Corrado Segre

Alcune idee di Ettore Caporali intorno alle quartiche piane

Annali Mat. pura ed applicata, Vol. **20** (1892-93), p. 237–242

in: Corrado Segre, Opere, a cura della Unione Matematica Italiana, Volume IV, Edizione Cremonese, Roma, 1963, p. 169–174

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Segre_CW_4_169>

LXVII.

ALCUNE IDEE DI ETTORE CAPORALI INTORNO ALLE QUARTICHE PIANE

« Annali di matematica pura ed applicata »,
serie II, tomo XX, 1892, pp. 237-242.

Fra gli scritti postumi di ETTORE CAPORALI che furon messi alla luce nel volume delle sue *Memorie di Geometria* (Napoli, Pellerano, 1888) vi sono dei frammenti (p. 344 e seguenti) *sulla teoria delle curve piane del quarto ordine* il cui studio può essere ajutato da alcune notizie che il CAPORALI stesso mi aveva dato delle sue ricerche in due lettere dell'estate 1885. Era mia intenzione, appena comparve il detto volume, di pubblicare quelle notizie in un lavoro in cui avrei trattato delle quartiche piane appunto nell'ordine d'idee del CAPORALI e tenendo anche conto di alcune importanti e un po' più antiche ricerche del sig. REYE le quali seguono pure un analogo indirizzo. Ma essendo sempre stato distratto dall'eseguire questo disegno, pubblico ora, con la speranza d'invogliare ed ajutare altri a compiere un tal lavoro, le due lettere del CAPORALI, od almeno quelle parti di esse che presentano un interesse scientifico, accompagnandole solo con brevi commenti (1).

La 1.ª lettera, datata da *Torre del Greco, 11 agosto 1885*, dice:

«... Ella mi domandò una volta di certe ricerche sulle curve del 4.º ordine
« che io avevo intraprese (2). Ci tenevo assai a quelle povere ricerche, ma sono
« da 8 o 9 mesi interrotte affatto. Eccone il concetto.

---

(1) Il sig. WIRTINGER nelle sue *Untersuchungen über Abel'sche Functionen vom Geschlechte 3* comparse ora nei Math. Ann. (XL, p. 261) si riferisce ripetutamente ai frammenti del CAPORALI sulle quartiche piane ed adopera per lo studio di queste delle considerazioni iperspaziali identiche in sostanza a quelle che accennerò qui appresso.

(2) Di queste ricerche egli m'aveva parlato brevemente a Torino un anno avanti.

« Siano dati un sistema lineare S di coniche, di k dimensioni, e, in questo, « un sistema quadratico Σ di $k-1$ dimensioni. Fra le coniche di S e i sistemi « lineari di $k-1$ dimensioni (pure di S) si può stabilire la polarità rispetto a Σ. « Preso un punto P qualunque del piano, per esso passa un sistema ∞^{k-1} di « coniche di S, al quale corrisponde per reciprocità rispetto a Σ una conica C « (di S). Così ad ogni punto P è *congiunta* una conica C. Il luogo dei punti pei « quali passano le coniche congiunte è una curva del 4.⁰ ordine f. Si hanno così « varie generazioni della curva generale del 4.⁰ ordine, nelle quali si possono far « rientrare molte di quelle conosciute, per es. quella per fasci projettivi di coni- « che. La generazione suindicata si può enunciare più semplicemente in certi casi. « Così, per $k=2$ la f non è altro che l'inviluppo del sistema Σ. Per $k=3$ il « sistema Σ contiene due serie ∞^1 di fasci di coniche; e la f è simultaneamente « il luogo dei punti base dei fasci delle due serie: due fasci della stessa serie « sono projettivi e la generano.

« Tutte le ricerche conosciute intorno alla curva biquadratica rientrano in « quest'ordine d'idee e vi pigliano sistema. Così, quando la curva si può rappre- « sentare mediante la somma di $k+1$ biquadrati (ossia possiede ∞^{4-k} coniche « apolari) fra le infinite generazioni suddette ve n'è una nella quale la conica « congiunta ad un punto è la sua conica polare rispetto alla f stessa. Io ho stu- « diato particolarmente il caso di $k=3$, nel quale la f possiede una schiera di « coniche apolari e il covariante S si riduce a quattro rette. Vi sono bellissime « proprietà. Per es. la curva è generata da due serie ∞^1 di quadrangoli, i cui « lati segano f armonicamente e i cui vertici descrivono la hessiana di f.

« Se inoltre l'invariante cubico di f si annulla, allora la curva diviene in- « teressantissima. I suoi flessi si dividono in due gruppi di 12 punti ciascuno e « ogni gruppo è formato dai vertici di quattro trilateri sizigetici. È la curva « della quale accennai l'esistenza due anni fa in una breve Nota e della quale « ho poi trovate altre interessanti proprietà.

« Ma, come le ho detto, ho da molto tempo interrotto. Inutile dire che mi « giovavo moltissimo delle considerazioni sugli spazi di 3, 4, 5 dimensioni riferiti « projettivamente ai sistemi lineari di coniche. Avevo anche pensato un po' allo « studio analogo dei sistemi quadratici di quadriche, per dedurne una classifica- « zione projettiva delle superficie del 4.⁰ ordine... »

Quanto allo studio qui accennato dei sistemi quadratici di quadriche, e delle superficie del 4.⁰ ordine in relazione con essi, esso era già stato avviato (cosa che pare non fosse nota al CAPORALI) dal sig. REYE, specialmente nella Memoria, datata dal 1876, *Ueber die reciproke Verwandtschaft von F^2-Systemen und Φ^2-Geweben und die quadratischen F^2-Systeme achter Stufe* (Journal für Math., 82, p. 173); lavoro ricco di considerazioni nuove e feconde, da collocarsi, insieme con altri precedenti dello stesso Autore, fra i moderni lavori di geometria projettiva a più dimensioni: elementi o punti delle varietà di cui esso tratta essendo le quadriche (dello spazio ordinario).

Appunto in considerazioni della stessa natura si trova la ragione dei principali fatti noti relativi alle quartiche piane, e di quelli annunziati dal CAPORALI. Invero poichè essi si riferiscono quasi sempre a relazioni tra una quartica e delle coniche (in particolare delle coppie di rette), è naturale di ricorrere per studiarli a quella superficie omaloide normale del 4.⁰ ordine F_2^4 dello spazio a cinque dimensioni S_5 che è rappresentata sul piano π dalle ∞^5 coniche di questo [3]. Indicando con $x_1\, x_2\, x_3$ le coordinate di punti in π, e con X_{ik} (ove $i, k = 1, 2, 3$ e $X_{ik} = X_{ki}$) le sei coordinate in S_5, la F_2^4 si può intendere riferita al piano π mediante le formole: $X_{ik} = x_i x_k$. Ciò posto l'equazione di una quartica $f(x) \equiv a_x^4 = 0$ di π si potrà scrivere (in infiniti modi) come un'equazione quadratica tra le X; e quindi la quartica f avrà per imagine su F_2^4 una curva C^8 intersezione di questa superficie con una varietà quadratica M_4^2, e quindi con ∞^6, poichè F_2^4 sta su ∞^5 M_4^2. La polarità rispetto ad una qualunque di quelle ∞^6 varietà quadratiche dà subito origine a quella relazione fra punti di π e coniche *congiunte* (rispetto ad un sistema quadratico Σ) di cui parla il CAPORALI, e da cui trae un modo di generazione della quartica f. Se poi quella polarità *degenera*, pel fatto che la M_4^2 abbia un punto, o retta, o piano, doppio, la generazione si semplifica: corrispondentemente al fatto che il sistema quadratico Σ di coniche si riduce ad uno giacente in un sistema lineare S di 4, 3, 2 dimensioni, rappresentato dagl'iperpiani passanti pel punto, retta o piano doppio della M_4^2. Nell'ultimo caso, gli ∞^1 iperpiani tangenti a questa varietà quadratica lungo i suoi ∞^1 spazî S_3 generatori toccano C^8 nelle quaterne di punti d'incontro di F_2^4 con questi S_3; e quindi hanno per imagini su π delle coniche quadritangenti ad f: si ottiene cioè la generazione della quartica come inviluppo di una ∞^1 quadratica di coniche. Nel secondo caso invece la M_4^2 contiene *due* schiere di ∞^1 spazî S_3 generatori analoghe a quelle delle generatrici di una quadrica ordinaria (sezione della M_4^2 con un S_3 che non incontri la retta doppia); ed in corrispondenza si avranno su f due schiere di ∞^1 quaterne di punti, sì che due quaterne qualunque di schiere diverse stanno sempre in una stessa conica (sono *residue*): donde la generazione della quartica mediante fasci projettivi di coniche, ecc.

Tra le ∞^6 M_4^2 passanti per la C^8 ve n'è sempre una distinta da tutte le altre, la quale analiticamente è data dall'equazione

---

(3) VERONESE, *La superficie omaloide normale* ecc., Mem. Acc. Lincei, (3) XIX, 1884; SEGRE, *Considerazioni intorno alla geometria delle coniche di un piano* ecc., Atti Acc. Torino, 20, 1885 [V. questo volume, pp. 1-17].

$a_x^2\, a_y^2 = 0$, quando vi si ponga $x_i\, x_k = y_i\, y_k = X_{ik}$, e geometricamente è caratterizzata dall'essere apolare ed armonica (come luogo) a tutte le varietà di 2.ª classe iscritte nella Φ_2^4 che è inviluppo degl'iperpiani tangenti a F_2^4 lungo coniche: o, come si dice più brevemente, dall'essere *apolare alla* Φ_2^4 (4). La polarità rispetto ad essa si rispecchia sul piano π nella corrispondenza di polarità — fra curve di 2.º ordine e curve di 2.ª classe, ed in particolare fra punti e coniche — rispetto alla quartica f, che vien determinata dall'equazione $a_x^2\, a_y^2 = 0$. Ad una conica apolare rispetto alla quartica corrisponde un punto doppio per la M_4^2; e così questa acquista una retta doppia, se la quartica ammette una schiera di coniche apolari; ecc. ecc.

Avendo io comunicato al Caporali, forse con qualche maggior sviluppo, questo modo con cui vedevo le cose da lui enunciate, — metodo che non è del resto se non un'applicazione particolare di un procedimento molto generale, utile per lo studio di enti svariatissimi, — egli mi rispose in un'altra lettera da *Torre del Greco, 13 settembre 1885* quanto segue.

«... Ciò che Ella mi scrive intorno ai miei studi sulle curve del 4.º ordine « è interessante e dimostra che Ella ha immediatamente penetrato lo spirito di « quelle ricerche. Per quanto poco avanzate, esse hanno una storia complicata e « in relazione con diverse cause estranee alla scienza che m'impediscono da tre « anni di attendere allo studio con quella regolarità e quella perseveranza che « sole permettono di cavarne buoni frutti.

« Tre o quattro anni fa, studiando le Memorie algebriche intorno alle curve « piane del 3.º ordine, mi accorsi per caso che il combinante $N = (a\, \alpha\, u)\, a_x^2\, \alpha_x^2$ « (dove $a_x^3 = 0$, $\alpha_x^3 = 0$ sono le equazioni d'una cubica e della sua hessiana) rap- « presenta, nelle variabili x, una curva del 4.º ordine che ha per flessi i 12 vertici « dei trilateri appartenenti al fascio $a_x^3 + \lambda \alpha_x^3 = 0$. L'esistenza di una rete (i pa- « rametri essendo le u) di curve del 4.º ordine con 12 flessi in comune riusciva « per me nuova ed è senza dubbio interessante, non è vero? Dimodochè mi posi « ad esaminare meglio quella curva e riconobbi che gli altri 12 flessi formavano « una configurazione perfettamente analoga dando luogo ad un secondo fascio « sizigetico. Pel momento la cosa rimase lì: ma più tardi riportai di nuovo la « mia attenzione su quel fatto nuovo e notevole, che vi siano due fasci sizigetici « i quali dànno lo stesso combinante N. E, mentre al principio m'ero servito « d'equazioni canoniche, volli intraprendere i calcoli simbolici necessarii a dimo- « strare quella proprietà e a dedurre dall'uno dei due fasci l'altro. Feci all'Acca- « demia la comunicazione provvisoria *Sopra una certa curva del* 4.º *ordine* (5) e mi

(4) Per tal modo le ∞^{14} quartiche del piano π sono rappresentate *univocamente* dalle ∞^{14} varietà M_4^2 di S_5 apolari a Φ_2^4.

(5) Rend. Acc. Napoli, dicembre 1882.

« posi al lavoro. Mi trastullai per un pezzo in laboriose calcolazioni (del resto « interessanti), ma ad un certo punto fui deviato momentaneamente dagli studi « ed ogni cosa rimase ed è rimasta interrotta.

« L'anno scorso, senza riprendere i calcoli, tornai sulle considerazioni geome- « triche e m'accorsi che la curva possedeva una schiera di coniche apolari, senza « però essere la più generale di questa specie. Queste curve, è facile vederlo, « possono studiarsi con successo nel piano rappresentativo della superficie romana « di STEINER. Fu allora che la ricerca cominciò ad allargarsi sino a che grada- « tamente ha preso l'aspetto attuale. Nelle vacanze dell'anno scorso cominciai « dunque a giovarmi delle considerazioni sugli spazî di più dimensioni, colle « quali ho antica famigliarità. Rifeci le proprietà delle tangenti doppie, special- « mente per le curve dotate di punti singolari: lavoro piuttosto minuto. Iniziai « anche lo studio dei flessi colla ricerca dei sistemi di coniche biosculatrici (è « chiaro che le coniche di un sistema riescono biosculatrici al loro inviluppo, « quando sono rappresentate dai punti d'una curva le cui tangenti incontrano « F_2^4 (6)). Dovetti però presto sospendere per malattie di famiglia e non ho più « ripreso.

« Quando Ella pubblicò la sua Memoria sulla geometria delle coniche, vidi « immediatamente il partito che si poteva trarre dall'uso sistematico di quel « modo di rappresentazione e che mi è confermato dalla sua... lettera : non ripresi « però, nè potrò subito riprendere le ricerche, benchè precisamente ora, avendo « acquistata tutta la loro generalità, siano nello stadio più interessante. Lo farò « però a novembre, almeno spero.

(7) « Per cambiare discorso, le parlerò d'un'altra mia piccola Nota incompiuta « che potrà pure interessarla. È notissimo nello spazio ordinario il problema di « determinare le singolarità ordinarie d'una curva intersezione parziale di due « superficie quando si conoscano quelle della residuale intersezione : e l'altro « susseguente di trovare le intersezioni di tre superficie assorbite da una curva « comune. Le notissime soluzioni che se ne leggono in SALMON e in CREMONA si « estendono facilmente in certi casi allo spazio di n dimensioni : quando cioè si « tratta della intersezione parziale di più varietà di $n-1$ dimensioni, definite « mediante altrettante equazioni generali nel loro grado. Il VERONESE ha trattato « il caso più ovvio in cui questa intersezione è una curva. Ma quando le varietà « che si segano hanno meno di $n-1$ dimensioni e sono esse stesse intersezioni « parziali, il metodo di SALMON non si può più seguire. Si hanno i primi esempi « di questa difficoltà nello spazio di 4 dimensioni in questi due problemi : 1.° « Quando la curva comune ad una *varietà* e ad una superficie si spezza in due « parti, date le singolarità dell'una trovare quelle dell'altra. 2.° Trovare i punti « d'intersezione di due superficie assorbite da una curva comune.

---

(6) Ciò non è pienamente esatto. Quando la tangente in un punto alla curva rappresentante di un sistema di coniche incontra F_2^4, la conica corrispondente a quel punto ha *due contatti quadripunti* coll'inviluppo...

(7) Quanto segue non riguarda più le quartiche piane, ma lo riporto qui ugualmente perchè parmi possa pure interessare : trattandosi di una questione importantissima, che, con quel grado di generalità, non si trova nel volume di Memorie del CAPORALI, nè da altri è stata finora risolta.

« Ora io sono pervenuto ad una formola generalissima la quale, quando sia « dato un numero qualunque di varietà ad un numero qualunque di dimensioni, « fornisce le singolarità fondamentali della varietà ad esse comune, se è semplice; « ovvero le relazioni fra le singolarità delle due parti, se essa si spezza. Le co- « municherei addirittura questa formola, che può essere utile pel gran numero « di casi che abbraccia, se qui in campagna avessi le mie note o se la memoria « mi aiutasse. Essa è complicata, perchè non solo contiene gli ordini e le serie « di ranghi delle diverse varietà (le quali possono anche possedere singolarità « superiori) ma altri numeri il cui significato offre molto interesse. Una varietà « può essere contenuta in un'altra *in diversi modi*, ognuno dei quali è caratteriz- « zato dai valori di certi numeri, valori che bisogna conoscere per poter risolvere « parecchi problemi. Per darle un esempio, nello spazio ordinario, quando si dice « che una curva giace sopra una superficie dotata di curva doppia, bisogna dare « il numero dei punti che la curva ha in comune colla curva doppia della su- « perficie, numero che, *entro certi limiti*, può variare per la stessa curva e la stessa « superficie. Ciò posto, Ella comprenderà facilmente come per una superficie, an- « che generale, d'uno spazio di più di 3 dimensioni, ci sia un numero analogo, « poichè essa si proietta nello spazio ordinario in una superficie con curva dop- « pia. La cosa naturalmente si complica per le altre varietà e la fatica maggiore « l'ho fatta per stabilire questi concetti. »

Torino, Agosto 1892.