, 1963, p. 160–166

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Segre_CW_4_160>

LXV.

ALCUNE CONSIDERAZIONI ELEMENTARI SULL'INCIDENZA DI RETTE E PIANI NELLO SPAZIO A QUATTRO DIMENSIONI

« Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo »,
tomo II, 1888, pp. 45-52.

1. Nello spazio a quattro dimensioni (nel quale si supporranno contenuti tutti gli enti di cui si dirà in seguito) diconsi *incidenti*: 1^0 due rette aventi un punto comune, o, ciò che è lo stesso, giacenti in un piano; 2^0 due piani giacenti in uno spazio (sott. « a tre dimensioni »), ossia tagliantisi in una retta; 3^0 una retta ed un piano aventi un punto comune, vale a dire giacenti in uno stesso spazio.

È condizione semplice l'incidenza per una retta ed un piano, doppia invece per due rette o per due piani.

Le rette ed i piani sono ∞^6. Date tre rette *indipendenti* a, b, c vi è una sola retta incidente ad esse ed è la retta comune ai tre spazi bc, ca, ab. Dati tre piani *indipendenti* α, β, γ vi è in generale un solo piano incidente ad essi ed è quello che congiunge i tre punti $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ in cui quei piani si tagliano a due a due. Però se α, β, γ passano per uno stesso punto vi sono ∞^1 piani incidenti ad essi, e cioè quelli che projettano da quel punto la *schiera* di rette (*Regelschaar*) incidente alle tre rette in cui α, β, γ son tagliati da uno spazio qualunque; essi costituiscono una delle due *schiere* di piani di una varietà conica quadratica.

2. Le rette incidenti a due piani indipendenti α, β formano una ∞^4 tale che in ogni spazio ne giace una ∞^2 costituente una congruenza lineare, mentre per ogni punto P ne passa un fascio giacente in quel piano incidente ad α, β che passa per P (piano d'intersezione dei due spazi $P\alpha$, $P\beta$).

Le rette incidenti a tre piani α, β, γ, i quali si taglino a due a due in tre punti distinti formano un *complesso* ∞^3 tale, che ogni spazio ne contiene una schiera e che per ogni punto P ne passa una, intersezione degli spazi $P\alpha$, $P\beta$, $P\gamma$. A questo fanno eccezione i punti di α, β, γ e del piano δ' incidente a questi, giacchè per ciascuno di essi passa in generale un fascio di rette del complesso ed in particolare pei tre punti $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ (congiunti da δ') passano stelle ordinarie di rette di quello; le rette del piano δ' sono tutte contenute nel complesso.

Projettando questo su uno spazio Σ da un punto P si ottiene, ove P non stia su alcuno dei piani α, β, γ, δ', un ordinario *complesso tetraedrale.* Poichè le rette incidenti ad α, β, γ tagliano questi piani e lo spazio $P\delta'$ (vale a dire i quattro spazi di uno stesso fascio $\alpha\delta'$, $\beta\delta'$, $\gamma\delta'$, $P\delta'$) secondo quaterne di punti tutte projettive fra loro, e quindi le loro projezioni su Σ da P taglieranno secondo quaterne di punti projettive fra loro i quattro piani projezioni di α, β, γ, δ'.

Se P sta su δ', il complesso delle rette incidenti ad α, β, γ si projetta su Σ secondo un ordinario *complesso lineare.* Invero uno spazio qualunque passante per P contiene una schiera di rette di quello, la quale comprende ora una retta passante per P (e giacente in δ') e si projetta quindi, non secondo le rette di un inviluppo piano di 2ª classe come in generale, ma secondo un fascio di rette. Quelle rette poi del complesso oggettivo, le quali escono dai punti di una retta passante per P, costituiscono la schiera giacente nello spazio determinato da due di esse, e però si projettano ancora secondo un fascio di rette. Il complesso projezione ha dunque in ogni piano o per ogni punto di Σ un fascio di rette, ossia è lineare (¹).

3. Le rette incidenti a quattro piani indipendenti $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, i quali si taglino a due a due in sei punti distinti, formano un *sistema* (∞^2), tale che ogni spazio in generale ne contiene due. Diciamo α', β', γ', δ' rispettivamente i quattro piani incidenti alle terne di piani $\beta\gamma\delta$,

(¹) Se α, β, γ si tagliano a due a due in uno stesso punto, le rette incidenti ad essi sono quelle giacenti nella schiera dei piani incidenti ad α, β, γ (v. alla fine del n⁰ 1) e sono anche incidenti a tutti gli altri ∞^1 piani dell'altra schiera che è contenuta con quella nella stessa varietà quadratica. La projezione di questo complesso di rette è ora il complesso delle tangenti di un ordinario cono quadrico, oppure un complesso lineare speciale, secondo che il centro di projezione non sta, ovvero sta, su quella varietà quadratica.

$\gamma\delta\alpha$, $\delta\alpha\beta$, $\alpha\beta\gamma$. Projettando quel sistema di rette sullo spazio Σ dal punto $\delta\delta'$ si avrà quel sistema di rette, che è contenuto nel complesso lineare (n^0 2) projezione del complesso delle rette incidenti ad α, β, γ, e che si appoggia alla retta in cui δ incontra Σ, vale a dire si avrà una congruenza lineare avente questa retta per una direttrice. Il piano ε che dal punto $\delta\delta'$ projetta l'altra direttrice sarà evidentemente incontrato da tutte le rette del sistema considerato incidente ad α, β, γ, δ. D'altronde esso coincide con δ solo se in quella congruenza lineare la retta $\delta\Sigma$ è direttrice doppia, cioè se questa retta sta nel complesso lineare projezione del complesso delle rette incidenti ad α, β, γ, vale a dire se i tre punti d'incontro di δ con α, β, γ sono in linea retta. Ed ε coincide con α se α passa pel punto $\delta\delta'$, cioè se i tre punti di incontro di α con β, γ, δ sono in linea retta; ed analoghe condizioni si hanno pel coincidere di ε con β o con γ. Se dunque supponiamo, come faremo in seguito, che *i piani α, β, γ, δ si taglino a due a due in sei punti tra i quali non se ne trovino tre in linea retta*, il piano ε sarà diverso da quei quattro ed avrà luogo la seguente notevole proposizione: *Le rette incidenti ai quattro piani α, β, γ, δ incontrano pure un quinto piano ε.*

Ogni spazio passante per ε taglia evidentemente α, β, γ, δ in quattro rette di una schiera, cioè contiene una schiera di rette del sistema incidente ad α, β, γ, δ. Viceversa, ogni spazio che, senza passare per alcuno di questi quattro piani, contenga una schiera di rette incidenti ad essi, avrà nella sua retta d'intersezione con δ' una retta di questa schiera, retta che dovrà perciò incontrare δ; sicchè quello spazio conterrà il punto $\delta\delta'$ ed analogamente i punti $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$. Quindi collegando questo con le osservazioni precedenti abbiamo che *ogni spazio che tagli α, β, γ, δ in quattro rette di una schiera passa pel piano ε*; e che *questo piano ε contiene i quattro punti $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, $\delta\delta'$ ed è l'unico piano al quale siano ancora incidenti tutte le rette che incontrano α, β, γ, δ* (2).

La relazione fra i cinque piani α, β, γ, δ, ε è scambievole, essendo ciascuno di essi definito dall'incontrare tutto il sistema delle rette incidenti agli altri quattro. Chiameremo quei cinque piani: *piani associati*.

---

(2) Che i punti $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, $\delta\delta'$ stiano in uno stesso piano si può anche dimostrare osservando che nell'omografia involutoria (non omologia) definita dalle tre coppie di punti omologhi $\alpha\beta$ e $\gamma\delta$, $\alpha\gamma$ e $\delta\beta$, $\alpha\delta$ e $\beta\gamma$ ai piani α, β, γ, δ sono rispettivamente omologhi α', β', γ', δ' e quindi quelli e questi devono tagliare negli stessi quattro punti il piano direttore dell'involuzione.

4. Per dualità, dalle proposizioni precedenti si ha:

Se quattro rette a, b, c, d *sono indipendenti e congiunte a due a due da sei spazi, tra cui non ve ne siano tre passanti per uno stesso piano, e s'indicano rispettivamente con* a′, b′, c′, d′ *le rette incidenti alle terne di rette* bcd, cda, dab, abc, *i quattro spazi* aa′, bb′, cc′, dd′ *passeranno per una stessa retta* e. *Le cinque rette* a, b, c, d, e (che diremo *rette associate*) *sono in relazione scambievole tale che gli* ∞^2 *piani incidenti a quattro qualunque di esse incontrano pure la rimanente. Ciascuna di quelle rette si può anche definire come il luogo geometrico di un punto dal quale le altre si projettano su uno spazio secondo quattro rette di una schiera. Mentre per un punto qualunque passano in generale due soli piani del sistema* ∞^2 *nominato, per ogni punto di ciascuna delle rette* a, b, c, d, e *ne passa una schiera.*

5. *Vi sono in generale tre rette incidenti a quattro piani indipendenti dati* α, β, γ, δ *e ad una retta data* r. Invero se la punteggiata r si projetta da α, β, γ su δ si ottengono in questo piano tre fasci di raggi di centri $\alpha\delta$, $\beta\delta$, $\gamma\delta$ riferiti projettivamente fra loro, e dalla nota esistenza in generale di tre punti di δ in ciascuno dei quali concorrono tre raggi omologhi segue appunto l'esistenza delle tre rette nominate (3).

Dalla proposizione così ottenuta segue, lasciando arbitrario δ oppure r, che *le rette incidenti ai tre piani* α, β, γ *ed alla retta* r *formano una rigata cubica*; e che *il sistema delle rette incidenti ai quattro piani* α, β, γ, δ *costituisce una varietà cubica.*

Supposto che tra i sei punti d'incontro di α, β, γ, δ a due a due non se ne trovino tre in linea retta, sicchè quel sistema di rette sia ancor incidente ad un quinto piano ε (n^0 3), la varietà cubica, luogo di queste rette, conterrà i piani α, β, γ, δ, ε, avrà quindi 10 *punti doppi* nei punti in cui questi s'incontrano a due a due, ed infine conterrà anche i 10 piani, ciascuno dei quali è incidente a tre di quei cinque (4). In una Nota « *Sulla varietà cubica con dieci punti doppi dello spazio a quattro dimensioni* » pubblicata negli Atti dell'Acc. di Torino (vol. XXII) ed in un lavoro più ampio che si

(3) Se i tre punti $\alpha\delta$, $\beta\delta$, $\gamma\delta$ stanno su una stessa retta g, ed r si prende in guisa che incontri g, i tre fasci di raggi considerati diventano prospettivi e si ottiene, all'infuori di g, una sola retta incidente ad α, β, γ, δ ed r.

(4) Invece nel caso escluso che p. e. i tre punti $\alpha\delta$, $\beta\delta$, $\gamma\delta$ siano su una stessa retta g, segue dalla nota precedente che questa sarà una *retta doppia* per la varietà cubica.

va stampando nelle Memorie della stessa Accademia [questo vol., pp. 88-98 e pp. 99-159], si trova studiata diffusamente quella varietà cubica (i suoi sistemi di rette, i suoi contorni apparenti, ecc.). La presente Nota dimostra per via più elementare alcuni risultati contenuti in quei lavori e ne sviluppa alcune conseguenze.

6. Date due terne di spazi, 1, 2, 3 e 4, 5, 6, e chiamando α, β, γ e δ, ε, η i piani d'intersezione di 23, 31, 12 e di 56, 64, 45, tutte le varietà cubiche del fascio determinato da quelle due terne di spazi conterranno i nove piani d'intersezione degli spazi dell'una terna con quelli dell'altra terna, ed avranno per punti doppi i nove punti di intersezione dei piani α, β, γ con δ, ε, η. Nell'ultimo lavoro citato si osserva che in quel fascio esiste una varietà avente un decimo punto doppio ed allora dalla proprietà della configurazione dei 10 punti doppi e dei 15 piani di una tal varietà (cioè che in ogni piano vi sono quattro punti e che per ogni punto passano sei piani) vien dedotta la proposizione seguente:

Se α, β, γ sono tre piani passanti per una stessa retta, e δ, ε, η tre piani passanti per un'altra retta indipendente da quella, i sei piani, ciascuno dei quali congiunge i tre punti d'intersezione di α, β, γ rispettivamente con una permutazione qualunque di δ, ε, η, cioè i sei piani congiungenti i punti

$$(1)\qquad \begin{gathered}(\alpha\delta,\ \beta\varepsilon,\ \gamma\eta),\quad (\alpha\varepsilon,\ \beta\eta,\ \gamma\delta),\quad (\alpha\eta,\ \beta\delta,\ \gamma\varepsilon);\\ (\alpha\delta,\ \beta\eta,\ \gamma\varepsilon),\quad (\alpha\varepsilon,\ \beta\delta,\ \gamma\eta),\quad (\alpha\eta,\ \beta\varepsilon,\ \gamma\delta),\end{gathered}$$

passeranno per uno stesso punto.

Ora possiamo qui dimostrare la proposizione più elementarmente, osservando che quei sei piani sono tali che ciascuno di quelli della prima terna è incidente a ciascuno di quelli della seconda terna. Così i due piani $(\alpha\delta,\ \beta\varepsilon,\ \gamma\eta)$ e $(\alpha\delta,\ \beta\eta,\ \gamma\varepsilon)$ hanno comuni il punto $\alpha\delta$ e quello in cui si tagliano le due rette $(\beta\varepsilon,\ \gamma\eta)$ e $(\beta\eta,\ \gamma\varepsilon)$ (le quali stanno nel piano comune ai due spazi $\beta\gamma$ ed $\varepsilon\eta$), e però hanno comune la congiungente di quei due punti. Da queste relazioni fra le due terne di piani segue subito l'asserto; poichè ciascun piano della 1ª terna essendo incidente al 4º ed al 5º dovrà passare pel punto unico in cui questi si tagliano, e così il 6º piano dovrà passare pel punto stesso essendo incidente ai piani della 1ª terna, i quali si tagliano in questo. Si vede inoltre che i sei piani considerati projettano dal loro punto comune due terne di generatrici di diverso sistema di una quadrica ordinaria.

Conservando le notazioni 1, 2,... per spazi fissate al principio di questo n^0, e formando coi nove piani in cui gli spazi della terna 1, 2, 3 tagliano quelli della terna 4, 5, 6 i sei gruppi

$$(2) \qquad \begin{aligned} &(14,\ 25,\ 36),\quad (15,\ 26,\ 34),\quad (16,\ 24,\ 35);\\ &(14,\ 26,\ 35),\quad (15,\ 24,\ 36),\quad (16,\ 25,\ 34), \end{aligned}$$

si verifica immediatamente che il piano incidente al 1^0 di questi gruppi, cioè ad 14, 25, 36, è precisamente il piano $(\alpha\delta,\ \beta\varepsilon,\ \gamma\eta)$, e che in genere il piano incidente ai tre di uno qualunque dei gruppi (2) è appunto il piano di ugual posto nella serie (1). La proposizione precedente si può dunque anche enunciare dicendo che passano per uno stesso punto i piani incidenti rispettivamente ai sei gruppi (2). Quindi i sei complessi composti rispettivamente dalle rette incidenti a questi sei gruppi di piani sono projettati da quel punto (n^0 2) secondo sei complessi lineari. Infine si verifica anche subito che ciascuno dei gruppi di tre piani (2) forma coi due piani di (1), segnati sulla orizzontale corrispondente ma non nella corrispondente verticale, un gruppo di cinque piani associati ([5]).

7. Dati cinque piani indipendenti e non associati, le rette ad essi incidenti sono ∞^1 e costituiscono una rigata del 5^0 ordine, giacchè uno qualunque di quei cinque piani taglia la varietà delle rette incidenti agli altri quattro secondo una curva del 3^0 ordine, ed uno spazio qualunque passante per esso contiene due di queste rette, cioè due generatrici della rigata; od anche perchè la rigata determina su due di quei cinque piani due cubiche punteggiate univocamente ed aventi un punto unito. Quindi un sesto piano qualunque taglia la rigata in 5 punti; oppure è incontrato da tutte le generatrici negl'infiniti punti di una curva, che sarà del 3^0 ordine come quella secondo cui la rigata incontra ciascuno dei primi cinque piani. Tralasciando per ora questo caso particolare, e ricordando la proposizione del n^0 4, abbiamo:

Sei piani indipendenti sono nel caso più generale incidenti a cinque rette determinate, le quali sono tra loro associate.

([5]) Altre proprietà di questa notevole figura e della sua projezione dal punto di concorso dei sei piani (1) si potrebbero avere osservando che uno qualunque di questi è direttore (luogo di punti doppi) per un'omografia involutoria che scambia fra loro le due terne di spazi 1, 2, 3 e 4, 5, 6.

E per dualità:

Date sei rette indipendenti vi sono, nel caso più generale, cinque determinati piani incidenti ad esse, e questi sono tra loro associati.

8. I piani incidenti a cinque date rette indipendenti non associate formano una varietà del 5^0 ordine. Scelti tra questi ∞^1 piani, cinque non associati ed un altro qualunque, come le cinque rette date incidenti a tutti sei questi piani non sono tra loro associate, così (n^0 7) tutte le ∞^1 rette incidenti ai primi cinque piani saranno pure incidenti al sesto, cioè a tutti gli ∞^1 piani. Dunque:

Gli ∞^1 piani incidenti a cinque rette indipendenti non associate sono incidenti ad ∞^1 rette; e dualmente le ∞^1 rette incidenti a cinque piani indipendenti non associati sono incidenti ad ∞^1 piani. La rigata costituita dalle ∞^1 rette e la varietà costituita dagli ∞^1 piani si corrispondono tra loro per dualità e sono entrambe del 5^0 ordine. Ogni piano della varietà sega la rigata secondo una cubica; e per ogni punto della rigata passano due piani della varietà, cioè due cubiche della rigata; questa è, cioè, il luogo dei punti doppi della varietà di piani.

La rigata e la serie infinita di piani sono entrambe ellittiche e con lo stesso modulo (6). Projettate da un punto qualunque dànno, nello spazio ordinario, una rigata ellittica del 5^0 ordine generale e la sua sviluppabile bitangente che è pure ellittica e di 5^a classe (inviluppo dei piani delle cubiche contenute nella rigata).

Torino, Febbraio 1888.

---

(6) Le proprietà trovate della rigata rientrano in quelle delle rigate ellittiche esposte in un altro mio lavoro (Atti Acc. Torino, XXI [V. queste « Opere », I, pp. 56-77]). Tanto quella rigata quanto quella varietà di piani sono *normali* per lo spazio a 4 dimensioni; vedi il n^0 4 della mia Nota « *Sulle varietà algebriche composte di una serie semplicemente infinita di spazi* » (Rend. Acc. Lincei, 3, 1887 [V. queste « Opere », I, pp. 114-118]).