Corrado Segre

Ricerche sulle omografie e sulle correlazioni in generale e particolarmente su quelle dello spazio ordinario considerate nella geometria della retta

Mem. R. Acc. Scienze Torino, Vol. **37** (1885), p. 395–425

in: Corrado Segre, Opere, a cura della Unione Matematica Italiana, Volume IV, Edizione Cremonese, Roma, 1963, p. 18–57

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Segre_CW_4_18>

LVII.

RICERCHE SULLE OMOGRAFIE E SULLE CORRELAZIONI IN GENERALE E PARTICOLARMENTE SU QUELLE DELLO SPAZIO ORDINARIO CONSIDERATE NELLA GEOMETRIA DELLA RETTA

«Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino»,
serie II, vol. XXXVII, pp. 395-425.

Una delle teorie algebriche più interessanti e più studiate è, come si sa, quella delle sostituzioni lineari ortogonali. Generalizzata dal sig. HERMITE (¹), che studiò e rappresentò pel primo, nel caso di 3 variabili, sostituzioni lineari che trasformano in sè una forma quadratica generale, e poi ancor oltre dal sig. CAYLEY, che estese i risultati di quello scienziato al caso di n variabili e dimostrò che l'equazione da cui dipende il problema è reciproca (²), essa divenne da un lato completa quando più recentemente il sig. FROBENIUS, colla considerazione dei divisori elementari di un determinante ed in base a noti lavori del sig. WEIERSTRASS, potè stabilire (³) le condizioni che caratterizzano una sostituzione lineare atta a trasformare in se stessa una forma quadratica di determinante non nullo.

(¹) *Sur la théorie des formes quadratiques*, Crelle's J., 47, p. 313.

(²) *Sur la transformation d'une fonction quadratique en elle-même par des substitutions linéaires*, Crelle's J., 50, p. 288.

(³) *Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen*, Crelle's J., 84, p. 1. Questa Memoria è di grande importanza sì per l'analisi che per la geometria; nel presente lavoro do applicazioni geometriche di alcuni dei risultati in essa contenuti, ma vari altri di questi condurrebbero pure, convenientemente tradotti, a proposizioni geometriche importanti. Non ho citato la Memoria del signor ROSANES: *Ueber die Transformation einer quadratischen Form in sich selbst* (Crelle's J., 80, p. 52), perchè essa non ha molta importanza pel mio argomento.

È singolare che non siasi ancora tentato di trarre profitto da quelle ricerche per la geometria. Esse dànno immediatamente proprietà delle omografie di uno spazio lineare ad n dimensioni, le quali mutano in sè una quadrica generale ad $n-1$ dimensioni. Se si suppone successivamente $n=2$ e $n=3$, si hanno proposizioni interessanti su quelle particolari omografie del piano e dello spazio ordinario che mutano in sè rispettivamente una conica ed una quadrica fisse, omografie incontrate dal sig. KLEIN (4) e dal sig. LINDEMANN (5) come *movimenti* in una metrica generale del piano o dello spazio (6). Per $n=5$, supponendo che la quadrica a 4 dimensioni che si considera sia la quadrica di rette, le omografie che la mutano in se stessa coincidono colle omografie e correlazioni dello spazio ordinario, le quali si possono in tal modo studiare e classificare dal punto di vista della geometria della retta. Per $n=4$ si ottengono le omografie e le correlazioni dello spazio ordinario che mutano in se stesso un complesso lineare non speciale (od anche, dando un altro significato agli elementi dello spazio a 4 dimensioni che si viene a considerare, le trasformazioni dello spazio ordinario appartenenti al gruppo delle inversioni).

Uno studio sulle omografie in uno spazio lineare qualunque da me pubblicato tempo fa (7) mi servì di base per fare le ricerche geometriche ora accennate. Nel presente lavoro comincio dallo studiare (§ 1) quelle particolari omografie di uno spazio lineare ad n dimensioni, le quali trasformano in se stessa una data quadrica ad $n-1$ dimensioni, dandone le proprietà caratteristiche, che possono servire a classificarle, distinguendole nel caso di n dispari in due specie di proprietà molto diverse, e mostrando come esse equivalgano, se si considerano come trasformazioni della quadrica in se stessa, ad un certo numero di proiezioni successive della quadrica su se stessa. Supposto poi $n=5$ e che la quadrica trasformata in se stessa sia la quadrica delle rette dello spazio ordinario, considero anzitutto

(4) *Ueber die sogenannte nicht-Euklidische Geometrie*, Math. Ann., IV e VI.

(5) Math. Ann., VII.

(6) Più recentemente le omografie dello spazio ordinario che mutano in sè una quadrica fissa furono pure studiate sinteticamente dal sig. ZEUTHEN nella sua *Théorie des figures projectives sur une surface du second ordre* (Math. Ann., XVIII, pp. 33-68).

(7) *Sulla teoria e sulla classificazione delle omografie in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni*, Mem. Acc. Lincei, (3) 19 [V. queste « Opere », III, pp. 304-333]. D'or innanzi questa Memoria verrà citata brevemente col nome di « *Omografie* ».

il caso in cui la trasformazione è di 1ª specie, cioè si riduce ad una omografia dello spazio ordinario, e poi il caso in cui essa è di 2ª specie, cioè si riduce ad una correlazione. Nel 1º caso ottengo (§ 2), accanto alla classificazione delle omografie dello spazio ordinario da me fatta nello studio citato, una nuova classificazione dal punto di vista della geometria della retta, la quale fornisce vari risultati che mi paiono notevoli. Una ricerca su argomento affine a questo era già stata fatta dal sig. VOSS [8], il quale si era occupato di studiare e classificare il sistema di due quadriche dello spazio ordinario dal punto di vista della geometria della retta; anzi si può dire che in sostanza lo scopo delle due ricerche è identico, poichè lo studio del sistema di due quadriche coincide, com'io mostrai, collo studio dell'omografia determinata dalla composizione delle polarità rispetto a quelle. Però la diversità del mio metodo da quello seguito dal sig. VOSS, la mancanza nel lavoro di questo di ragionamenti sintetici per illustrare i risultati trovati analiticamente, ed il fatto che, non conoscendo ancora quello scienziato il teorema che il sig. FROBENIUS pubblicò un anno dopo e che già citai, egli introdusse nella sua classificazione qualche caso che non può presentarsi, mi fanno pensare che questo paragrafo del mio lavoro in cui classifico le omografie nella geometria della retta servirà pure a completare il lavoro del sig. VOSS [9].

Prima di passare al 2º dei due casi considerati, cioè alle correlazioni dello spazio ordinario nella geometria della retta, mi occupo nel § 3 delle correlazioni in uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni, mostrando varie loro importanti proprietà ed in particolare come esse si possano studiare e classificare basandosi su due teoremi del sig. KRONECKER intorno alle trasformazioni cogredienti

---

(8) *Die Liniengeometrie in ihrer Anwendung auf die Flächen zweiten Grades*, Math. Ann., X, p. 143.

(9) Durante la stampa del presente lavoro venni a conoscere un altro lavoro del sig. VOSS, posteriore a quello citato, e avente per titolo *Zur Theorie der orthogonalen Substitutionen* (Math. Ann., XIII, pp. 320-374). In esso, cogli eleganti metodi analitici di cui suole far uso quello scienziato nei suoi lavori, le sostituzioni ortogonali vengono studiate non solo come appartenenti all'algebra, ma anche come trasformazioni di una quadrica a più dimensioni in se stessa, vengono risolte parecchie questioni geometriche che in tal modo si presentano e fatte diverse applicazioni, specialmente allo spazio ordinario. (In particolare vi si trova corretta l'inesattezza, a cui accennai, che si trova nel lavoro precedente). Vi sono per conseguenza nel presente lavoro dei punti di contatto con questo del sig. VOSS, ed io avrò cura di rilevarli in note a piè di pagina.

delle forme bilineari [10]. Valendomi dei risultati così ottenuti classifico poi e studio (§ 4) le correlazioni dello spazio ordinario sia dal punto di vista consueto sia da quello della geometria della retta, mostrando come tutti gli enti più importanti che occorra considerare nella correlazione si specializzino nei vari casi particolari. Un principio di classificazione delle correlazioni dello spazio ordinario (dal punto di vista consueto) si trova già in un lavoro analitico del sig. Battaglini [11], ma non vi è sviluppato; vari casi interessanti vi mancano affatto e quelli che vi sono non si trovano approfonditi quanto io qui volli fare. Si noti pure che colla classificazione delle correlazioni è pure fatta quella del sistema di una quadrica ed un complesso lineare di rette: infatti si può dire che l'una cosa coincide coll'altra.

Alla fine mi fermo brevemente su quelle particolari omografie e correlazioni dello spazio ordinario le quali mutano in se stesso un complesso lineare non speciale (§ 5) e su alcuni invarianti delle omografie e delle correlazioni considerate sia nella geometria ordinaria sia in quella della retta (§ 6).

§ 1.

Omografie di uno spazio lineare qualunque che trasformano in se stessa una data quadrica.

1. In uno spazio lineare ad un numero qualunque n di dimensioni S_n un'omografia [12] è rappresentata nel modo più generale da un sistema di $n+1$ equazioni lineari

$$\sum_i a_{ik}\, x_i = \sum_i b_{ik}\, y_i \qquad (i, k = 1, \dots, n+1). \tag{1}$$

Essa è allora caratterizzata completamente nelle sue proprietà proiettive dal determinante

$$|\, p a_{ik} + q b_{ik} \,| \tag{2}$$

([10]) *Ueber die congruenten Transformationen der bilinearen Formen*, Monatsber. Akad. Wiss. Berlin, 1874.

([11]) *Sulle forme quaternarie bilineari*, Mem. Acc. Lincei, (3) 12.

([12]) Considererò sempre esclusivamente omografie non degeneri e tra due spazi sovrapposti. Inoltre nel presente § dicendo semplicemente *omografie* intenderò (quando dal senso non si scorga il contrario) che siano della specie particolare qui definita (n⁰ 1).

e dai suoi divisori elementari (*Omografie*, n⁰ 11). Ora se quell'omografia (1) trasforma in se stessa una quadrica non degenere

$$f \equiv \sum_{lm} c_{lm}\, x_l\, x_m = 0, \tag{3}$$

quel determinante *caratteristico* avrà certe particolari proprietà date dal seguente teorema del sig. FROBENIUS [13]:

Affinchè l'omografia (1) *trasformi in se stessa una quadrica non degenere è necessario e sufficiente che i divisori elementari del determinante* (2) *siano a coppie di ugual grado e annullantisi per valori reciproci di* $\mathrm{p}:\mathrm{q}$, *eccetto quelli di grado impari che si annullassero per* $\mathrm{p}:\mathrm{q} = \pm 1$ [14].

Quest'importante proposizione, che comprende tutta la classificazione delle omografie atte a trasformare quadriche generali in se stesse si può interpretare geometricamente [15]. In fatti ad ogni ra-

---

(13) Memoria citata, p. 41. Il mio enunciato è però un po' più generale di quello contenuto nella detta Memoria. Avverto pure che io suppongo, qui e in seguito, che le a_{ik} o le b_{ik} si siano già moltiplicate per un fattore tale che non solo la quadrica (3) si trasformi in se stessa, come ente geometrico, in forza delle (1), ma che da queste segua precisamente $\Sigma c_{lm}\, x_l\, x_m = \Sigma c_{lm}\, y_l\, y_m$. Questa supposizione, senza diminuire sostanzialmente la generalità, ha il vantaggio di abbreviare gli enunciati.

(14) Come nota il sig. FROBENIUS, basta cambiare alla fine di quest'enunciato la parola *impari* in *pari* perchè esso dia invece, nel caso di n impari, le proprietà caratteristiche di un'omografia che trasforma in se stessa, non più una quadrica, ma una forma bilineare alternata di determinante non evanescente, cioè un *sistema nullo* (*Nullsystem*) di S_n. Da questa nuova proposizione seguirà in particolare la classificazione di quelle omografie dello spazio ordinario che mutano in se stesso un complesso lineare non speciale (V. n⁰ 17). Citerò ancora, come altro esempio di risultati geometrici contenuti implicitamente nella Memoria del signor FROBENIUS, il seguente teorema che vi si trova (p. 16) sotto altra forma: « Affinchè un'omografia sia *ciclica*, cioè ripetuta un numero conveniente di volte si riduca alla identità, occorre e basta che i divisori elementari del suo determinante caratteristico siano tutti lineari e s' annullino solo per radici dell'unità ».

(15) Il sig. VOSS nel suo lavoro citato sulle sostituzioni ortogonali, che era già scritto quando comparve la Memoria del sig. FROBENIUS, stabilisce pure (p. 327) quella proposizione ma solo nella parte che riguarda i valori di $p:q$ diversi da ± 1, e quindi ottiene condizioni necessarie ma non sufficienti perchè un'omografia trasformi in se stessa una quadrica. (Non è fuor di luogo notare che alla dimostrazione da lui data si potrebbe sostituirne una assai più semplice basata sulla stessa identità che gli serve a p. 322 per stabilire che il determinante caratteristico ha le radici reciproche).

dice $p:q$ del determinante (2) corrispondono uno spazio (*fondamentale*) di punti uniti ed uno spazio (*fondamentale*) di *piani* [*] (S_{n-1}) uniti dell'omografia; ogni *raggio* (S_1) congiungente due punti corrispondenti incontra i sostegni dei vari spazi fondamentali di piani in punti che con quei due formano un gruppo, il quale rimane sempre proiettivo a se stesso variando quei due punti corrispondenti in S_n ed è pure proiettivo al gruppo formato dalle radici del determinante coi due numeri 0 e ∞, ed al gruppo di piani di un fascio formato nel modo corrispondente per dualità ma scambiando i due spazi omografici (*Omografie*, n^0 12). Ora quel teorema ci mostra che gli spazi fondamentali di punti (e di piani), all'infuori di quelli corrispondenti alle radici $+1$ e -1 quando esistano, si corrispondono a coppie di spazi dotati delle identiche proprietà rispetto all'omografia per modo che sul raggio congiungente due punti corrispondenti questa coppia di punti e le coppie dei punti d'intersezione coi sostegni degli spazi fondamentali corrispondenti di piani sono coppie di un'involuzione.

2. A questo e ad altri risultati geometrici si giunge anche direttamente ricordando che ogni omografia è correlativa alla sua inversa, cioè a quella che se ne ottiene scambiando i due spazi sovrapposti (*Omografie*, n^0 12), e notando d'altra parte che elementi corrispondenti nell'omografia avranno nel nostro caso per polari rispetto ad f (16) elementi corrispondenti nell'omografia stessa, sicchè questa è pure correlativa (polare rispetto ad f) di se stessa (17). Ne segue in fatti che l'omografia sarà proiettiva alla sua inversa e che in questa proiettività saranno corrispondenti, e quindi godranno delle identiche proprietà rispetto all'omografia considerata ed alla sua inversa, due spazi fondamentali di punti (o di piani) di cui l'uno abbia per corrispondente spazio fondamentale di piani (o di punti) lo spazio polare dell'altro rispetto ad f. Da ciò nasce tosto l'invo-

---

[*] V. la (N. d. R.) a p. 28 del vol. III di queste « Opere ».

(16) V. per la teoria generale delle quadriche, qui e nel seguito, la mia Memoria: *Studio sulle quadriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni* (Mem. Acc. Lincei, 36; [V. queste « Opere », III, p. 25]).

(17) In generale si dimostra facilmente che in una varietà qualunque se di due corrispondenze tra i suoi elementi l'una trasforma l'altra in se stessa, viceversa quest'ultima trasformerà quella in se stessa e le due corrispondenze sono scambiabili. Nel nostro caso quella varietà si compone dei punti e piani di S_n e le due corrispondenze sono l'omografia considerata e la polarità rispetto ad f.

luzione considerata, e, come questa ha due elementi doppi, si vede che può solo accadere per uno o due spazi fondamentali di punti (o di piani) di coincidere con quelli che loro corrispondono nel modo detto. (Essi provengono allora dalle radici ± 1 del determinante caratteristico). Ma in questo modo si vede pure, ricordando che ogni spazio fondamentale di punti di un'omografia sta su tutti i sostegni di spazi fondamentali di piani non corrispondenti ad esso, che nel nostro caso gli spazi fondamentali stanno nella seguente relazione colla quadrica f:

Tutti gli spazi fondamentali di punti non corrispondenti a radici ± 1 *stanno sulla quadrica* f *ed hanno per spazi tangenti i sostegni degli spazi fondamentali di piani corrispondenti alle radici reciproche ; inoltre due spazi fondamentali di punti qualunque (anche se corrispondenti a* ± 1*), purchè non corrispondenti a radici reciproche, sono sempre coniugati rispetto ad* f (18).

3. Nei n[i] precedenti abbiamo incontrato dei gruppi di elementi in involuzione; cerchiamo ora il significato delle varie coppie di tali involuzioni. Consideriamo a tal fine l'omografia in cui si corrispondono i due punti

$$x' = x + \varrho' y\,, \qquad x'' = x + \varrho'' y,$$

essendo x, y due punti corrispondenti variabili dell'omografia data (1) e ϱ', ϱ'' due parametri fissi.

Sarà

$$\Sigma\, c_{lm}\, x'_l\, x'_m = \Sigma\, c_{lm}\, x_l\, x_m + \varrho'^2\, \Sigma\, c_{lm}\, y_l\, y_m + 2\varrho'\, \Sigma\, c_{lm}\, x_l\, y_m\,,$$

ossia, per l'ipotesi fatta sull'omografia (1)

$$\Sigma\, c_{lm}\, x'_l\, x'_m = (\varrho'^2 + 1)\, \Sigma\, c_{lm}\, x_l\, x_m + 2\varrho'\, \Sigma\, c_{lm}\, x_l\, y_m\,,$$

---

(18) Negli enunciati parlo sempre di spazi fondamentali corrispondenti alle varie radici, perchè la considerazione di queste li semplifica; ma sarebbe facile sopprimerle dando così a quelli una forma più geometrica. Avvertirò pure che parlando in seguito delle radici ± 1 sottintenderò sempre che esse possono mancare, cioè essere di grado zero; quelle radici sono poi equivalenti per l'omografia, giacchè un cambiamento di segno alle a_{ik} le scambia tra di loro.

A completare il n[0] 2, in cui si ha in parte la dimostrazione sintetica del teorema del sig. FROBENIUS, vi sarebbe da stabilire collo stesso metodo che i divisori elementari di grado pari del determinante (2), i quali corrispondono ad una radice ± 1, sono a coppie di ugual grado; ma non mi è riuscito di farlo.

e similmente

$$\Sigma c_{lm} x''_l x''_m = (\varrho''^2 + 1) \Sigma c_{lm} x_l x_m + 2\varrho'' \Sigma c_{lm} x_l y_m .$$

Quindi la nuova omografia muterà pure la quadrica f in se stessa se

$$\frac{\varrho'^2 + 1}{\varrho'} = \frac{\varrho''^2 + 1}{\varrho''},$$

condizione che si riduce a $(\varrho' - \varrho'')(\varrho'\varrho'' - 1) = 0$, ossia, escludendo il caso dell'identità $(\varrho' - \varrho'' = 0)$, a $\varrho'\varrho'' = 1$. Quest'equazione determina tra i parametri ϱ', ϱ'' un'involuzione, la quale interpretata sul raggio congiungente i punti x, y, coincide, com'è facile vedere, con quella già considerata. Dunque:

Se su una delle infinite punteggiate proiettive che congiungono coppie di punti corrispondenti in un'omografia che muta f *in se stessa si scelgono due punti qualunque e sulle altre i loro corrispondenti si avrà una nuova omografia, la quale, se le coppie di punti ottenute nel modo detto appartengono alle involuzioni relative a quelle congiungenti, muterà* f *in se stessa* (19).

In particolare, se sul raggio congiungente due punti corrispondenti si considerano i due punti d'intersezione con f, all'uno di essi non potrà corrispondere che l'altro nella corrispondente omografia che muta f in se stessa. Dunque *in ciascuna delle involuzioni considerate una coppia è costituita dai punti d'intersezione con* f (20). Però non bisogna credere che in quelle involuzioni tutte proiettive tra di loro questa coppia rimanga corrispondente a se stessa (come per le altre coppie prima considerate), chè ciò non è in generale.

---

(19) Nel caso di n impari, distinguendo le omografie che trasformano una quadrica in se stessa in due specie come si vedrà in seguito, si prova facilmente che le infinite omografie dedotte nel modo ora enunciato da un'omografia che trasforma f in se stessa sono tutte della stessa specie con questa omografia primitiva.

(20) Ciò si dimostra pure analiticamente e in modo più completo notando che dal n^0 presente segue che i due punti d'intersezione della retta xy colla quadrica f sono determinati dall'equazione

$$(\varrho^2 + 1) \Sigma c_{lm} x_l x_m + 2\varrho \Sigma c_{lm} x_l y_m = 0$$

e quindi corrispondono a valori reciproci di ϱ.

4. Una conseguenza immediata del teorema visto al n⁰ 1 è che ponendo

$$A = | a_{ik} | , \qquad B = | b_{ik} | ,$$

sarà $B/A = \pm 1$. Ciò si può anche dimostrare direttamente osservando che la risoluzione delle equazioni (1) rispetto alle x_i dà per queste delle espressioni lineari nelle y aventi per determinante B/A (*modulo* dell'omografia), sicchè dalla

$$\Sigma c_{lm}\, x_l\, x_m = \Sigma c_{lm}\, y_l\, y_m$$

segue, prendendo i determinanti, $|c_{lm}|\,(B/A)^2 = |c_{lm}|$, donde appunto $B/A = \pm 1$.

Quando n è pari, se si cambiano di segno le a_{ik} o le b_{ik}, B/A muta segno, mentre l'omografia non muta; quindi in tal caso l'avere B/A l'uno anzi che l'altro dei due valori ± 1 non ha alcuna importanza per l'omografia. Ciò non si può più dire quando n è impari; in tal caso, a seconda che B/A vale $+1$ oppure -1, dirò che l'omografia è *di* 1ª *specie* o *di* 2ª *specie* [21] e vedremo subito che le due omografie sono essenzialmente differenti.

Una prima differenza si trova nel seguente modo. L'equazione in $p:q$

$$| p a_{ik} + q b_{ik} | = 0$$

ha per prodotto delle radici $(-1)^{n+1}\, B/A$, sicchè, essendo l'equazione reciproca, questa quantità varrà $+1$ oppure -1, secondo che -1 è radice di grado pari (zero incluso) od impari. Ne segue che se n è pari, a seconda che $B/A = +1$, o $B/A = -1$, sarà -1 radice di grado impari e quindi (pel teorema del n⁰ 1) $+1$ di grado pari, oppure -1 di grado pari e $+1$ di grado impari. Invece se n è impari, a seconda che $B/A = +1$, oppure $B/A = -1$ saranno -1 e $+1$ radici di grado pari, oppure radici di grado impari.

Di qui possiamo trarre una conseguenza che ci sarà utile in seguito. Il numero dei divisori elementari di grado pari del deter-

---

[21] Per analogia colle denominazioni introdotte dagli analisti per le sostituzioni ortogonali e per le trasformazioni lineari che non alterano una forma quadratica, avrei dovuto chiamare (come fa pure il sig. Voss) l'omografia a seconda del valore di B/A, *propria* od *impropria*; non l'ho fatto perchè con *omografia impropria* accade di designare invece un'omografia di determinante nullo. La denominazione, che ho scelta, di 1ª e 2ª *specie* fu per lo spazio ordinario introdotta dal signor Zeuthen nella sua Memoria citata in principio.

minante caratteristico i quali corrispondono ad una determinata delle due radici ± 1 è pari (V. n^0 1). Dall'ultimo risultato avuto segue poi che il numero dei divisori elementari di grado impari corrispondenti alla stessa radice, quando n è impari, è pari od impari secondo che B/A vale $+1$ oppure -1; dunque lo stesso varrà pel numero totale dei divisori elementari corrispondenti a quella radice. Traducendo questo geometricamente e riassumendo avremo:

In una omografia di 1ª specie di uno spazio a numero impari di dimensioni gli spazi fondamentali corrispondenti alle radici (di grado pari) ± 1 sono a numero impari di dimensioni (se tali radici esistono), mentre in un'omografia di 2ª specie gli spazi fondamentali corrispondenti alle radici (sempre esistenti e di grado impari) ± 1 sono a numero pari di dimensioni (22).

5. Limitandoci ancora al caso di n impari osserviamo che l'omografia risultante da più omografie successive ha per modulo il prodotto dei loro moduli. Ora si vede facilmente che una proiezione della quadrica f su se stessa, o meglio un'omologia armonica rispetto ad un punto (non di f) ed al suo piano polare rispetto ad f, è un'omografia di modulo -1. Dunque facendo seguire ad un'omografia di 1ª o di 2ª specie una proiezione si ottiene rispettivamente un'omografia di 2ª o di 1ª specie. E il risultato di più proiezioni successive sarà un'omografia di 1ª o 2ª specie secondo che il numero di quelle proiezioni è pari od impari. Ciò posto, dico che viceversa ogni omografia che trasforma f in se stessa può considerarsi come risultante da un certo numero di proiezioni (23).

Consideriamo in fatti un'omografia di 2ª specie qualunque, purchè tale che almeno una delle radici ± 1 sia semplice (o più generalmente abbia un divisore elementare corrispondente lineare): essa avrà, corrispondentemente a quella radice, un piano unito *non* tangente ad f. Facendo seguire a quell'omografia una proiezione da un punto di tal piano, si avrà una omografia di 1ª specie in cui quel piano sarà ancora unito, e, non essendo tangente ad f, dovrà (n^0 2) appartenere ad uno spazio fondamentale corrispondente a ± 1; quell'omografia di 1ª specie avrà dunque corrispondentemente a ± 1 uno

---

(22) La stessa proposizione è dimostrata dal sig. Voss (*Orthog. Substitutionen*, p. 330) in altro modo.

(23) Il concetto della dimostrazione che segue si trova nella Memoria citata del signor Zeuthen, applicato alle trasformazioni proiettive di una quadrica ordinaria in se stessa.

spazio fondamentale di piani ad 1 dimensione (o ad un numero impari maggiore, v. n^0 4) non composto totalmente di piani tangenti ad f. Prendiamo sul sostegno di esso un punto e facciamo seguire all'omografia ottenuta una nuova proiezione avente questo punto per centro: avremo per risultato una nuova omografia di 2^a specie per cui quello spazio di piani si comporrà ancora di piani uniti ed apparterrà quindi ad uno spazio fondamentale corrispondente ad una radice ± 1, spazio fondamentale che dovrà quindi essere a 2 dimensioni (o ad un numero pari maggiore). Da un punto del sostegno di questo spazio fondamentale di piani proiettiamo ancora: avremo un'omografia di 1^a specie con uno spazio fondamentale di piani a 3 (od un numero impari maggiore di) dimensioni corrispondente a ± 1. E così continuando si finirà per giungere dopo $n - 1$ proiezioni al più ad un'omografia di 2^a specie avente uno spazio fondamentale di piani ad $n - 1$ dimensioni (stella), cioè ad una proiezione. Dunque rifacendo le varie proiezioni in ordine inverso si ha che l'omografia di 2^a specie considerata equivale ad n proiezioni. Siccome poi ogni omografia di 1^a specie si può ottenere da una di 2^a specie seguita da una proiezione, così avremo (estendendo, come si può fare facilmente con considerazioni di limiti, i risultati ottenuti alle omografie di 2^a specie prima escluse):

Un'omografia generale che muti in se stessa una quadrica non degenere in uno spazio a numero impari n *di dimensioni equivale ad* n $+ 1$ *oppure ad* n *proiezioni secondo che essa è di* 1^a *o di* 2^a *specie* ([24]). *Vi sono rispettivamente* $\infty^{n(n+1)/2}$ *e* $\infty^{n(n-1)/2}$ *gruppi di proiezioni equivalenti ad una tale omografia; essi si formano coi modi visti nella dimostrazione precedente. Se poi si considera un'omografia di* 1^a *o* 2^a *specie particolare, essa equivarrà ad un numero di proiezioni uguale od inferiore (di un numero pari) al numero assegnato.*

Che un'omografia di 1^a o 2^a specie non possa, se è generale, equivalere a meno di $n + 1$ od n proiezioni si scorge facilmente; poichè se un'omografia di 1^a o 2^a specie equivalesse appunto ad un numero minore di proiezioni, e quindi rispettivamente ad $n - 1$ od $n - 2$ al più, pei centri delle proiezioni passerebbe un sistema lineare infinito di piani uniti per l'omografia risultante, sicchè questa non sarebbe generale. Così si vede anche quali particolari omografie possono equivalere ad un numero minore di proiezioni; equivalgono cioè ad $n - k$ proiezioni quelle omografie che hanno uno spazio fon-

([24]) Il sig. Voss (*Orthog. Substitutionen*, p. 349) giunge per mezzo di calcoli allo stesso risultato.

damentale (di punti o piani) a k dimensioni corrispondente a una radice ± 1.

Siccome ogni proiezione della quadrica f su se stessa scambia tra loro i due sistemi di $S_{(n-1)/2}$ contenuti in f, così un'omografia muterà ciascuno di questi sistemi in se stesso oppure li scambierà tra loro secondo che essa equivale ad un numero pari od impari di proiezioni. Abbiamo così la seguente distinzione semplicissima tra le due specie d'omografie:

Un'omografia che muti f *in se stessa muta pure ciascuno dei due sistemi di $S_{(n-1)/2}$ contenuti in* f *in se stesso, oppure li scambia tra di loro, secondo che essa è di* 1^a *o di* 2^a *specie.*

6. Sia ora n pari e vediamo a quante proiezioni equivalga allora un'omografia che muti in sè la quadrica f. Nel caso più generale vi sarà una radice semplice uguale a ± 1 e quindi un punto unito isolato P fuori di f ed un piano unito isolato π polare di P rispetto ad f; su questo piano l'omografia considerata determina un'omografia trasformante la quadrica generale πf a numero pari $n-2$ di dimensioni in se stessa, omografia di 1^a specie che equivarrà in generale ad n proiezioni (n^0 5). Eseguendo queste proiezioni non sulla sola πf ma su tutta la quadrica f, l'omografia primitiva si riduce ad un'omografia in cui tutti i punti di π ed il punto P sono uniti, cioè all'identità oppure ad una nuova proiezione. Dunque:

In uno spazio a numero pari n *di dimensioni un'omografia che muti in sè una quadrica generale equivale ad* n *od* $n+1$ *proiezioni al più* (25).

Passiamo ora ad applicare i risultati generali ottenuti al caso particolare di $n = 5$ e che la quadrica f a 4 dimensioni che si trasforma in se stessa sia la *quadrica di rette* (26). È noto che ogni trasformazione lineare della quadrica di rette in se stessa, a seconda che essa lascia inalterati ovvero scambia tra loro i due sistemi di S_2 in essa contenuti (punti e piani dello spazio ordinario), cioè a

(25) Il sig. Voss asserisce invece che una tale omografia equivale nel caso più generale ad n proiezioni; ma non mi riuscì di ridurre ad n le $n+1$ proiezioni di cui si parla nel mio enunciato.

(26) V. per quanto riguarda la geometria della retta e che qui ci occorrerà la mia Memoria *Sulla geometria della retta e delle sue serie quadratiche* (Mem. Acc. Lincei, 36; [V. queste «Opere», III, p. 127], ove si troveranno anche le citazioni opportune.

seconda che essa è di 1ª o di 2ª specie, costituisce per lo spazio ordinario un'omografia ovvero una correlazione; e viceversa ogni omografia o correlazione dello spazio ordinario può esser considerata in tal modo. Quindi facendo quell'applicazione dei risultati precedenti noi verremo a studiare le omografie e le correlazioni dal punto di vista della pura geometria della retta e ad ottenerne così nuove ed interessanti proprietà ([27]).

§ 2.

Omografie dello spazio ordinario nella geometria della retta.

7. Per avere una nuova classificazione delle omografie ordinarie non vi sarà da far altro che applicare i teoremi trovati nel paragrafo precedente al caso di $n = 5$ e che si tratti di una trasformazione di 1ª specie. Tale applicazione potendosi fare immediatamente senza aggiungere nessun ragionamento, la farò tacitamente, limitandomi quasi sempre ad enunciare i risultati a cui essa conduce. Così siccome dai teoremi visti segue quale è il numero e la disposizione delle rette unite di ogni omografia particolare, il confronto colla classificazione da me fatta sotto altro punto di vista delle omografie dello spazio ordinario (*Omografie*, n⁰ 20) mi permetterà di collegare immediatamente quella classificazione colla nuova. Ogni caso della prima classificazione comprende, come si vedrà, uno o più casi della nuova; distinguerò le caratteristiche di quella e di questa metten-

---

([27]) Il sig. Voss nella Memoria sulle sostituzioni ortogonali ripetutamente citata notò già come dalla classificazione di queste per 6 variabili si possa dedurre quella delle omografie e delle correlazioni dello spazio ordinario, ma non sviluppò quel concetto come qui sarà fatto.

Benchè non abbia relazione immediata col nostro argomento, non si troverà forse priva d'interesse la seguente osservazione. Al signor Frobenius è dovuto il seguente teorema analitico (*Ueber die schiefe Invariante einer bilinearen oder quadratischen Form,* Crelle's J., 86): « Se il determinante di un fascio di forme quadratiche (non identicamente nullo) ha almeno un divisore elementare d'esponente impari, quel fascio ammette trasformazioni improprie in se stesso; altrimenti no ». Applicandolo ad un fascio di quadriche di S_5, il quale comprenda la quadrica di rette, esso ci dà che un complesso quadratico di rette dello spazio ordinario è correlativo a se stesso oppure no, secondo che nella sua caratteristica entrano esponenti impari ovvero soltanto esponenti pari. Così si ha una spiegazione del fatto che si verifica esaminando la classificazione dei complessi quadratici, cioè che i complessi quadratici non duali a se stessi sono i seguenti: [222], [42], [6], [(22) 2], [(42)], [(222)].

dole rispettivamente tra [ ] e tra { }, ed in ogni caratteristica della nuova classificazione segnerò con una lineetta orizzontale superiore quei gruppi d'esponenti che corrispondono ad una radice ± 1 e metterò più vicini tra loro due esponenti o gruppi d'esponenti che corrispondano a radici reciproche.

[1111].

{11 11 11}. Questo è il caso più generale; vi sono 6 rette unite distinte in tre coppie in modo che due rette unite di diverse coppie si tagliano, cioè in modo da costituire le coppie di spigoli opposti di un tetraedro. Questo tetraedro è quello dei punti e piani uniti. Non vi sono complessi lineari uniti non speciali ([28]).

$\{\overline{(11)}\ 11\ 11\}$. La comparsa del gruppo $\overline{(11)}$ mostra l'esistenza di un fascio di complessi lineari uniti. Quest'omografia ha ancora per rette unite gli spigoli di un tetraedro, ma ha inoltre un fascio di complessi lineari uniti, fascio avente per direttrici due spigoli opposti di quel tetraedro.

$\{\overline{(11)}\ \overline{(11)}\ 11\}$. Oltre agli spigoli di un tetraedro sono uniti per quest'omografia i due fasci di complessi lineari aventi per direttrici due coppie di spigoli opposti.

[211].

{22 11}. Vi sono due coppie $r_1 r_2, s_1 s_2$ di rette unite, delle quali le prime due (corrispondenti agli esponenti 22) si tagliano mutuamente e tagliano le altre, mentre queste s_1, s_2 non s'incontrano, sicchè p. e. s_1 passa pel punto ed s_2 sta nel piano determinato da r_1, r_2. È chiaro allora quali sono i punti e piani uniti.

$\{\overline{(11)}\ 22\}$. Le rette unite sono ancora disposte come nel caso precedente, ma vi è inoltre un fascio di complessi lineari uniti avente per direttrici $s_1 s_2$.

[31].

{33}. Vi sono due rette unite tagliantisi; oltre al punto ed al piano comuni sono uniti un piano passante per l'una retta ed un punto posto sull'altra (come si scorge deducendo questo caso dal {22 11} col far coincidere $s_1 s_2$ rispettivamente con $r_1 r_2$).

([28]) D'or innanzi parlando di complessi lineari uniti sottintenderò sempre *non speciali*; quelli speciali li chiamerò più brevemente *rette*.

[22].

$\{(\overline{31})\ 11\}$. Vi sono due rette unite sghembe $s_1\,s_2$ ed un'altra retta unita r che incontra queste due e nella quale coincidono le due direttrici di un fascio di complessi lineari uniti. I due punti e i due piani comuni alle rette r e $s_1\,s_2$ sono i punti ed i piani uniti.

$\{(\overline{31})\ (\overline{11})\}$. Caso particolare del precedente: oltre al fascio di complessi lineari già considerato sono ora uniti i complessi lineari del fascio $s_1\,s_2$.

[4].

$\{(\overline{51})\}$. Vi è una sola retta unita, in cui coincidono le direttrici di un fascio di complessi lineari uniti. Un punto ed un piano di quella retta sono uniti.

[(11) 11].

$\{(11)\,(11)\ 11\}$. I due gruppi (11) mostrano l'esistenza in quest'omografia di due fasci di rette unite; di più vi sono due altre rette unite, che incontrano ambi i fasci senza incontrarsi tra loro e che sono dunque la retta comune ai piani dei due fasci e la retta congiungente i centri di questi. Quella è luogo di punti uniti e questa inviluppo di piani uniti. Inoltre sono uniti i centri e i piani dei due fasci.

$\{(\overline{11})\ (11)\,(11)\}$. Caso particolare del precedente, in cui sono uniti i complessi lineari del fascio avente per direttrici le due rette unite isolate ivi considerate.

[(11) 2].

$\{(\overline{22})\ 11\}$. Vi è un fascio di rette unite e due rette unite isolate, l'una nel suo piano, l'altra pel suo centro; la prima è luogo di punti uniti, la seconda inviluppo di piani uniti. Sono pure uniti il centro ed il piano del fascio.

$\{(\overline{22})\ (\overline{11})\}$. Le due rette unite isolate del caso precedente sono direttrici di un fascio di complessi lineari uniti.

[(21) 1].

$\{(21)\,(21)\}$. Vi sono due fasci di rette unite i quali, corrispondendo ai gruppi (21) ed a radici reciproche, dovranno essere così situati che nell'uno vi sia una retta posta nel piano dell'altro, o, ciò che fa lo stesso, che in questo vi sia una retta passante pel centro del primo. Quella retta sarà luogo di punti uniti e questa inviluppo di piani uniti.

[(31)].

$\{(\overline{33})\}$. Vi è soltanto un fascio di rette unite. Da ciò si conchiude facilmente che nel fascio stesso esistono una retta di punti uniti ed una retta di piani uniti, e che non vi sono altri elementi uniti.

[(11) (11)].

$\{(\overline{1111})\ 11\}$. Il gruppo $(\overline{1111})$ prova che vi è una serie lineare tre volte infinita di complessi lineari uniti, cioè la serie dei complessi lineari passanti per due rette fisse; in particolare sono rette unite quelle della congruenza lineare avente queste rette per direttrici. Anche queste saranno rette unite, non solo, ma luoghi di punti uniti ed inviluppi di piani uniti. Quest'omografia può dirsi *rigata.*

$\{(\overline{1111})\ (\overline{11})\}$. In questo caso, oltre alla serie tripla di complessi lineari del caso precedente, sono uniti i complessi lineari del fascio involutorio a quella serie, cioè del fascio avente per direttrici le due rette unite isolate. Quest'omografia rigata particolare è involutoria.

[(22)].

$\{(\overline{3111})\}$. La serie lineare tripla costituita dai complessi lineari uniti è in questo caso speciale, in quanto che le due rette ad essi comuni, direttrici della congruenza di rette unite, vengono ad essere infinitamente vicine (senza tagliarsi). Vi è dunque una retta i cui punti ed i cui piani sono uniti. Si ha un'*omografia rigata speciale.*

[(111) 1].

$\{(111)(111)\}$. Vi sono in quest'omografia una stella ed un piano di rette unite non aventi comune alcuna retta. Essa è dunque l'ordinaria *omologia.*

[(211)].

$\{(\overline{2211})\}$. Vi è una serie lineare tripla di complessi lineari uniti doppiamente speciale, in quanto che le due rette comuni s'incontrano e quindi la serie si compone dei complessi lineari aventi comune un dato fascio di rette. Le rette passanti pel centro o poste nel piano di quel fascio sono unite; si ha dunque un'*omologia speciale.*

8. Con ciò la classificazione delle omografie è compiuta (29); ma si potrebbero aggiungere alle esposte altre proprietà distintive dei vari casi. Una serie di tali proprietà scaturisce dal teorema del n^0 1 e conduce a determinare gl'*invarianti assoluti* delle varie omografie in un modo alquanto diverso da quello noto (*Omografie*, n^0 11) (30). Ne citerò qui alcune.

Per l'omografia generale $\{11\,11\,11\}$ si ha: *Due complessi lineari corrispondenti qualunque di un'omografia generale determinano un fascio nel quale la coppia da essi costituita, le* 3 *coppie dei complessi lineari passanti per gli spigoli opposti del tetraedro unito e la coppia dei complessi lineari speciali formano* 5 *coppie di un'involuzione* (n^0 3). *Tralasciando l'ultima coppia, si hanno* 8 *elementi formanti un gruppo che si conserva sempre proiettivo a se stesso variando i due complessi lineari corrispondenti ed i cui* 3 *invarlanti assoluti (rapporti anarmonici) indipendenti sono gl'invarianti assoluti dell'omografia. Uno di essi, cioè il rapporto anarmonico delle* 4 *coppie considerate di quell'involuzione, è precisamente il rapporto anarmonico del complesso tetraedrale corrispondente all'omografia* (31). — *Se poi in tutti i fasci di complessi lineari determinati nel modo detto si prendono coppie delle relative involuzioni formanti dati rapporti anarmonici colle* 4

(29) Per ogni omografia vi è, come si sa, un complesso tetraedrale costituito dalle rette congiungenti punti corrispondenti o (ciò che fa lo stesso) intersezioni di piani corrispondenti, od anche rette che incontrano le loro corrispondenti. Quali casi particolari presenti quel complesso tetraedrale corrispondentemente ai vari casi particolari dell'omografia fu già accennato dal mio amico Loria alla fine della sua Nota *Sulle corrispondenze projettive fra due piani e fra due spazii* (Giornale di matem., 22).

(30) In generale gl'invarianti assoluti di un'omografia in uno spazio qualunque sono i rapporti delle radici del suo determinante caratteristico; per un'omografia della specie particolare considerata nel § 1 si ha dunque un sistema di invarianti assoluti indipendenti prendendo una radice da ciascuna coppia di radici reciproche diverse da ± 1. Da ciò si hanno tosto in particolare gl'invarianti delle varie omografie dello spazio ordinario dal punto di vista della geometria della retta.

(31) Se i due complessi lineari corrispondenti considerati sono in particolare due rette corrispondenti le quali si taglino non si ottiene nulla di nuovo, poichè considerando nel loro piano la conica del complesso tetraedrale e il quadrilatero, ad essa circoscritto, d'intersezione col tetraedro unito, quella proposizione generale dà il correlativo del teorema di Desargues sul quadrangolo completo iscritto in una conica e mostra inoltre che il rapporto anarmonico delle quattro coppie di un'involuzione determinate su ogni retta del piano dalle intersezioni colla conica e colle coppie di lati opposti del quadrangolo è uguale a quello dei quattro vertici di questo considerati sulla conica.

coppie considerate si avranno coppie di complessi lineari corrispondentisi in una determinata omografia (avente lo stesso complesso tetraedrale che la data).

Questo teorema si modifica in vario modo per le omografie particolari; alcune di queste modificazioni sono affatto ovvie, altre meno: tutte però si ottengono dalla teoria generale.

Così per l'omografia $\{\overline{(11)}\,11\ 11\}$ si ha: *Se un'omografia ha un fascio di complessi lineari uniti le cui direttrici siano* $s_1\, s_2$, *due complessi lineari corrispondenti qualunque determinano un fascio nel quale esiste sempre un complesso passante per entrambe le rette* $s_1\, s_2$; *questo complesso è elemento doppio di un'involuzione in cui una coppia è costituita dai due complessi corrispondenti considerati e altre coppie dai complessi passanti per le coppie di spigoli opposti diverse da* $s_1\, s_2$ *del tetraedro unito e dai complessi speciali del fascio.* Ecc. ecc. Invece di 3 vi sono allora solo più 2 invarianti assoluti. — E per l'omografia $\{\overline{(11)}\ \overline{(11)}\ 11\}$ vi è solo più un invariante assoluto e si ha: *Se un'omografia ha due fasci di complessi lineari uniti, le cui direttrici siano le coppie* $r_1\, r_2$, $s_1\, s_2$ *di spigoli opposti del tetraedro unito, due complessi lineari corrispondenti qualunque determinano un fascio in cui esistono due complessi passanti rispettivamente per* $r_1\, r_2$ *e per* $s_1\, s_2$; *questi due complessi sono tra loro involutori e sono coniugati armonici rispetto a quei due complessi corrispondenti ed ai due complessi del fascio passanti pei due spigoli non considerati del tetraedro unito.* Ecc. ecc.

Per l'omografia $\{(11)(11)\ 11\}$ si avrà: *Se un'omografia ha una retta di punti uniti ed una retta di piani uniti e quindi ancora in generale due punti uniti isolati su questa e due piani uniti isolati per quella, due complessi lineari corrispondenti qualunque determinano un fascio in cui esistono due complessi rispetto a ciascuno dei quali uno dei due punti uniti isolati ha per corrispondente il piano unito isolato che lo contiene: questi due complessi, quelli corrispondenti considerati, i due che passano rispettivamente per le rette di punti e piani uniti ed i due speciali formano 4 coppie di un'involuzione.* Ecc. Gl'invarianti assoluti qui sono 2. — Se poi si scende al caso più particolare $\{(11)\,(11)\ \overline{(11)}\}$, si ha solo più un invariante e nell'involuzione testè considerata la terza coppia si riduce ad un elemento doppio.

Il caso $\{\overline{(1111)}\ 11\}$ ci dà: *In un'omografia rigata due complessi lineari corrispondenti determinano un fascio contenente un complesso rispetto a cui le due direttrici dell'omografia sono rette corrispondenti: questo complesso è doppio nell'involuzione a cui appartengono i due complessi corrispondenti, i due complessi del fascio passanti rispetti-*

vamente per le direttrici ed i due complessi speciali. Ecc. — Nel caso $\{(\overline{1111})\ (\overline{11})\}$, cioè se l'omografia rigata è involutoria, i due complessi del fascio passanti per le direttrici coincidono.

Nel caso $\{(111)\,(111)\}$ si ha: *In un'omologia ordinaria due complessi lineari corrispondenti si tagliano in una congruenza delle cui direttrici una passa pel centro e l'altra sta nel piano d'omologia.* Questo risultato si ottiene pure immediatamente per via diretta.

Finalmente nel caso $\{(\overline{2211})\}$ avremo: *In un'omologia speciale due complessi lineari corrispondenti si tagliano in una congruenza speciale (dalle direttrici infinitamente vicine) la cui direttrice sta nel piano d'omologia e passa pel centro d'omologia.*

9. Coi risultati dei due numeri precedenti è fatta la classificazione, non solo delle omografie, ma anche del *sistema di due quadriche nella geometria della retta.* Ciò è conseguenza del fatto che la geometria proiettiva di una coppia di quadriche coincide colla geometria proiettiva dell'omografia risultante dalle polarità rispetto a queste quadriche (V. *Omografie,* nota alla fine del n^0 11). Se in tutti quei risultati si considerano le omografie come generate in tal modo e si sostituisce alla considerazione di esse quella delle coppie di quadriche corrispondenti si avranno appunto classificazione e proprietà delle varie coppie di quadriche. Un complesso lineare unito (e in particolare una retta unita) per un'omografia darà luogo con un altro tale complesso (che può in particolare coincidere con quello) ad una coppia di complessi polari l'uno dell'altro rispetto ad entrambe le quadriche del sistema corrispondente. Un fascio di complessi lineari uniti, quale compare nell'omografia $\{(\overline{11})\ 11\ 11\}$, ecc., sarà pel sistema di due quadriche un fascio di complessi lineari a due a due polari l'uno dell'altro rispetto ad entrambe le quadriche: si avrà così in quel fascio un'involuzione (di cui una coppia si comporrà dei due complessi speciali), i cui elementi doppi saranno due complessi lineari involutori tra loro e dei quali ciascuno sarà polare di se stesso rispetto ad ambe le quadriche, sicchè (come si vede tosto) l'uno conterrà di ciascuna quadrica un sistema di generatrici e l'altro ne conterrà l'altro sistema. Due rette unite per l'omografia corrispondenti a radici reciproche saranno polari reciproche rispetto ad ambe le quadriche; quindi due fasci di rette unite corrispondenti a radici reciproche, quali compaiono ad esempio nel caso $\{(11)\,(11)\ 11\}$, sono polari l'uno dell'altro rispetto alle due quadriche; ecc. ecc. Con queste avvertenze i risultati avuti si possono applicare immediatamente, come dicevo, al sistema di due quadriche.

Ma v'ha di più. Una quadrica Q^2 dello spazio ordinario considerata come complesso delle sue tangenti è determinata sulla *quadrica di rette* R di S_5 come base di un fascio di varietà quadratiche a 4 dimensioni M_4^2 nel quale si trovano due coni di 3ª specie (aventi due S_2, polari l'uno dell'altro rispetto a tutto il fascio, per sostegni): si prenda a rappresentante di Q^2 in S_5 quella M_4^2 del detto fascio, la quale è coniugata armonica di R rispetto ai due coni. Allora con un semplice ragionamento sintetico si vede che in S_5 i piani polari di un punto rispetto ad R ed a quella M_4^2 tagliano R in due complessi lineari polari reciproci rispetto alla quadrica ordinaria Q^2. Considerando ora due tali quadriche Q^2 e le M_4^2 corrispondenti (nel modo detto) di S_5, l'omografia risultante dalle due polarità rispetto alle quadriche Q^2 sarà pure in S_5 risultante dalle polarità rispetto alle due M_4^2 e quindi la sua caratteristica ed i suoi invarianti saranno pur quelli del sistema di queste due M_4^2. Dunque non solo a ciascun caso di omografia della classificazione fatta dianzi corrisponde una posizione particolare di due quadriche, ma inoltre la caratteristica di quell'omografia nella geometria della retta è nello stesso tempo la caratteristica di questa coppia di quadriche considerate come complessi delle loro tangenti nel modo detto. Ne segue che, avendo il sig. Voss nella Memoria citata sul principio studiato il sistema di 2 quadriche in quest'ultimo modo, non si farebbe in parte che ritrovare i suoi risultati fermandosi a dedurre, come abbiamo mostrato potersi fare, la classificazione delle coppie di quadriche da quella delle omografie.

§ 3.

Sulle correlazioni in ispazi lineari qualunque.

10. Prima di passare ad occuparci, col metodo già accennato, delle correlazioni dello spazio ordinario, conviene che vediamo alcune proposizioni generali sulle correlazioni in uno spazio lineare qualunque ([32]).

Abbiasi in S_n una correlazione qualunque non degenere; essa potrà rappresentarsi con un'equazione bilineare

$$\Sigma\, a_{ik}\, x_i\, x'_k = 0 \ (^{33}),$$

([32]) Di quelle correlazioni si occupò pure il sig. Voss nella sua Memoria, ma risolvendo intorno ad esse questioni diverse da quelle che qui mi occupano.

([33]) Quando in Σ non è indicato rispetto a qual indice si somma, intenderò sempre con ik una disposizione completa degli indici $1, \dots, n+1$.

in cui le x_i, x'_k sono coordinate di due punti coniugati, cioè di due punti dei quali uno sta sul piano corrispondente all'altro. Allora la correlazione inversa sarà rappresentata dall'equazione coniugata

$$\Sigma\, a_{ik}\, x_k\, x'_i = 0,$$

vale a dire un punto x a seconda che lo si considera nell'uno o nell'altro dei due spazi correlativi avrà per corrispondente il piano avente la prima o la seconda di quelle equazioni in coordinate di punti variabili x'. Movendosi x, quei due piani si corrispondono in un'omografia, che risulta dalla ripetizione della correlazione considerata, ed è rappresentata dalle equazioni

$$\sum_i a_{ik}\, x_i = \sum_i a_{ki}\, x'_i\,.$$

Dirò che quell'omografia *appartiene* alla correlazione, poichè essa è legata a questa in modo molto intimo. In fatti il sig. KRONECKER ha dimostrato il seguente teorema ([34]): la condizione necessaria e sufficiente affinchè due forme bilineari si possano trasformare l'una nell'altra con una sostituzione cogrediente è che la coppia costituita dall'una forma e dalla sua coniugata sia *equivalente* alla coppia costituita dall'altra forma e dalla sua coniugata (cioè sia trasformabile in questa seconda coppia con sostituzioni qualunque). E da esso si trae facilmente la seguente notevole proposizione:

L'omografia appartenente ad una correlazione dà colle sue particolarità proiettive ed in particolare coi suoi invarianti assoluti tutte le particolarità proiettive e gl'invarianti assoluti della correlazione.

Vi è dunque, anche per le correlazioni come per le omografie, un *determinante caratteristico* da cui dipendono tutte le loro proprietà speciali.

Ma importa notare che un'omografia appartenente ad una correlazione non è generale, poichè ha luogo un altro teorema del sig. KRONECKER ([35]), che si può enunciare come segue:

Per l'omografia appartenente ad una correlazione i divisori elementari del suo determinante caratteristico $|\mathrm{p}a_{ik} + \mathrm{q}a_{ki}|$ *sono a coppie di ugual grado e corrispondenti a radici reciproche, esclusi quelli di grado pari che s'annullassero per* $\mathrm{p}:\mathrm{q} = +1$ *e quelli di grado impari che s'annullassero per* $\mathrm{p}:\mathrm{q} = -1$.

([34]) *Ueber die congruenten Transformationen der bilinearen Formen*, Berl. Monatsber., 1874, p. 432.

([35]) Loc cit., pp. 440 e seg.

Da questi due teoremi si traggono la classificazione delle correlazioni e notevoli proprietà di queste.

11. Per riconoscere meglio il significato geometrico dell'ultimo teorema consideriamo l'equazione

$$\Sigma\,(pa_{ik} + qa_{ki})\, x_i\, x'_k = 0.$$

Essa rappresenta per ogni valore di $p:q$ una correlazione in cui ad un punto x corrisponde un piano di coordinate $\xi_k = \Sigma_i\,(pa_{ik} + qa_{ki})\,x_i$, cioè un piano che varia in un determinato fascio proiettivamente al parametro $p:q$. La correlazione inversa di quella è

$$\Sigma\,(pa_{ki} + qa_{ik})\, x_i\, x'_k = 0,$$

vale a dire corrisponde al valor reciproco di $p:q$ (in particolare pei valori ∞ e 0 di $p:q$ si hanno la correlazione considerata da principio e la sua inversa). In questa serie di correlazioni a due a due inverse (che si potrebbe convenientemente chiamare *fascio* di correlazioni), le sole che coincideranno colle loro inverse corrisponderanno dunque a $p:q = \pm 1$. Per $p:q = -1$ si ha

$$\Sigma\, a_{ik}\,(x_i\, x'_k - x_k\, x'_i) = 0,$$

cioè un *sistema nullo*, correlazione tale che il piano corrispondente in essa ad un punto qualunque passa sempre per questo ([36]). Per $p:q = +1$ si ha

$$\Sigma\,(a_{ik} + a_{ki})\, x_i\, x'_k = 0,$$

cioè la polarità rispetto alla quadrica

$$\Sigma\, a_{ik}\, x_i\, x_k = 0\,;$$

questa quadrica è evidentemente il luogo dei punti che stanno sui piani corrispondenti nella correlazione data (e sui piani corrispondenti in tutte le correlazioni della serie considerata).

([36]) Per n pari il *sistema nullo* è sempre degenere. Ed in generale va notato che da proprietà note dei determinanti gobbi (quale è quello della corrispondenza che la correlazione determina), le quali sono contenute nell'ultima proposizione del n° 10, segue che in uno spazio a numero pari od impari di dimensioni un sistema nullo non può degenerare rispettivamente un numero pari (zero incluso) od impari di volte.

Conchiudendo abbiamo la proposizione seguente:

Se per una correlazione qualunque si considerano i due piani che corrispondono ad un punto qualunque (nella correlazione stessa e nella sua inversa), quel piano del loro fascio che passa pel punto corrisponde a questo in un determinato sistema nullo L *ed il piano coniugato armonico di esso rispetto ai primi due è polare del punto rispetto alla quadrica* F^2 *luogo dei punti che stanno sui piani corrispondenti. Questi due nuovi piani determinano come elementi doppi un'involuzione tale che due piani del fascio coniugati in essa e facienti dati rapporti anarmonici coi quattro già considerati corrispondono al punto in una determinata correlazione e nella sua inversa. Sono pure coniugati in quell'involuzione due piani passanti per ispazi fondamentali di punti (dell'omografia appartenente alla correlazione considerata) corrispondenti a radici reciproche.*

La considerazione della coppia di punti corrispondente ad un piano qualunque e del raggio che li congiunge dà risultati corrispondenti per dualità ai precedenti e conduce in particolare ad un nuovo sistema nullo Λ e ad una quadrica Φ^2 inviluppo dei piani che contengono i punti corrispondenti ([37]).

12. Gli spazi fondamentali di punti (o di piani) dell'omografia appartenente ad una correlazione, o, come dirò più brevemente, gli spazi fondamentali di una correlazione, sono costituiti da quei punti (o rispettivamente piani) a cui corrisponde uno stesso piano (o punto) nella correlazione considerata e nella sua inversa, punti che dirò *involutori* rispetto a queste. Essi sono tra loro in relazioni, di cui alcune seguono immediatamente dalla teoria generale delle omografie, ed altre si ottengono coi ragionamenti seguenti.

Per un punto x di uno spazio fondamentale qualunque avranno luogo le equazioni

$$\sum_i (p' a_{ik} + q' a_{ki})\, x_i = 0,$$

([37]) Il teorema del sig. KRONECKER citato alla fine del n⁰ 10 e dimostrato ora in parte si può anche dimostrare con un ragionamento analogo a quello usato al n⁰ 2 pel teorema del n⁰ 1 intorno alle omografie che trasformano una quadrica in se stessa. In fatti si vede immediatamente che l'omografia appartenente alla correlazione è trasformata in se stessa dalla correlazione, od anche (il che è lo stesso in sostanza, per la seconda nota al n⁰ 2) che la correlazione è trasformata in se stessa dall'omografia. E siccome l'omografia è nello stesso tempo correlativa alla sua inversa, se ne deducono tosto la corrispondenza detta tra i suoi spazi fondamentali ed anche le involuzioni considerate.

dove $p' : q'$ è una determinata radice del determinante caratteristico. Da esse segue

$$\sum_i (pa_{ik} + qa_{ki})\, x_i = q \left(\frac{p}{q} - \frac{p'}{q'}\right) \sum_i a_{ik}\, x_i$$

sicchè a quel punto corrisponde uno stesso piano in tutto il fascio di correlazioni e in particolare gli corrisponde quel piano rispetto al sistema nullo L e come polare rispetto alla quadrica F^2. Dunque quel punto stando sul proprio piano polare rispetto a questa apparterrà ad F^2. Va solo escluso il caso in cui fosse $p' : q' = -1$, perchè allora il punto x ha per corrispondente rispetto al sistema nullo L un piano (di coordinate nulle, cioè) indeterminato e quindi non si può più dire (e non accade in generale) che esso stia sul suo piano corrispondente.

Del resto le equazioni a cui soddisfa x dànno, moltiplicate per x_k e sommate

$$\sum (p'a_{ik} + q'a_{ki})\, x_i\, x_k = 0,$$

cioè

$$(p' + q') \sum a_{ik}\, x_i\, x_k = 0.$$

Dunque se non è $p' : q' = -1$, lo spazio fondamentale di punti corrispondente a $p' : q'$ starà appunto su F^2; ogni suo punto cioè starà sul piano corrispondente.

Consideriamo ora un altro spazio fondamentale di punti y corrispondente ad un'altra radice $p'' : q''$. Sarà

$$\sum_i (p''a_{ik} + q''a_{ki})\, y_i = 0.$$

Moltiplicando le prime equazioni per y_k e queste per x_k e sommandole rispettivamente avremo

$$\sum (p'a_{ik} + q'a_{ki})\, x_i\, y_k = 0, \quad \sum (p''a_{ik} + q''a_{ki})\, x_k\, y_i = 0,$$

ossia

$$p' \sum a_{ik}\, x_i\, y_k + q' \sum a_{ki}\, x_i\, y_k = 0, \qquad q'' \sum a_{ik}\, x_i\, y_k + p'' \sum a_{ki}\, x_i\, y_k = 0,$$

donde

$$\frac{p'}{q'} \frac{p''}{q''} = 1,$$

cioè le due radici considerate sono reciproche, oppure

$$\sum a_{ik}\, x_i\, y_k = 0, \qquad \sum a_{ki}\, x_i\, y_k = 0,$$

e quindi

$$\Sigma\,(pa_{ik} + qa_{ki})\, x_i\, y_k = 0$$

per qualsiasi valore di $p:q$. Conchiudiamo:

Ogni spazio fondamentale di punti della correlazione, purchè corrispondente ad una radice diversa da -1 *(cioè che non sia spazio singolare di punti del sistema nullo* L) *sta sulla quadrica* F^2. *Due spazi fondamentali di punti non corrispondenti a radici reciproche sono coniugati (cioè ciascuno sta nello spazio corrispondente all'altro) rispetto a tutta la serie considerata di correlazioni ed in particolare rispetto al sistema nullo* L *ed alla quadrica* F^2.

13. Siano dati ad arbitrio una quadrica, rappresentata da una equazione bilineare simmetrica $\varphi = 0$, ed un sistema nullo, rappresentato da un'equazione bilineare alternata $\psi = 0$. È evidente che le due forme bilineari $l\varphi + m\psi$, $l\varphi - m\psi$ (qualunque sia $l:m$) saranno coniugate, sicchè la correlazione rappresentata dall'equazione bilineare $l\varphi + m\psi = 0$ avrà per quadrica F^2 e per sistema nullo L precisamente la quadrica $\varphi = 0$ ed il sistema nullo $\psi = 0$ che si scelsero ad arbitrio. Dunque:

Lo studio e la classificazione di una quadrica ed un sistema nullo coincidono collo studio e la classificazione di quel fascio di correlazioni, per cui quelli sono la quadrica F^2 *ed il sistema nullo* L. *In particolare gl'invarianti assoluti del sistema composto dalla quadrica e dal sistema nullo coincidono con quelli di quel fascio di correlazioni e quindi* (come segue facilmente dalle cose viste) *con quelli della particolare omografia che si ottiene facendo seguire al sistema nullo la polarità rispetto alla quadrica.*

§ 4.

Correlazioni dello spazio ordinario.

14. Applicando i risultati del § precedente allo spazio ordinario si hanno le correlazioni dello spazio ordinario, le loro proprietà e la loro classificazione dal punto di vista ordinario, cioè della geometria dei punti e dei piani. Applicando invece i risultati del § 1 si ha la classificazione delle correlazioni dello spazio ordinario nella geometria della retta, cioè considerandole come trasformazioni omografiche di 2ª specie della quadrica di rette in se stessa. Noi qui faremo la classificazione usando simultaneamente entrambi i punti di vista. Le caratteristiche ordinarie verranno ancora, come nel § 2, distinte da quelle relative alla geometria della retta ponendo le

prime tra [ ] e le seconde tra { }; vedremo che ad una di queste seconde caratteristiche può corrispondere più di una delle prime e non viceversa. Quanto alle prime, porrò un $+$ od un $-$ su un gruppo d'esponenti, quando esso corrisponde alla radice $+1$ o -1; mentre nelle seconde caratteristiche una semplice lineetta orizzontale sovrapposta indicherà che la radice corrispondente è ± 1 (perocchè in queste caratteristiche i valori $+1$ e -1 sono equivalenti).

$$\{\overline{1}\ \overline{1}\ 11\ 11\}.$$

[11 11]. Nel tetraedro fondamentale tralasciando due spigoli opposti $r_1 r_2$ gli spigoli rimanenti costituiscono le 4 rette unite della correlazione e formano un quadrilatero tale che ciascuno dei suoi vertici sta sulla quadrica F^2 ed ha per piano tangente a questa e nello stesso tempo per piano corrispondente rispetto alla correlazione e rispetto al sistema nullo L il piano dei due lati passanti per esso (n⁰ 12). Ne segue, facendo anche uso delle proposizioni correlative, da un lato che le due quadriche F^2 e Φ^2 contengono quel quadrilatero, dall'altro che le diagonali $r_1 r_2$ di questo si corrispondono reciprocamente sia nella correlazione che si considera sia rispetto ai due sistemi nulli o complessi lineari L e Λ. Quindi i complessi lineari del fascio $r_1 r_2$ sono a due a due coniugati in un'involuzione a cui appartengono le coppie $r_1 r_2$ e $L\Lambda$, in modo che due complessi coniugati si corrispondono reciprocamente nella correlazione; gli elementi doppi di quest'involuzione saranno i complessi lineari (involutori tra loro) uniti che la correlazione ammette, oltre alle 4 rette unite già considerate. Ciò si accorda colla caratteristica $\{\overline{1}\ \overline{1}\ 11\ 11\}$, di cui i due esponenti $\overline{1}\ \overline{1}$ rappresentano appunto quei due complessi lineari uniti.

Oltre a quei complessi lineari una correlazione dà luogo a considerare due complessi quadratici, cioè il complesso delle rette le cui corrispondenti nella correlazione data e nell'inversa si tagliano ed il complesso delle rette che tagliano le loro corrispondenti. Il primo non è altro che il complesso tetraedrale T^2 generato dall'omografia appartenente alla correlazione e che si può definire in altri modi noti; per ogni correlazione particolare avendo la caratteristica della corrispondente omografia si conosceranno sempre immediatamente tutte le particolarità di quel complesso tetraedrale. Il secondo è invece nel nostro caso un complesso qualunque tra quelli quadratici aventi F^2 e Φ^2 per superficie singolare [38], vale a dire un

[38] V. la mia Memoria sulla geometria della retta (citata alla fine del § 1), nota al principio del n⁰ 126. Il signor SCHRÖTER nella Memoria *Untersuchung zu-*

complesso di caratteristica [(11) (11) 11], che indicherò brevemente d'or innanzi con Q^2. I suoi due complessi fondamentali isolati sono precisamente i due complessi lineari uniti della correlazione, perocchè questa (e quindi anche Q^2) corrisponde a se stessa rispetto a ciascuno di questi complessi. Il cono quadrico di Q^2 uscente da un punto qualunque di F^2 si scinde in due fasci posti nei due piani corrispondenti al punto nella correlazione: la retta d'intersezione di questi piani, cioè la retta singolare di Q^2 corrispondente a quel punto, appartiene al complesso tetraedrale T^2 e nello stesso tempo, com'è chiaro, al complesso lineare L. Quindi la congruenza delle rette singolari di Q^2 è l'intersezione di questo col complesso T^2 e si scinde in due congruenze quadratiche appartenenti rispettivamente ai due complessi lineari L e Λ (39).

[$(\overline{11})$ 11]. Il gruppo $(\overline{11})$ ci prova che i complessi lineari L e Λ diventano in questo caso speciali e si riducono per conseguenza alle rette r_1, r_2. Restano però i due complessi lineari uniti della correlazione. In causa delle particolarità dell'omografia anche T^2 si riduce ai due complessi lineari speciali $r_1\, r_2$. Quanto al complesso Q^2 esso non muta caratteristica, ma il fatto che i complessi lineari cui appartengono le sue due congruenze quadratiche di rette singolari diventano speciali prova che esso viene ad entrare nella categoria dei complessi quadratici delle rette che tagliano armonicamente due date quadriche (40), complessi che designerò brevemente col nome di complessi H. Siccome per l'omografia r_1 è luogo di

---

sammenfallender reciproker Gebilde in der Ebene und im Raume (Crelle's J., 77, 1873, pp. 105-142) studiò diffusamente per via sintetica le correlazioni generali e in particolare i due complessi quadratici che vi compaiono. Ma i due sistemi nulli o complessi lineari L e Λ non furono considerati che più tardi dal signor STURM nella 2ª parte del suo lavoro *Ueber die reciproke und mit ihr zusammenhängende Verwandtschaften* (Math. Ann., XIX, pp. 461-488) e dal signor BATTAGLINI nella Memoria che ho citata in principio.

(39) Una parte di quanto si è detto pel caso generale [11 11], come ciò che riguarda le rette singolari di Q^2, si applica a tutti i casi particolari. Le proprietà delle varie correlazioni particolari che s'incontreranno, dànno proprietà, che non starò ad enunciare, di varie specie di complessi quadratici, casi particolari del complesso [(11) (11) 11]; viceversa dalle proprietà note di questi complessi, come dai loro complessi lineari fondamentali e dalle loro rette doppie si potrebbero avere proprietà delle diverse specie di correlazioni, in particolare i loro complessi lineari uniti e le loro rette unite.

(40) V. il lavoro di LORIA e mio: *Sur les différentes espèces de complexes du 2e degré des droites qui coupent harmoniquement deux surfaces du second ordre* (Math. Ann., XXIII, pp. 213-234 [V. queste «Opere», III, p. 1]).

punti uniti e r_2 inviluppo di piani uniti, così a ciascun punto di r_1 corrispondono nella correlazione due piani coincidenti in un piano passante per r_2, cioè nel piano polare del punto rispetto a F^2 e Φ^2, e inversamente ogni piano per r_2 ha per corrispondenti nella correlazione due punti coincidenti nel polo di esso rispetto a quelle quadriche; vi è cioè in questo caso per la correlazione una retta r_1 di punti *involutori* ed una retta r_2 di piani *involutori*.

$\{\overline{3}\ \overline{1}\ 11\}$.

[22]. In questo caso le due quadriche F^2 e Φ^2 sono raccordate lungo una generatrice r congiungente i due punti fondamentali e giacente nei due piani fondamentali: per quelli e rispettivamente su questi passano le altre due generatrici comuni a quelle quadriche; esse corrispondono agli esponenti 11 ed r all'esponente $\overline{3}$ della caratteristica $\{\overline{3}\ \overline{1}\ 11\}$. Oltre a queste tre rette unite, la correlazione ha un complesso lineare unito, corrispondente all'$\overline{1}$, e passante per la congruenza lineare speciale delle tangenti lungo r ad F^2 e Φ^2 (poichè queste due quadriche si corrispondono sempre rispetto ad ogni complesso lineare unito della correlazione). Questa congruenza è base di un fascio di complessi lineari nel quale quel complesso unito ed il complesso speciale r sono coniugati armonici rispetto ad infinite coppie (tra cui è la coppia $L\Lambda$) di complessi corrispondentisi involutoriamente nella correlazione considerata. Il complesso quadratico Q^2 diventa per questa correlazione della classe [(21) (11) 1].

$\{\overline{3}\ \overline{3}\}$.

[$(\overline{31})$]. Le quadriche F^2 e Φ^2 sono raccordate lungo due generatrici, che sono le sole rette unite della correlazione. Due rette del loro fascio, coniugate armoniche rispetto ad esse, sono l'una r_1 luogo di punti involutori, l'altra r_2 inviluppo di piani involutori.

I complessi lineari L e Λ si riducono rispettivamente ai complessi speciali $r_1\, r_2$; due rette del fascio di queste due le quali siano coniugate armoniche rispetto alle due rette unite si corrispondono involutoriamente nella correlazione. Non esistono complessi lineari uniti non speciali. Il complesso quadratico Q^2 è della classe [(21) (21)], e si può considerare come complesso H.

$$\{(\overline{111})\ \overline{1}\ 11\}.$$

$[(11)\ (11)]$. In questo caso assai notevole le quadriche F^2 e Φ^2 coincidono. In fatti in questo caso l'omografia appartenente alla correlazione è rigata: siano $r_1\, r_2$ le sue direttrici, che per la correlazione saranno insieme luoghi di punti involutori ed inviluppi di piani involutori e che staranno su F^2 e Φ^2. Ogni generatrice dell'altro sistema di F^2 avrà per corrispondente nella correlazione se stessa, sicchè tutte quelle generatrici saranno rette unite e giaceranno quindi anche su Φ^2, cioè Φ^2 coinciderà con F^2. Che in questo caso le rette unite della correlazione formino un sistema di generatrici di una quadrica è pure mostrato immediatamente dalla caratteristica $\{(\overline{111})\ \overline{1}\ 11\}$, la quale inoltre ci dice che sono pure uniti per la correlazione tutti i complessi lineari contenenti l'altro sistema di generatrici della quadrica $F^2 = \Phi^2$, ed un complesso lineare contenente il primo sistema; inoltre sono unite le due rette $r_1\, r_2$, le quali sono precisamente quelle due generatrici del secondo sistema che appartengono a quel complesso lineare. Il complesso Q^2 è per questa correlazione della classe $[(111)\ (11)\ 1]$.

$$\{(\overline{111})\,\overline{3}\}.$$

$[(\overline{22})]$. Questo caso differisce dal precedente solo per ciò che le due rette $r_1\, r_2$ sono venute a coincidere in un'unica retta a cui, come complesso speciale, si riducono pure i complessi lineari L e Λ. Oltre ad essa sono rette unite per la correlazione le generatrici della quadrica $F^2 = \Phi^2$ di sistema diverso ad essa e sono uniti tutti i complessi lineari che contengono le generatrici dello stesso sistema di quella. La classe del complesso quadratico Q^2 diventa $[(111)\,(21)]$.

$$\{\overline{1}\ \overline{1}\ 22\}.$$

$[\overset{+}{2}\ 11]$. L'esservi divisori elementari corrispondenti alla radice $+1$ nel determinante caratteristico prova che per la correlazione le due quadriche F^2 e Φ^2 degenerano rispettivamente in un cono ed una conica; il vertice P del cono ed il piano π della conica sono punto e piano fondamentali corrispondenti al 2 e quindi sono incidenti. Nel fascio di rette di centro P e piano π, fascio che nella correlazione corrisponde a se stesso, vi saranno evidentemente due rette unite, ciascuna delle quali conterrà un nuovo punto fondamentale e starà in un nuovo piano fondamentale. È chiaro che quelle due rette saranno tangenti alla conica Φ^2 nei due nuovi punti fondamentali e saranno generatrici del cono F^2 lungo le quali questo sarà toccato dai due nuovi piani fondamentali. La congiungente r_1 di quei due punti e l'intersezione r_2 di questi due piani sono corrispondenti reciprocamente sia nella correlazione, sia rispetto ai due complessi lineari L e Λ; dal primo fatto segue dunque che nel fascio che ha queste rette per direttrici vi sono due complessi lineari involutori i quali sono uniti per la correlazione e sono coniugati armonici rispetto ad L e Λ. Il complesso Q^2 è della classe $[(22)\,11]$.

$[\overset{+}{2}\,(\overline{11})]$. Questa correlazione non differisce dalla precedente che per ciò che le rette r_1, r_2 sono ora rispettivamente luogo di punti involutori e inviluppo di piani involutori; ad esse si riducono rispettivamente i complessi lineari L e Λ. Il complesso quadratico Q^2 è ancora della classe $[(22)\,11]$, ma della categoria H.

$\{\overline{5}\,\overline{1}\}$.

$[\overset{+}{4}]$. Facendo derivare questo caso dal caso $[\overset{+}{2}\,11]$ si scorge che per esso il cono F^2 e la conica Φ^2 sono tali che P sta su Φ^2 e π tocca F^2 lungo la tangente r in P a Φ^2. Questa retta r è la sola retta unita della correlazione (come P e π sono i soli punti e piani fondamentali); in essa coincidono le direttrici di un fascio speciale di complessi lineari corrispondentisi involutoriamente nella correlazione. Tra le coppie di quel fascio vi è la coppia dei complessi L, Λ; e degli elementi doppi uno è la retta r, l'altro l'unico complesso lineare non speciale unito per la correlazione. Il complesso quadratico Q^2 è della classe $[(32)\,1]$.

$\{\overline{1}\;\overline{1}\;(11)(11)\}$.

$[(\overset{+}{11})\,11]$. Il gruppo $(\overset{+}{11})$ esprime da un lato che le quadriche F^2 e Φ^2 degenerano rispettivamente in una coppia di piani ed una coppia di punti, dall'altro che le rette doppie $r_1\,r_2$ di quelle coppie sono rispettivamente luogo di punti involutori e inviluppo di piani involutori; e in questo caso vi è anche la particolarità che per ogni punto di r_1 il piano corrispondente nella correlazione (piano che passa per r_2) contiene il punto stesso. Oltre ai punti di r_1 sono fondamentali i due punti di r_2 che costituiscono Φ^2, e così pure oltre ai piani di r_2 sono fondamentali i due piani per r_1 nei quali degenera F^2; ne segue che questi ultimi piani contengono rispettivamente quei due punti. Nel fascio di complessi lineari $r_1\,r_2$ vi sono due complessi lineari uniti per la correlazione e vi sono i due complessi L e Λ, coniugati armonici rispetto a quelli. Oltre a quei due complessi lineari uniti la correlazione ha due fasci di rette unite i cui centri e piani sono rispettivamente i due punti che compongono Φ^2 e i due piani componenti F^2. Se ne deduce facilmente che il complesso quadratico Q^2 si scompone in questo caso in due complessi lineari del fascio $r_1\, r_2$ coniugati armonici rispetto ai due complessi uniti di quel fascio.

$[\overset{+}{1}1\ (\overline{11})]$. Questo caso è una particolarizzazione del precedente; in esso entrambe le rette $r_1\, r_2$ sono luoghi di punti involutori e inviluppi di piani involutori. L'omografia appartenente a questa correlazione è rigata involutoria. I due complessi lineari L e Λ si riducono perciò rispettivamente ai due complessi speciali $r_1\, r_2$. I due complessi lineari poi in cui degenera il complesso quadratico Q^2 sono involutori nel caso presente.

$\{(\overline{311})\ \overline{1}\}$.

$[(\overset{+}{2}2)]$. Vi è in questo caso una retta r di punti e piani involutori la quale sarà nello stesso tempo intersezione dei due piani in cui si scinde F^2 e congiungente i due punti in cui degenera Φ^2. Ad ogni punto di r corrisponde rispetto alla correlazione un piano per r e la congruenza lineare speciale dalle direttrici coincidenti in r che così si viene a generare è base di un fascio di complessi lineari a cui appartengono i due complessi L e Λ ed altri due complessi lineari nei quali degenera in questo caso il complesso quadratico Q^2; tanto quelli quanto questi (e in generale due complessi qualunque del fascio corrispondentisi involutoriamente nella correlazione) sono coniugati armonici rispetto al complesso speciale r e ad un complesso lineare unito. Oltre a questo vi è una serie lineare doppiamente infinita speciale di complessi lineari uniti composta di quei complessi rispetto a cui i due punti di Φ^2 corrispondono ai due piani di F^2 in modo inverso a quello in cui ha luogo la corrispondenza rispetto al primo complesso lineare unito; in particolare sono composti di rette unite due fasci di rette aventi per centri rispettivamente quei due punti e quei due piani (fatto che segue pure immediatamente da ciò che ai due punti di Φ^2 corrispondono nella correlazione rispettivamente i due piani di F^2).

$$\{(\overline{221})\ \overline{1}\}.$$

$[(2\overset{+}{1}1)]$. Per questa correlazione l'omografia corrispondente si riduce ad un'omologia speciale, vale a dire vi è un piano π di punti fondamentali ed un punto P di π centro di una stella di piani fondamentali. Le quadriche F^2 e Φ^2 degenerano rispettivamente in π e in P contati due volte. I complessi lineari L, Λ contengono il fascio di rette $P\pi$, fascio composto tutto di rette unite; inoltre il loro fascio contiene un complesso lineare unito isolato, al quale contato doppiamente si riduce il complesso quadratico Q^2. Vi è inoltre una serie lineare doppiamente infinita due volte speciale di complessi lineari uniti (contenenti tutti il fascio di rette $P\pi$), involutori a quel complesso lineare.

$$\{(\overline{111})\ (\overline{111})\}.$$

$[(\overline{1111})]$. Questa correlazione, per cui i complessi lineari L e Λ diventano indeterminati, non è altro che la polarità rispetto ad una quadrica. Le due serie lineari dei complessi lineari contenenti l'uno o l'altro sistema di generatrici di questa quadrica si compongono di complessi uniti; in particolare le generatrici sono le rette unite della polarità. Nella detta quadrica coincidono F^2 e Φ^2, ed il complesso delle sue tangenti viene a costituire Q^2.

$$\{(\overline{11111})\ \overline{1}\}.$$

$[(1\overset{+}{1}11)]$. Questa correlazione costituisce la corrispondenza rispetto ad un complesso lineare in cui coincidono L e Λ. Le quadriche F^2 e Φ^2 svaniscono. I complessi lineari uniti in quella corrispondenza sono il complesso lineare detto e tutti quelli ad esso involutori. Quel complesso contato doppiamente costituisce il complesso quadratico Q^2 delle rette che incontrano le loro corrispondenti.

15. Terminata così la classificazione delle correlazioni ([41]), ci rimane qualche osservazione da fare sugl'*invarianti assoluti* relativi

([41]) La classificazione incompleta che il sig. BATTAGLINI fa nella sua Nota citata è pure basata sulla considerazione del determinante caratteristico; però egli non mostra perchè la classificazione delle correlazioni si possa far dipendere unicamente da quel determinante (la ragione sta nel 1° dei teoremi del sig. KRONECKER citati al n° 10, o nella proposizione geometrica che ne ho de-ai diversi casi. Abbiamo due modi di determinarli. Un primo modo consiste nell'applicare il fatto (n^0 10) che gl'invarianti assoluti di una specie di correlazioni sono quelli stessi dell'omografia corrispondente. D'altronde gl'invarianti assoluti di un'omografia sono i rapporti delle radici del suo determinante caratteristico; sicchè per le omografie appartenenti a correlazioni essendo le radici diverse da ± 1 a due a due reciproche, quegl'invarianti saranno tanti quante sono queste coppie di radici. Quindi:

La correlazione generale [11 11] *ha due invarianti assoluti; le cinque correlazioni* $[(\overline{11})\,11]$, $[22]$, $[(11)(11)]$, $[\overset{+}{2}\ 11]$, $[(\overset{+}{11})\ 11]$ *ne hanno uno solo; e le rimanenti nove non hanno alcun invariante assoluto.*

Come poi si determinino geometricamente quegl'invarianti risulta pure da un teorema già citato sulle omografie: tale determinazione conduce in pari tempo a teoremi notevoli sulle varie correlazioni. Così, data una correlazione generale [11 11], se di un punto si prendono i due piani corrispondenti e quelle due coppie di piani del loro fascio che passano per le coppie di vertici opposti del quadrilatero comune alle quadriche F^2 e Φ^2 si avranno tre coppie di piani di un'involuzione: i due invarianti assoluti del gruppo di 6 elementi così ottenuto, gruppo che rimane proiettivo a se stesso variando il punto nello spazio, sono pure quelli della correlazione. Analogamente per gli altri casi.

Un secondo modo per avere gl'invarianti assoluti delle varie correlazioni consiste nel considerarle nella geometria della retta, cioè come trasformazioni proiettive di 2^a specie della quadrica di rette in se stessa, applicando i risultati del § 1 e le caratteristiche dedotte da essi delle correlazioni considerate da quel punto di vista. In tal modo si giunge riguardo al numero degl'invarianti delle diverse correlazioni a risultati identici a quelli già avuti, ma di più si ottengono per quelle varie proprietà interessanti, di cui basterà dare qualche esempio.

In una correlazione generale due complessi lineari corrispondenti qualunque determinano un fascio nel quale la coppia da essi costituita, le due coppie dei complessi lineari passanti pei lati opposti del quadrilatero di rette unite e la coppia dei complessi speciali sono 4 *coppie di*

---

dotta). — Il sig. VOSS poi, enumerando i vari casi possibili di correlazioni (nella geometria della retta) ne salta uno, che dice non aver probabilmente luogo (Mem. cit., p. 358), cioè il caso $\{(\overline{221})\ \overline{1}\}$; invece il teorema del sig. FROBENIUS ci ha mostrato che questo caso è possibile.

un'involuzione, i cui elementi doppi sono quei due complessi del fascio che passano per le due diagonali di quel quadrilatero. Le prime tre coppie di elementi hanno due invarianti assoluti indipendenti, i quali non mutano variando i due complessi lineari corrispondenti nello spazio e sono precisamente gl'invarianti assoluti della correlazione. Due elementi coniugati qualunque di quella involuzione, i quali facciano rapporti anarmonici fissi colle prime tre coppie considerate di elementi, sono complessi lineari corrispondenti di una nuova determinata correlazione.

In una correlazione $[(11)(11)]$, *ossia* $\{(\overline{111})\ \overline{1}\ 11\}$, *due complessi lineari corrispondenti determinano un fascio nel quale esiste un complesso contenente la rigata quadrica di rette unite ed un altro complesso involutorio al complesso unito isolato. Questi due complessi del fascio sono involutori tra di loro e sono coniugati armonici rispetto ai due complessi lineari corrispondenti e rispetto a quei due complessi del fascio i quali passano per le due rette unite isolate (rette di punti e piani fondamentali). Il rapporto anarmonico di queste ultime due coppie di complessi del fascio è l'invariante assoluto della correlazione.*

In una correlazione $[(\overset{+}{11})\ 11]$, *ossia* $\{\overline{1}\ \overline{1}\ (11)(11)\}$, *due complessi lineari corrispondenti determinano un fascio in cui i due complessi involutori ai due complessi uniti della correlazione sono involutori tra di loro e coniugati armonici rispetto ai primi due e ai due complessi del fascio i quali contengono i due fasci di rette unite. Questi ultimi due complessi del fascio formano coi due complessi da cui si è partiti un rapporto anarmonico costante, che è l'invariante assoluto della correlazione.*

Ecc. ecc.

16. Da una proposizione generale vista al n^0 5 possiamo dedurre, ponendovi $n = 5$, due teoremi interessanti sulle correlazioni e sulle omografie dello spazio ordinario, solo osservando che una proiezione della quadrica di rette su se stessa non è altro che una trasformazione dello spazio ordinario mediante un sistema nullo.

Ogni correlazione dello spazio ordinario equivale alla successione di cinque sistemi nulli, cioè di cinque corrispondenze rispetto a complessi lineari. Se la correlazione è generale si prenda un complesso lineare qualunque c_1 *involutorio all'uno dei due complessi lineari uniti; facendo seguire alla correlazione la corrispondenza rispetto a* c_1 *si avrà un'omografia dotata di un fascio di complessi uniti* $\{(\overline{11})\ 11\ 11\}$. *Facendo ancora seguire la corrispondenza rispetto ad un complesso lineare qualunque* c_2 *involutorio a questo fascio si avrà* *una correlazione dotata di un sistema lineare doppio di complessi uniti* $\{(\overline{111})\ \overline{1}\ 11\}$. *Facendo seguire la corrispondenza rispetto ad un complesso lineare* c_3 *involutorio a questo sistema si avrà un'omografia dotata di un sistema lineare triplo di complessi uniti* $\{(\overline{1111})\ 11\}$, *cioè un'omografia rigata. Facendo seguire la corrispondenza rispetto ad un complesso lineare* c_4 *involutorio a questo nuovo sistema si avrà una correlazione che si riduce alla corrispondenza rispetto ad un complesso lineare* c_5. *Le corrispondenze rispetto a* $c_1\ c_2\ c_3\ c_4\ c_5$ *combinate nella loro successione inversa od in quella scritta equivarranno dunque alla correlazione considerata od all'inversa. — Correlazioni dotate, come la* $\{(\overline{111})\ \overline{1}\ 11\}$, *di un sistema lineare doppio di complessi uniti equivalgono alla successione di tre sole corrispondenze rispetto a complessi lineari.*

Ogni omografia dello spazio ordinario equivale alla successione di sei corrispondenze rispetto a complessi lineari (oppure quattro o due se si tratta di omografie speciali). Uno di questi sei complessi lineari si può prendere ad arbitrio; gli altri cinque dovendo allora generare una data correlazione si costrurranno nel modo testè enunciato.

§ 5.

Trasformazioni omografiche e reciproche di un complesso lineare di rette in se stesso.

17. Un complesso lineare di rette non speciale C può considerarsi come una quadrica generale a 3 dimensioni di uno spazio a 4 dimensioni. Ogni trasformazione lineare di questo spazio che muti in sè quella quadrica viene dunque a dare una trasformazione del complesso C in se stesso tale che ad ogni retta, fascio di rette, rigata quadrica, congruenza lineare di C corrisponde un ente della stessa specie di C. Una tale trasformazione di C determina nello spazio ordinario un'omografia ed una correlazione. In fatti si consideri un punto P ed il fascio di rette di C uscente da esso: a questo fascio corrisponderà un altro fascio di centro P' e piano π'. Movendosi P su un piano fisso σ, il suo fascio avrà sempre comune una retta col fascio di σ e quindi il fascio corrispondente a quello di P avrà pur comune una retta col fascio corrispondente a quello di σ; in altri termini il punto P' si muoverà pure su un piano fisso ed il piano π' passerà per un punto fisso. Quindi se ad ogni punto P facciamo corrispondere il punto P' determinato nel modo detto avremo un'omografia che trasforma C in se stesso;

se invece gli facciamo corrispondere il piano π' avremo una correlazione che trasforma C in se stesso [42].

Volendo dunque studiare direttamente le varie specie di omografie e di correlazioni che mutano un complesso lineare di rette in se stesso basterebbe studiare le trasformazioni lineari di uno spazio a 4 dimensioni, le quali mutano in se stessa una quadrica non degenere a 3 dimensioni, vale a dire applicare i risultati del § 1 al caso di $n = 4$. Ma lo studio di quelle omografie e correlazioni è già contenuto nei §§ 2 e 4, poichè ivi abbiamo notato tra le varie omografie e correlazioni quali sono quelle che ammettono complessi lineari (non speciali) uniti, cioè trasformati in se stessi. Quindi non occorre che ci diffondiamo di più su quest'argomento.

18. Tuttavia voglio qui indicare la corrispondenza tra i vari casi che si otterrebbero considerando quelle omografie e correlazioni nel primo modo, cioè in S_4 come caso particolare delle cose viste nel § 1, e quelli ottenuti nei §§ 2 e 4 considerando quelle trasformazioni nella geometria della retta. Si ha cioè la corrispondenza seguente [43]:

---

[42] Lo stesso si può provare ricorrendo alla considerazione della quadrica di rette, come caso particolare del teorema seguente (che si dimostra senza difficoltà):

Data in S_n una F^2_{n-1} generale ed un S_{n-1} che non le sia tangente, ogni trasformazione lineare di questo S_{n-1} che muti in se stessa l'intersezione con quella quadrica appartiene a due distinte e determinate trasformazioni lineari di S_n che mutano in se stessa quella F^2_{n-1} (che sono di diversa specie se n è impari) e che si ottengono l'una dall'altra mediante una proiezione della F^2_{n-1} dal polo dell'S_{n-1} rispetto ad essa.

Da questo teorema (come pure dal ragionamento diretto sopra usato) risulta pure che l'omografia e la correlazione dedotte nel modo detto da una trasformazione lineare di C in se stesso sono ciascuna il risultato della composizione (in ordine arbitrario) dell'altra e della corrispondenza rispetto a C.

[43] La si stabilisce subito basandosi sul concetto contenuto nella nota al numero precedente ed applicando il seguente teorema generale (per $n = 5$, $h = 1$):

Dalla caratteristica di un'omografia qualunque di $\mathrm{S_n}$ *si ha la caratteristica dell'omografia che questa determina su un* $\mathrm{S_{n-h}}$ *passante pel sostegno di uno spazio fondamentale di piani sottraendo l'unità dagli ultimi* h *indici di quel gruppo della caratteristica data che corrisponde a quello spazio fondamentale.*

Nel caso che quell'S_{n-h} si riduca appunto al sostegno dello spazio fondamentale di piani si ha una proposizione che già dimostrai al n° 17 delle *Omografie*; quella dimostrazione si estende tosto al teorema più generale enunciato.

TRASFORMAZ. DI S_4	OMOGRAFIE	CORRELAZIONI
$[\overline{1}\ 11\ 11]$	$\{(\overline{11})\ 11\ 11\}$	$\{\overline{1}\ \overline{1}\ 11\ 11\}$
$[\overline{1}\ 22]$	$\{(\overline{11})\ 22\}$	$\{\overline{1}\ \overline{1}\ 22\}$
$[\overline{1}\ (\overline{11})\ 11]$	$\{(\overline{11})\ (\overline{11})\ 11\}$	$\{(\overline{111})\ \overline{1}\ 11\}$
$[\overline{3}\ 11]$	$\{(\overline{31})\ 11\}$	$\{\overline{3}\ \overline{1}\ 11\}$
$[\overline{1}\ (\overline{31})]$	$\{(\overline{31})\ (\overline{11})\}$	$\{(\overline{311})\ \overline{1}\}$
$[\overline{5}]$	$\{(\overline{51})\}$	$\{\overline{5}\ \overline{1}\}$
$[\overline{1}\ (11)(11)]$	$\{(\overline{11})\ (11)(11)\}$	$\{\overline{1}\ \overline{1}\ (11)(11)\}$
$[\overline{3}\ (\overline{11})]$	$\{(\overline{31})\ (\overline{11})\}$	$\{(\overline{111})\ \overline{3}\}$
$[(\overline{111})\ 11]$	$\{(\overline{1111})\ 11\}$	$\{(\overline{111})\ \overline{1}\ 11\}$
$[\overline{1}\ (\overline{1111})]$	$\{(\overline{1111})\ (\overline{11})\}$	$\{(\overline{11111})\ \overline{1}\}$
$[(\overline{111})\ (\overline{11})]$	$\{(\overline{1111})\ (\overline{11})\}$	$\{(\overline{111})\ (\overline{111})\}$
$[\overline{1}\ (\overline{22})]$	$\{(\overline{22})\ (\overline{11})\}$	$\{(\overline{221})\ 1\}$
$[(\overline{311})]$	$\{(\overline{3111})\}$	$\{(\overline{311})\ \overline{1}\}$
$[(\overline{221})]$	$\{(\overline{2211})\}$	$\{(\overline{221})\ \overline{1}\}$.

Da essa si può dedurre una serie di proposizioni sulle omografie e sulle correlazioni in relazione coi loro complessi lineari uniti. Così un'omografia $\{(\overline{31})\ (\overline{11})\}$ ha, come vedemmo, due fasci di complessi lineari uniti, l'uno speciale e l'altro no; combinata colla corrispondenza rispetto ad un complesso del secondo fascio essa darà luogo ad una correlazione $\{(\overline{311})\ \overline{1}\}$, mentre combinata colla corrispondenza rispetto ad un complesso del fascio speciale dà una correlazione $\{(\overline{111})\ \overline{3}\}$. Una correlazione $\{(\overline{111})\ \overline{1}\ 11\}$ ha un complesso lineare unito isolato ed una serie lineare doppiamente infinita di tali complessi; combinata colla corrispondenza rispetto al primo essa dà un'omografia $\{(\overline{1111})\ 11\}$, combinata invece colla corrispondenza rispetto ad un complesso della serie dà un'omografia $\{(\overline{11})\ (\overline{11})\ 11\}$. Ecc. ecc. (44).

---

(44) Oltre ai due modi visti vi è un terzo modo per ottenere le omografie che trasformano un complesso lineare in se stesso; esso consiste nell'applicare

§ 6.

Sugl'invarianti delle omografie e delle correlazioni nella geometria della retta.

19. Consideriamo un'omografia dello spazio ordinario; siano

$$\Delta(\varrho) = J_0\,\varrho^4 + J_1\,\varrho^3 + J_2\,\varrho^2 + J_3\,\varrho + J_4$$

il suo determinante caratteristico, $a_1\ a_2\ a_3\ a_4$ le sue radici (che supporrò distinte), sicchè

$$\Delta(\varrho) = J_0\,(\varrho - a_1)\,(\varrho - a_2)\,(\varrho - a_3)\,(\varrho - a_4).$$

L'omografia si potrà rappresentare colle equazioni canoniche

$$x_i' = a_i\,x_i\,,$$

e da queste segue, indicando con p, p' due rette corrispondenti,

$$p_{ik}' = a_i\,a_k\,p_{ik}\,.$$

Queste ultime equazioni mostrano che, considerando l'omografia come trasformazione lineare dello spazio a 5 dimensioni degli enti (p_{ik}), essa ha per determinante caratteristico

$$D(s) = J_0^3\,(s - a_1\,a_2)\,(s - a_1\,a_3)\,(s - a_1\,a_4)\,(s - a_2\,a_3)\,(s - a_2\,a_4)\,(s - a_3\,a_4),$$

ossia, come si trova mediante semplici calcoli di funzioni simmetriche,

$$D(s) = J_0^3\,s^6 - J_0^2\,J_2\,s^5 + J_0\,(J_1\,J_3 - J_0\,J_4)\,s^4 -$$
$$-(J_0\,J_3^2 - 2\,J_0\,J_2\,J_4 + J_1^2\,J_4)\,s^3 + J_4(J_1\,J_3 - J_0\,J_4)\,s^2 - J_2\,J_4^2\,s + J_4^3.$$

---

l'osservazione del signor Frobenius, che ho enunciata in principio della seconda nota al n⁰ 1. Da essa segue che le omografie godenti di quella proprietà sono le seguenti:

$$[11\ 11],\ [\overline{2}11],\ [22],\ [\overline{4}],\ [(\overline{11})\ 11],\ [(\overline{11})\,\overline{2}],\ [(11)\ (11)],\ [(\overline{11})\ (\overline{11})],\ [(\overline{22})],\ [(\overline{211})],$$

il che coincide coi risultati sopra ottenuti.

Considerando la quadrica a 3 dimensioni di S_4 non più come complesso lineare di rette, ma (come si fa nella geometria delle inversioni) come costituita dai punti dello spazio ordinario, le proposizioni ottenute in questo e nel primo paragrafo dànno la teoria e la classificazione di quelle trasformazioni che costituiscono il gruppo delle inversioni.

I coefficienti delle potenze di s in quest'espressione costituiscono un sistema d'invarianti dell'omografia considerata nella geometria della retta ed essi si trovano così espressi mediante il sistema $J_0, \dots, J_4$ degl'invarianti ordinari dell'omografia. Da ciò seguono proposizioni interessanti, di cui mi basterà citare una. Si osservi che il coefficiente di s^5 si annulla quando $J_2 = 0$; ricordando dunque il significato geometrico degl'invarianti di un'omografia ottenuti come coefficienti del determinante caratteristico (45) si ha:

La condizione perchè si annulli l'invariante J_2 *di un'omografia, cioè che esista una coppia di tetraedri corrispondenti tali che ogni spigolo dell'uno tagli quello opposto al suo corrispondente dell'altro, coincide con quella assai più generale che esistano due sestuple di complessi lineari corrispondenti tali che ogni complesso dell'una appartenga coi cinque non corrispondenti dell'altra ad una serie lineare quattro volte infinita (cioè sia involutorio al complesso involutorio a quei cinque).*

Noto ancora che, essendo

$$(a_1 a_2 - a_3 a_4)(a_1 a_3 - a_4 a_2)(a_1 a_4 - a_2 a_3) = \frac{1}{J_0^3}(J_1^2 J_4 - J_0 J_3^2),$$

se ne deduce (n⁰ 1): *Affinchè l'omografia considerata muti in se stessa una quadrica, ossia muti in se stesso un complesso lineare non speciale (e quindi un fascio), cioè sia* $\{(\overline{11})\ 11\ 11\}$, *occorre e basta che*

$$J_1^2 J_4 - J_0 J_3^2 = 0.$$

20. Passando ora agl'invarianti di una correlazione, osserviamo che questa, se è generale, si può rappresentare con un'equazione bilineare della forma

$$mx_1' x_2 + nx_2' x_1 + px_3' x_4 + qx_4' x_3 = 0.$$

Il determinante caratteristico, cioè il determinante del fascio determinato da quella forma bilineare e dalla sua coniugata, sarà

$$\begin{aligned} \Delta(\varrho) &= A\varrho^4 + B\varrho^3 + C\varrho^2 + B\varrho + A = \\ &= (m\varrho + n)(n\varrho + m)(p\varrho + q)(q\varrho + p). \end{aligned}$$

(45) V. la mia Nota (estratto di una lettera al signor Rosanes): *Sur les invariants simultanés de deux formes quadratiques,* Math. Ann., XXIV, pp. 152-6; [V. queste « Opere », III, p. 334].

D'altra parte la corrispondenza che quella correlazione determina tra le rette è rappresentata, dicendo p e p' due rette corrispondenti, dalle equazioni

$$p'_{12} = pqp_{34}\,, \quad p'_{13} = nqp_{13}\,, \quad p'_{14} = -npp_{14}\,,$$

$$p'_{34} = mnp_{12}\,, \quad p'_{42} = mpp_{42}\,, \quad p'_{23} = -mqp_{23}\,,$$

e quindi il determinante caratteristico della correlazione, considerata come trasformazione lineare di S_5, è

$$D(s) = (s^2 - mnpq)(s + mp)(s + nq)(s - mq)(s - np) =$$

$$= (s^2 - A)(s^4 + \sqrt{2A - 2B + C} \cdot s^3 + (2A - B)s^2 +$$

$$+ A\sqrt{2A - 2B + C} \cdot s + A^2),$$

$$D(s) = s^6 + \sqrt{2A - 2B + C} \cdot s^5 + (A - B)s^4 - A(A - B)s^2 -$$

$$- A^2\sqrt{2A - 2B + C} \cdot s - A^3.$$

Avendo così espressi i coefficienti delle varie potenze di s in $D(s)$ mediante gl'invarianti ordinari della correlazione A, B, C (dei quali si conosce il significato geometrico), se ne possono dedurre proposizioni varie sulle correlazioni considerate nella geometria della retta. Ad esempio l'essere costantemente nullo il coefficiente di s^3 dà immediatamente una proprietà notevole comune a tutte le correlazioni. Così pure si trova che: *affinchè la correlazione generale si riduca alla specie* $[(\overline{11})\ 11]$ *deve essere* $2A - 2B + C = 0$. E via dicendo.

Torino, Marzo 1885.