Corrado Segre

Nota sul lavoro di R. De Paolis: Teoria generale delle corrispondenze proiettive e degli aggruppamenti proiettivi sulle forme fondamentali a due dimensioni

Rend. R. Acc. Naz. Lincei, Vol. **3** (1894), p. 227–229

in: Corrado Segre, Opere, a cura della Unione Matematica Italiana, Volume IV, Edizione Cremonese, Roma, 1963, p. 175–178

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Segre_CW_4_175>

LXVIII.

NOTA SUL LAVORO DI R. DE PAOLIS:

TEORIA GENERALE DELLE CORRISPONDENZE PROIETTIVE E DEGLI AGGRUPPAMENTI PROIETTIVI SULLE FORME FONDAMENTALI A DUE DIMENSIONI [*]

« Atti della Reale Accademia dei Lincei »,
Rendiconti; Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali,
serie quinta, vol. III, 1894-2º semestre, pp. 227-229.

Le pagine precedenti (a cui ho conservato il titolo originale, sebbene della *teoria generale* a cui si riferiscono contengano solo il principio) costituiscono la 3ª (ed ultima) Parte — fino ad oggi inedita — del manoscritto che, sotto il titolo « *Fondamenti di una teoria, puramente geometrica, delle curve e delle superficie* », il compianto De Paolis presentò a quest'Accademia nel concorso al premio Reale per la Matematica relativo al 1887. Veggansi in proposito la Relazione sul detto concorso in questi Rendiconti t. V (2º sem. 1889), p. 300, e quella recentissima (che propone un premio postumo al De Paolis) nel presente volume dei Rendiconti, p. 185; nonchè i Cenni biografici del De Paolis da me pubblicati nel t. VI (1892) dei Rendiconti del Circolo matematico di Palermo [**]. Si sa che, dopo presentato quel lavoro pel concorso, l'Autore si occupò di completarlo e di stamparlo. Ed in fatti le prime due parti di esso furono pubblicate, con vari rimaneggiamenti e con qualche ampliamento: v. rispettivamente la *Teoria dei gruppi geometrici e delle corrispondenze che si possono stabilire tra i loro elementi* (Memorie della Società Italiana delle scienze, t. 7, ser. 3ª, 1890) e *Le corrispondenze proiettive nelle forme geometriche fondamentali di* 1ª *specie* (Memorie della R. Accademia delle scienze di Torino, t. 42, ser. 2ª, 1892). Ma la morte — tanto funesta ed immatura! — impedì all'A. di completare

[*] Questo lavoro porta la data del 30 dicembre 1887 [N. d. R.].
[**] "Cenni" riprodotti nella 2ª parte di questo volume [N. d. R.].

questa terza Parte, la quale, per mancanza di tempo, s'era ridotta nel manoscritto a pochi cenni, mentre avrebbe richiesto un ampio sviluppo.

Incaricato dall'egregia Famiglia DE PAOLIS di esaminare alcune carte del nostro compianto collega (nel che fui gentilmente aiutato, fra gli altri, dai signori CIANI, ENRIQUES e LAZZERI), non rinvenni tra esse nulla che si riferisse a questo lavoro. Ho perciò ristampata qui quella terza Parte tal quale essa si trova nel manoscritto conservato dall'Accademia: persuaso che essa possa servire a dar qualche idea del metodo con cui l'A. intendeva di applicare i risultati delle Parti precedenti e specialmente della seconda, relativa agli aggruppamenti projettivi nelle forme di 1ª specie, allo studio degli aggruppamenti projettivi di specie superiore, e quindi delle curve e superficie algebriche. Di mutamenti rispetto al manoscritto non ho fatto altro che: correggere poche sviste materiali; introdurre una nuova numerazione dei paragrafi, invece di continuar quella delle Parti precedenti; ed adottare — come ha fatto l'A. nella 2ª delle suddette Memorie stampate — i simboli Ap, Ip per indicare gli aggruppamenti *projettivi* e le involuzioni *projettive*, in luogo di A ed I che si trovano nel manoscritto.

Mi permetto di aggiungere qui poche parole intorno a quelli fra gli altri manoscritti inediti del DE PAOLIS che, come dissi, io fui incaricato di esaminare. Fra essi non ne trovai alcuno che fosse pronto per la stampa, o che (secondo me) l'A. dopo qualche ritocco avrebbe volentieri pubblicato. Ho perciò rinunziato ad occuparmi della loro pubblicazione. A vero dire, uno di essi, col titolo « *Sulla Jacobiana di quattro superficie* » e con la data del 1885, ha tutti i caratteri esterni di un manoscritto da stampare. Il suo scopo è di determinare la multiplicità che la Jacobiana di quattro superficie ha lungo una curva che sia multipla rispettivamente secondo i_1, i_2, i_3, i_4 (≥ 0) per queste; e trova che essa è *in generale* $i_1 + i_2 + i_3 + i_4 - 2$, ma diventa $i_1 - 1$ se tre delle i, p. e. i_2, i_3, i_4, sono nulle, e diventa $4i - 1$ se le quattro superficie hanno lo stesso ordine e la stessa multiplicità i lungo la curva. Il metodo adoperato consiste nel condurre per la curva una superficie razionale (un monoide); l'intersezione di questa con la detta Jacobiana vien rappresentata da un'equazione fra i parametri della superficie razionale, da cui si dovrà staccare il fattore rappresentante la curva data tante volte quanta è la multiplicità cercata di questa curva per la Jacobiana. Questo concetto, diverso da quelli usati prima da altri per problemi siffatti, sembra ingegnoso e semplice. Ma il procedimento con cui viene attuato nel manoscritto non mi pare soddisfacente: e questa credo sia la causa per cui l'A. rinunziò poi alla pubblicazione.

Altre carte si riferiscono all'*esagrammo di* PASCAL, che tentano di studiare ricorrendo ad una figura stereometrica. Poco prima — scrive l'A. — il CREMONA ed il CAPORALI avevano dedotte le principali proprietà dell'esagrammo da figure che si presentano nelle superficie cubiche e nella superficie di KUMMER. Egli invece si propone di dedurle considerando la conica come sezione piana di un iperboloide: pei 6 vertici dell'esagono passano due sestuple $p_1 \dots p_6$, $q_1 \dots q_6$ di generatrici dell'iperboloide; le coppie di rette $p_r\, q_s$ $(r \neq s)$ determinano altri 30 punti π_{rs} e 30 piani Π_{rs}; le coppie di punti come $\pi_{rs}\, \pi_{sr}$ determinano 15 rette; ecc. ecc.: e così nasce una figura stereometrica le cui proprietà sono strettamente legate a quelle dell'esagrammo. Però la deduzione di queste ultime non viene spinta abbastanza in là; e nemmeno si può dire che si faccia molto semplicemente.

Infine meritano menzione alcuni studî su quistioni relative a sistemi lineari di curve piane, fra cui principalmente le seguenti.

1°. Dati ν sistemi lineari projettivi di curve $C', \dots, C^\nu$, d'ordine $n_1, \dots, n_\nu$, ognuno dei quali sia $\infty^{\nu+\tau}$ ove $\tau = 0, 1, \dots, \nu-2$, se x, y sono due punti tali che i sistemi omologhi (nella detta projettività) $\infty^{\nu-2}$ di curve $C', \dots, C^{\tau+2}$, i quali passano per x, passino pure per y insieme coi sistemi omologhi $\infty^{\nu-2}$ di curve $C^{\tau+3}, \dots, C^\nu$, tra i punti x, y del piano si avrà una corrispondenza (α_x, α_y), essendo

$$\alpha_x = \sum_1^{\tau+2} n_\varrho\, n_\sigma - \sum_1^{\tau+2} S r_{\varrho b}\, r_{\sigma b} - \frac{(\tau+1)(\tau+2)}{2}$$
$$\alpha_y = \sum_1^{\nu} n_\varrho\, n_\sigma - \sum_1^{\nu} S r_{\varrho b}\, r_{\sigma b} - \frac{(\tau+1)(\tau+2)}{2},$$

ove le $r_{\varrho b}$ indicano le multiplicità che il sistema lineare C^ϱ ha nei punti base b (che possono esser comuni anche a più sistemi, ed ai quali vanno estese le somme indicate con S). Studio di questa corrispondenza: linee che corrispondono alle rette; punti fondamentali; linee fondamentali; ecc.. Curva unita, ossia luogo dei punti per ciascun dei quali passano ν curve omologhe dei ν sistemi in guisa però che le $C', \dots, C^{\tau+2}$ vi si tocchino: è d'ordine

$$(\tau+2) \sum_1^{\nu} n_\varrho + (\tau+1) \sum_1^{\tau+2} n_\varrho - 3\, \frac{(\tau+1)(\tau+2)}{2},$$

con determinate multiplicità nei punti base.

2^0. Dati ν sistemi lineari projettivi di curve $C', \dots, C^\nu$, di dimensione $\nu + \tau - 1$, ove $\tau = 0, 1, \dots, \nu - 2$, se x, y indicano due punti tali che i sistemi omologhi $\infty^{\nu-3}$ di curve $C', \dots, C^{\tau+2}$, i quali passano per x, passino pure per y insieme coi sistemi omologhi $\infty^{\nu-3}$ di curve $C^{\tau+3}, \dots, C^\nu$, i luoghi di x e di y sono due curve di ordini

$$\sum_1^{\tau+2} n_\varrho \left\{ \sum_1^\nu n_\varrho n_\sigma - \sum_1^\nu S r_{\varrho b} r_{\sigma b} - \frac{\tau(\tau+1)}{2} \right\} - \\ - \frac{(\tau+1)(\tau+2)}{2} \sum_1^\nu n_\varrho + \frac{\tau(\tau+1)(\tau+2)}{2},$$

$$\sum_1^\nu n_\varrho \left\{ \sum_1^{\tau+2} n_\varrho n_\sigma - \sum_1^{\tau+2} S r_{\varrho b} r_{\sigma b} - \frac{(\tau+1)(\tau+2)}{2} \right\} - \\ - \frac{\tau(\tau+1)}{2} \sum_1^{\tau+2} n_\varrho + \frac{\tau(\tau+1)(\tau+2)}{2};$$

caratteri di queste curve, ecc.

3^0. Con gli stessi dati dei due problemi precedenti, solo con la riduzione dei ν sistemi lineari projettivi alla dimensione $\nu + \tau - 2$, si ha un numero finito, che vien determinato, di coppie di punti x, y simili a quelle dei problemi precedenti.