Corrado Segre

Su una generazione dei complessi quadratici di rette del Battaglini

Rend. Circolo Mat. Palermo, Vol. **42** (1917), p. 85–93

in: Corrado Segre, Opere, a cura della Unione Matematica Italiana, Volume IV, Edizione Cremonese, Roma, 1963, p. 197–209

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Segre_CW_4_197>

LXXI.

SU UNA GENERAZIONE DEI COMPLESSI QUADRATICI DI RETTE DEL BATTAGLINI

«Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo», tomo XLII, 1917, pp. 85-93.

---

1. I complessi quadratici di rette studiati dal BATTAGLINI sono quelli che si posson rappresentare, riferendoli a un conveniente tetraedro, con un'equazione contenente solo i quadrati delle 6 coordinate: ossia quelli che, senz'essere complessi tetraedrali, son trasformati in sè dalle omologie armoniche date da un tetraedro.

F. ASCHIERI prima [1], e più tardi, indipendentemente da lui, F. SCHUR [2] han dimostrato che un tal complesso Γ si può sempre definire in infiniti modi come il luogo delle rette tagliate da due quadriche assegnate secondo due coppie armoniche di punti (od anche nel modo duale). Le quadriche occorrenti in queste definizioni sono tutte quelle, convenientemente accoppiate, di un particolare sistema ∞^1, S, i cui indici son tutti uguali a 4. Esse si possono anche caratterizzare come quelle quadriche (non coni) di cui tutte le generatrici stanno in Γ [3].

---

(1) F. ASCHIERI, *Sopra un complesso di secondo grado*, Giornale di Matem., 8, 1870, pp. 35-37.

(2) F. SCHUR, *Ueber einen das System zweier Flächen 2. Grades betreffenden Satz und einen damit verbundenen Strahlencomplex 2. Grades*, Math. Ann., XXI, 1883, pp. 515-527.

Cfr. anche la trattazione di R. STURM, *Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung*, III. Theil, Leipzig, Teubner, 1896, pp. 328 e seguenti.

(3) SCHUR dimostra (loc. cit. (2), p. 525) che se un complesso quadratico contiene ambe le schiere di generatrici di una quadrica non degenere, il complesso sarà di BATTAGLINI, e la quadrica farà parte del sistema S. Vedi anche STURM, loc. cit. (2), p. 351.

In un mio lavoro giovanile (4) io ho mostrato come questi fatti si presentino nel modo più semplice ricorrendo alla trasformazione $y_i = x_i^2$ per i punti x dello spazio. Un complesso di BATTAGLINI Γ si muta allora in un sistema di coniche di semplice definizione: cioè quelle coniche che, come superficie di 2ª classe degeneri, stanno in un dato sistema lineare ∞^4 di superficie di 2ª classe (inviluppi) tangenti a quattro piani fissi. Il tetraedroide che è superficie singolare di Γ si muta in una quadrica Q. Il sistema S di quadriche viene a corrispondere ad una ∞^1 di piani di 4ª classe e 1ª specie: i piani essendo così accoppiati che due piani di una coppia passano per una stessa generatrice, di una determinata schiera, di Q. Etc. etc.

2. In una ricerca intorno ai complessi lineari di schiere rigate, o *regoli* (5), mi si è ora presentato il complesso di BATTAGLINI con un'altra definizione, che mi pare nuova. Di essa appunto tratterò nella presente Nota.

Sian dati due regoli α, β, *su due quadriche distinte, non degeneri. Una retta* p *è incidente a due rette di* α *e due di* β. *Imponiamo a* p *la condizione che la quaterna dei suoi punti d'incontro con quelle rette sia projettiva alla quaterna dei piani che, rispettivamente, congiungono* p *alle rette stesse. Dico che il luogo di* p *sarà un complesso quadratico di* BATTAGLINI; *e che ogni complesso di* BATTAGLINI *si può generare in questo modo* (6).

Per dimostrare che le rette p formano un complesso quadratico, basta trasformarne la definizione nel seguente modo. Siano m n le rette di α, r s quelle di β, incidenti a p. L'ipotesi fatta di projettività fra punti e piani di p equivale a dire che vi è una

---

(4) C. SEGRE, *Su una trasformazione irrazionale dello spazio e sua applicazione allo studio del complesso quadratico di* BATTAGLINI *e di un complesso lineare di coniche iscritte in un tetraedro*, Giornale di Matem., 21, 1883, pp. 355-378 [V. queste « Opere », III, pp. 234-261].

(5) [V. questo volume, p. 264]. Dovendo parlare spesso di *sistema di generatrici di una quadrica*, ossia *schiera rigata*, è opportuno avere un vocabolo unico da sostituire a quelle locuzioni. Mi permetto d'introdurre a questo scopo la parola *regolo*, che già gl'Inglesi hanno adottato (*regulus*) nello stesso senso: veggasi, ad esempio, C. M. JESSOP, *A Treatise on the Line Complex*, Cambridge, University Press, 1903, p. 39 e oltre.

(6) Per brevità, nel seguito diremo questa la *generazione* del complesso *per incidenza su due regoli*; mentre la generazione di ASCHIERI si dirà *generazione armonica*.

congruenza lineare *speciale*, avente p per unica direttrice, contenente $m\ n\ r\ s$. Se facciamo passare un complesso lineare per questa congruenza e per una nuova retta di α, avremo un complesso lineare contenente α e $p\ r\ s$. Viceversa, se esiste un tale complesso lineare, la congruenza (speciale) delle sue rette appoggiate a p stabilirà fra i punti e i piani di p la projettività voluta.

Tiriamo dunque gli ∞^2 complessi lineari (*rete*) contenenti α. Per ognuno — sia L — prendiamo le due rette $r\ s$ secondo cui esso incontra β, ed assumiamole come direttrici di una congruenza lineare L'. Ogni retta p si potrà riguardare come una delle rette comuni ad un complesso L e ad una congruenza L'.

Ora, variando L nella rete, L' passa costantemente per il regolo β' *incidente* a β (cioè composto delle rette incidenti a quelle di β): ossia L' descrive anch'essa una rete. Le due reti son riferite reciprocamente. In fatti, se L si restringe a variare in un fascio, le coppie di rette $r\ s$ che L ha comuni con β generano un'involuzione entro questo regolo; e quindi tutte le congruenze L' che le hanno per direttrici stanno nel complesso lineare per cui quelle coppie di rette son coppie di rette coniugate. Viceversa, se L' varia in un complesso lineare, L descriverà un fascio.

Così il complesso C delle nostre rette p si genera colle intersezioni degli elementi omologhi di due reti (di complessi e congruenze lineari), aventi per sostegni α e β', riferite tra loro reciprocamente. È dunque un complesso quadratico.

Risulta che esso contiene α e β'; e analogamente dunque conterrà β e α' (regolo incidente ad α).

3. Il complesso C che abbiam definito coll'incidenza sui regoli α, β, si può definire nello stesso modo mediante i regoli α', β' incidenti a quelli. In fatti siano rispettivamente $m\ n$, $r\ s$ le rette di α, β incidenti alla retta p di C, ed $m'\ n'$, $r'\ s'$ le rette di α', β' che passano rispettivamente pei punti d'appoggio delle prime quattro rette su p. L'essere, per ipotesi, la quaterna di punti $p(m\ n\ r\ s)$ projettiva alla quaterna di piani $p\,(m\ n\ r\ s)$, poichè questi piani passeranno rispettivamente per $n'\ m'\ s'\ r'$, si potrà anche scrivere così: la quaterna di punti $p\,(m'\ n'\ r'\ s')$ è projettiva alla quaterna di piani $p\,(n'\ m'\ s'\ r')$, ossia alla quaterna di piani $p\,(m'\ n'\ r'\ s')$.

Di qui segue subito che C è un complesso di BATTAGLINI, avente per tetraedro principale quello che è autopolare comune rispetto alla quadrica A di $\alpha\alpha'$ e a quella B di $\beta\beta'$. Invero l'omologia armonica rispetto ad un vertice di questo tetraedro e alla sua faccia opposta muta α e β in α' e β': e quindi muta C in se stesso; ossia C ammette le omologie armoniche di quel tetraedro.

4. Una tangente generica p ad una delle due quadriche A, B (n⁰ 3) soddisfa, a prima giunta, alla condizione che definisce le rette del nostro complesso (n⁰ 2): in quanto che, venendo per essa a coincidere, ad esempio, m ed n, esiste, senz'altro, la projettività fra i punti e i piani $p(m\,n\,r\,s)$. In tal caso non si applica più a p il ragionamento che ci ha portato alla generazione, con reti reciproche, del complesso quadratico C. Si deve dunque sottintendere nella nostra definizione che quelle tangenti *generiche* vanno escluse.

D'altra parte C contiene necessariamente delle *particolari* tangenti di A (che occorre cioè introdurre in C per render *chiuso* l'aggregato, ossia per avere tutto un complesso algebrico). Son le rette comuni a due complessi quadratici: forman dunque una congruenza (4, 4). Se una tangente p di A, che non sia generatrice di questa quadrica, sta in C, il fascio di tangenti di A a cui essa appartiene avrà comuni con C tre rette (p e le due generatrici), e quindi starà tutto in C. Perciò quella congruenza (4, 4) si compone di ∞^1 fasci, i cui centri formeranno su A una curva di 4⁰ ordine e i piani un inviluppo di 4ª classe.

Consideriamo ora invece una retta p di C che passi per un punto P comune alle quadriche A e B. Essa avrà coincidenti in P, ad esempio, i due punti d'incontro colle rette m e r di α e β. Perchè p soddisfi alla definizione del n⁰ 2, nell'ipotesi che la projettività fra le due quaterne di punti e piani di p non degeneri, bisognerà che coincidano pure i due piani omologhi dei due punti suddetti, ossia i piani pm, pr. Se invece questi due piani sono distinti, la projettività sarà degenere, e il punto $P\,(=pm=pr)$, cui corrispondono due piani distinti, sarà punto singolare per essa; mentre il piano singolare avrà per corrispondenti gli altri due punti pn, ps, e sarà dunque un piano in cui coincideranno i due piani pn, ps. In conclusione per ogni retta p di C passante per P coincidono i due piani pm, pr, oppure i due piani pn, ps [7] (che son gli stessi che pm', pr' del n⁰ 3).

---

(7) Lo stesso si ottiene considerando la congruenza lineare speciale (n⁰ 2) avente per direttrice p e contenente $m\,n\,r\,s$: il 2⁰ caso corrisponde allo spezzarsi di questa congruenza.

Adunque la quartica intersezione delle quadriche A e B è luogo di punti singolari pel complesso C. Il cono di rette di C uscente da un suo punto qualunque P si spezza in due fasci, determinati, l'uno dalle due rette di α e di β, l'altro da quelle di α' e β', passanti per P.

Di passaggio, otteniamo questo corollario: Date due quadriche, sull'una delle quali siano α e α' i due regoli, sull'altra β e β', se per ognuno dei 4 punti comuni a quelle quadriche e ad un piano π si tirano in questo le due rette tracce del piano delle generatrici di α e β, o di α' e β', passanti pel punto, si avranno 8 tangenti di una stessa conica (la conica di C giacente in π).

5. Prendiamo ora un complesso generale di BATTAGLINI Γ. Sia F il tetraedroide, sua superficie singolare. Risulta dai lavori citati al n^0 1, in particolare dalla ricordata rappresentazione spaziale $y_i = x_i^2$, che su F stanno due sistemi ∞^1 (fasci razionali) di quartiche di 1^a specie C^4, residui l'un dell'altro (omologhi rispettivamente dei due sistemi di generatrici rettilinee della quadrica Q del n^0 1), tali che ogni quadrica del sistema S di ASCHIERI sega F in due C^4 rispettivamente dei due sistemi, e che viceversa per ogni C^4 passano due quadriche di S.

Le C^4 di un 1^0 *sistema* sono le intersezioni di quadriche A, A_1 fra loro omologhe per la generazione armonica (di ASCHIERI) di Γ. Le tangenti ad A, A_1 nei punti della loro C^4 comune son rette di Γ (sicchè la C^4 risulta essere inviluppo di rette singolari di Γ).

Si consideri invece una C^4 del 2^0 sistema e le due quadriche A, B di S che si segano in essa. Per ogni suo punto, come punto singolare di Γ, esce un cono di questo complesso spezzato in due fasci di rette, i quali complessivamente dovran contenere le quattro generatrici di A, B (che son rette di Γ) passanti pel punto. Supporre che sempre uno di quei fasci contenga le due generatrici di A (e l'altro quelle di B) equivarrebbe a dire che le tangenti ad A nei punti della C^4 stanno tutte in Γ: mentre invece le tangenti ad A che stanno in Γ hanno, come s'è detto, i punti di contatto sull'altra C^4 di A (l'intersezione con A_1). Dunque, detti $\alpha\alpha'$ i regoli di A, $\beta\beta'$ quelli di B, staranno nell'un fascio, ad esempio, la retta di α e quella di β, e nell'altro fascio le rette di α' e β'. Quindi il complesso C definito (n^0 2) coll'incidenza sui regoli α e β (od α' e β') avrà comuni con Γ (n^0 4) infiniti fasci di rette costituenti due congruenze di 4^0 ordine e 4^a classe: e però coinciderà con Γ.

Resta così dimostrato che: *ogni complesso di* BATTAGLINI *si può generare nel modo indicato al* n⁰ 2, e che anzi *i regoli* $\alpha\,\beta$ *si posson scegliere in* ∞^1 *modi sulle quadriche di quello stesso sistema* S *che serve alla generazione armonica del complesso. Entro* S *ogni quadrica* A *ne ha una associata per la generazione armonica, ed una associata per la generazione con incidenza su due regoli: sono rispettivamente le due quadriche di* S *che tagliano* A *secondo le due quartiche che essa ha comuni col tetraedroide.*

6. Volendo ritrovare il risultato precedente per via analitica, prendiamo due quadriche riferite al loro comune tetraedro polare:

$$(1)\qquad A \equiv \Sigma\, a_i\, x_i^2 = 0\,, \qquad B \equiv \Sigma\, b_i\, x_i^2 = 0.$$

Data una retta p di coordinate p_{ik}, le quadriche del loro fascio, $\lambda A + \mu B$, tangenti ad essa rispondono ai valori di λ, μ soluzioni dell'equazione

$$(2)\qquad \lambda^2\, \Sigma\, a_1\, a_2\, p_{12}^2 + \lambda\mu\, \Sigma\, (a_1\, b_2 + a_2\, b_1)\, p_{12}^2 + \mu^2\, \Sigma\, b_1\, b_2\, p_{12}^2 = 0\,;$$

e dualmente dalla schiera di quadriche che contiene A e B si ha quest'altra equazione

$$(3)\qquad \lambda^2\, \Sigma\, \frac{p_{12}^2}{a_3\, a_4} + \lambda\mu\, \Sigma \left(\frac{1}{a_3\, b_4} + \frac{1}{a_4\, b_3}\right) p_{12}^2 + \mu^2\, \Sigma\, \frac{p_{12}^2}{b_3\, b_4} = 0.$$

In base a ciò, si scrive che un birapporto delle due coppie di punti d'intersezione della retta p con A, B è uguale ad un birapporto delle due coppie di piani tangenti tirati da p a quelle stesse quadriche, ponendo:

$$\frac{[\Sigma\, (a_1\, b_2 + a_2\, b_1)\, p_{12}^2]^2}{\Sigma\, a_1 a_2\, p_{12}^2 \cdot \Sigma\, b_1 b_2\, p_{12}^2} = \frac{\left[\Sigma \left(\frac{1}{a_3\, b_4} + \frac{1}{a_4\, b_3}\right) p_{12}^2\right]^2}{\Sigma\, \frac{p_{12}^2}{a_3\, a_4} \cdot \Sigma\, \frac{p_{12}^2}{b_3\, b_4}}$$

ossia:

$$[\Sigma\, (a_1\, b_2 + a_2\, b_1)\, p_{12}^2]^2 = a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, b_1\, b_2\, b_3\, b_4 \left[\Sigma \left(\frac{1}{a_3\, b_4} + \frac{1}{a_4\, b_3}\right) p_{12}^2\right]^2.$$

Così la retta p ha per luogo un complesso di 4^0 grado, il quale però si spezza nei due complessi quadratici

$$\Sigma (a_1 b_2 + a_2 b_1) p_{12}^2 = k \Sigma \left(\frac{1}{a_3 b_4} + \frac{1}{a_4 b_3}\right) p_{12}^2, \tag{4}$$

ove k indica l'una o l'altra radice quadrata di $a_1 a_2 a_3 a_4 b_1 b_2 b_3 b_4$. Questo spezzamento del luogo di p risponde al separare su A, e così su B, i due regoli che vi stanno — e siano α, α' e β, β' — e poi distinguere secondo che l'uguaglianza di birapporti che s'è posta si ha per essere p nel complesso generato per incidenza (n^0 2) sulla coppia α, β (ossia α', β'), od in quello proveniente dalla coppia α, β' (ossia α', β).

Dato un complesso di BATTAGLINI

$$\Sigma c_{12} p_{12}^2 = 0, \tag{5}$$

esso si genererà per incidenza su due regoli delle quadriche (1), se la (4) coincide colla (5), ossia se

$$a_1 b_2 + a_2 b_1 - k \left(\frac{1}{a_3 b_4} + \frac{1}{a_4 b_3}\right) = \varrho\, c_{12}, \tag{6}$$

colle cinque equazioni analoghe. Da questa e dall'equazione contenente c_{34} si trae che $\varrho\,(c_{12} a_3 a_4 + c_{34} a_1 a_2)$ è una funzione simmetrica dei quattro indici inferiori; ossia:

$$c_{12} a_3 a_4 + c_{34} a_1 a_2 = c_{13} a_4 a_2 + c_{42} a_1 a_3 = c_{14} a_2 a_3 + c_{23} a_1 a_4. \tag{7}$$

Ora sono appunto queste le equazioni di ASCHIERI per il sistema S delle quadriche che servono alla generazione armonica,

Si verifica poi che le (6) son soddisfatte se, oltre alle (7), si pone

$$\frac{a_1 b_1}{c_{12} c_{13} c_{14}} = \text{analoghe}, \tag{8}$$

che sono tre equazioni, le quali, per ogni quadrica A di S, individueranno la quadrica B ad essa associata per la generazione del complesso (5) con incidenza su regoli [8].

---

[8] Le (8) s'incontrano, per altra via, a p. 523 linea 10 della Nota di SCHUR.

7. Con ciò si potrebbe riguardare come esaurito l'argomento.

Pur tuttavia mi pare che possa offrire qualche interesse il riprendere la questione dal punto di vista proprio della geometria delle rette, ossia operando nello spazio S_5, su cui una V_4^2 irriducibile, R, rappresenta coi suoi punti le rette dello spazio ordinario.

Un dato complesso quadratico è allora rappresentato dalla varietà Γ intersezione di R con un'altra V_4^2. Se il complesso è generato da incidenza su due regoli α, β, questi saranno dati in S_5 dall'intersezione di R con due piani, che indicheremo ancora con α, β. I regoli incidenti a quei due saran rappresentati analogamente dai piani α', β', polari di α, β rispetto ad R. Ora al n⁰ 2 si era rilevato che la definizione ivi data del complesso equivaleva a questa: ogni retta p di esso è direttrice di una congruenza lineare speciale che contiene due rette del regolo α' e due del regolo β' (9). Trasportando ciò in S_5 abbiamo: Γ è il luogo di un punto di R tale che esiste un S_3 tangente in esso ad R e incidente secondo rette ai piani α', β'. E polarizzando rispetto ad R: *Γ è il luogo dei punti di contatto di* R *con rette incidenti ai piani* α, β. Cerchiamo appunto Γ secondo questa definizione (10).

A questo scopo si potrebbe anzitutto applicare qui un ragionamento sintetico equivalente a quello che per lo spazio rigato (ora rappresentato in S_5) s'era fatto al n⁰ 2. Se cioè P è un punto di Γ, ed m la retta tangente in esso a R ed incidente a α, β, P starà sia sull'iperpiano polare del punto $m\alpha$ rispetto ad R, sia sull'S_3 che da β projetta lo stesso punto $m\alpha$. Ora quell'iperpiano descrive, intorno al piano α' polare di α, una rete che è reciproca a quella descritta dall'S_3 intorno a β; queste due reti reciproche generano una V_4^2, contenente α' e β, la quale segherà R secondo Γ.

Ma anzi che proseguire per questa via, preferiamo procedere analiticamente.

8. Semplifichiamo la rappresentazione analitica, osservando che le 3 rette che sono incidenti ai quattro piani α β α' β' (le diremo d'or innanzi le *rette principali*) formano una *terna polare* rispetto ad

(9) Secondo il n⁰ 2 si dovrebbe qui dire α e β; ma al n⁰ 3 si è visto che questi regoli posson sostituirsi con α' e β'.

(10) La trattazione seguente si applica senz'altro al problema più generale: in S_{2q+1} ricercare il luogo Γ dei punti di contatto di una data V_{2q}^2 con rette appoggiate a due dati S_q. Γ risulta l'intersezione di quella forma quadrica con un'altra. Vedi la nota (11).

R, vale a dire son tali che ognuna ha per S_3 polare rispetto ad R lo spazio delle altre due. In conseguenza, se si prendono ad arbitrio su ciascuna di esse due punti coniugati rispetto ad R, e i sei punti si assumono come fondamentali (14, 25, 36) per le coordinate, R si potrà rappresentare così:

$$R \equiv \Sigma\, x_i^2 = 0. \tag{9}$$

Il piano α si determini colle sue tracce sulle tre rette principali, cioè coi punti

$$\begin{cases} (a_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0) \\ (0 & a_2 & 0 & 0 & 1 & 0) \\ (0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 1), \end{cases} \tag{10}$$

e così il piano β coi punti

$$\begin{cases} (b_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0) \\ (0 & b_2 & 0 & 0 & 1 & 0) \\ (0 & 0 & b_3 & 0 & 0 & 1). \end{cases} \tag{11}$$

Un punto x di Γ starà (n^0 7) sulla retta che unisce un punto di α, ottenuto combinando linearmente i tre punti (10) coi fattori $\lambda_1\, \lambda_2\, \lambda_3$, ad un punto di β, ottenuto combinando i punti (11) coi fattori $\mu_1 \mu_2 \mu_3$. Ossia

$$\begin{cases} x_1 = \lambda_1\, a_1 + \mu_1\, b_1, \quad x_2 = \lambda_2\, a_2 + \mu_2\, b_2, \quad x_3 = \lambda_3\, a_3 + \mu_3\, b_3 \\ x_4 = \lambda_1 + \mu_1, \qquad x_5 = \lambda_2 + \mu_2, \qquad x_6 = \lambda_3 + \mu_3. \end{cases} \tag{12}$$

Inoltre quella retta deve giacere sull'iperpiano tangente in x a R, cioè giace su quell'iperpiano il punto di α ora considerato. Dunque:

$$x_1\, \lambda_1\, a_1 + x_2\, \lambda_2\, a_2 + x_3\, \lambda_3\, a_3 + x_4\, \lambda_1 + x_5\, \lambda_2 + x_6\, \lambda_3 = 0. \tag{13}$$

Dalle (12) eliminando le μ abbiamo:

$$x_1 - b_1\, x_4 = \lambda_1\, (a_1 - b_1), \ldots , x_3 - b_3\, x_6 = \lambda_3\, (a_3 - b_3);$$

e di qui ricavando le λ e sostituendole in (13):

$$\frac{(a_1 x_1 + x_4)(x_1 - b_1 x_4)}{a_1 - b_1} + \frac{(a_2 x_2 + x_5)(x_2 - b_2 x_5)}{a_2 - b_2} + \frac{(a_3 x_3 + x_6)(x_3 - b_3 x_6)}{a_3 - b_3} = 0. \tag{14}$$

È questa una nuova equazione quadratica nelle x: il che ci conferma che il nostro complesso di rette è di 2^0 grado. Si vede pure che rispetto alla varietà quadrica (14) la terna delle rette principali 14, 25, 36 è ancora una *terna polare*: il che si poteva prevedere, da cose precedenti. Se dunque supponiamo che come punti fondamentali delle coordinate su ognuna di quelle tre rette si sia presa precisamente la coppia dei punti coniugati comuni ad R e a quella nuova varietà quadrica, questa sarà rappresentata anch'essa da una somma di quadrati.

9. In base a ciò, assumiamo ora per data la varietà Γ, come intersezione di R stessa che ha per equazione la (9), e di

$$\Sigma\, t_i\, x_i^2 = 0. \tag{15}$$

Perchè con R e coi piani α, β determinati dalle terne di punti (10), (11) venga generata Γ nel modo esposto al n^0 7, dovrà la (14) essere una combinazione lineare delle equazioni (9) e (15); ossia:

$$a_1\, b_1 = a_2\, b_2 = a_3\, b_3 = 1 \tag{16}$$

$$\frac{a_1}{a_1 - b_1} = \varrho + \sigma\, t_1\,, \; - \frac{b_1}{a_1 - b_1} = \varrho + \sigma\, t_4\,, \tag{17}$$

e due coppie di equazioni analoghe alle (17) (ottenute mutando gli indici 1,4 in 2,5 e in 3,6).

Dalle (17) sommando si ha

$$1 = 2\varrho + \sigma\,(t_1 + t_4), \tag{18}$$

e due analoghe. Dunque anzitutto perchè il problema sia possibile devono i coefficienti della (15) verificare le condizioni:

$$t_1 + t_4 = t_2 + t_5 = t_3 + t_6\,. \tag{19}$$

Ciò significa che nel fascio delle forme quadriche passanti per Γ i 6 coni si posson accoppiare in 3 coppie di un'involuzione di cui R è un elemento doppio [11]. E questo fatto si traduce, com'è noto, in

[11] L'analoga condizione varrà pel problema generale di S_{2q+1} accennato nella [10].

S_3 dicendo che il complesso quadratico rappresentato da Γ dev'essere un complesso di BATTAGLINI.

Supposto poi che le (19) sian soddisfatte, possiamo rappresentare Γ colla (9) e — invece della (15) — una tal combinazione lineare di (9) e (15) che, chiamando ancora t_i i coefficienti delle x_i^2 in essa, le (19) si precisino nel seguente modo:

$$t_1 + t_4 = t_2 + t_5 = t_3 + t_6 = 0.$$

Così la (15) si muta in ([12]):

$$(20) \qquad T \equiv t_1 (x_1^2 - x_4^2) + t_2 (x_2^2 - x_5^2) + t_3 (x_3^2 - x_6^2) = 0,$$

e la (18) diventa $1 = 2\varrho$, che rende le due (17) equivalenti a

$$\frac{b_1}{a_1 - b_1} = t_1 \sigma - \frac{1}{2},$$

ossia, eliminando b_1 per mezzo della (16), e poi scrivendo anche le due equazioni analoghe cogl'indici 2 e 3 invece che 1:

$$(21) \qquad a_1^2 = \frac{2 t_1 \sigma + 1}{2 t_1 \sigma - 1}, \dots, a_3^2 = \frac{2 t_3 \sigma + 1}{2 t_3 \sigma - 1}.$$

Abbiamo dunque il seguente risultato: affinchè la varietà Γ intersezione di R e T, definite da (9) e (20), provenga nel modo voluto (n^0 7) da R e dai piani α, β che congiungono le terne di punti (10), (11), è condizione necessaria e sufficiente che si verifichino le (21) e le (16). Nelle (21) σ è un parametro arbitrario, col variar del quale otteniamo ∞^1 terne $a_1 a_2 a_3$, ossia piani α; e ad ognuno di questi, per le (16), risponde un piano β. Sono dunque ∞^1 le coppie di piani $\alpha\beta$ che risolvono il problema. Naturalmente il piano β descrive lo stesso sistema ∞^1 che il piano α: se α corrisponde per le (21) a σ, β proverrà da $-\sigma$.

10. La varietà di piani, data dalle formole (10) e (21), così ottenuta (d'ordine 12, colle tre rette principali come rette quadruple),

---

([12]) Questa varietà T del fascio, data dalla (20), è il secondo elemento doppio dell'involuzione interna al fascio, di cui s'è parlato dianzi. R e T segano ciascuna delle tre rette principali in due coppie di punti mutuamente armoniche.

si genera assai semplicemente. Le (21) danno, per ogni σ, sulle tre rette principali coppie di punti (a_1 0 0 1 0 0), ..., di tre particolari involuzioni. Sono le coppie segate su quelle rette dalle forme quadriche $R - 2\sigma T = 0$, come subito si vede sostituendo in questa equazione, ad esempio, il punto (a_1 0 0 1 0 0). I piani della nostra varietà si hanno dunque, a gruppi di 8, congiungendo fra loro in tutti i modi possibili i punti d'incontro delle tre rette principali con una stessa forma quadrica del fascio RT (il che dà 8 piani contenuti in quella forma) (13).

La varietà è polare di se stessa, sì rispetto ad R che rispetto a T. Per ogni suo piano α il piano polare rispetto a R rappresenta il regolo incidente al regolo rappresentato da α; mentre il piano polare rispetto a T è, per le (16), il piano β associato ad α per la nostra generazione di Γ.

Si prendan le intersezioni delle tre rette principali con una forma quadrica (σ) del fascio RT, e le intersezioni delle rette stesse colla forma quadrica ($-\sigma$) che nel fascio è coniugata armonica della prima rispetto a R e T. Allora ad ognuno, α, degli 8 piani congiungenti 3 punti del 1° gruppo è associato come piano β, cioè come polare rispetto a T, un piano che unisce 3 punti del 2° gruppo, ed è polare rispetto ad R il piano che congiunge i residui 3 punti di questo 2° gruppo. Trasportando queste ultime osservazioni colla polarità rispetto a R, e poi riportandole allo S_3 rigato, si ottiene il seguente risultato:

S'indichino con $\mathfrak{c}_l\, \mathfrak{d}_l\ (l = 1, 2, 3)$ *le tre coppie di spigoli opposti di un tetraedro* (14), *riguardate come complessi lineari speciali. Nel fascio di complessi lineari determinato da* $\mathfrak{c}_l$ *e* $\mathfrak{d}_l$, *si fissi (per ogni* l*) un'involuzione contenente la coppia* $\mathfrak{c}_l\, \mathfrak{d}_l$. *Si riferiscano projettivamente fra loro le tre involuzioni, in modo che in esse siano omologhe le tre coppie* $\mathfrak{c}_l\, \mathfrak{d}_l$, *ed anche le coppie* (15) *che sono rispettivamente armoniche a queste* (16). *Dopo ciò, se sono* $\mathfrak{m}_l\, \mathfrak{n}_l\ (l = 1, 2, 3)$ *tre coppie variabili di complessi lineari delle tre involuzioni, omologhe per quel riferi-*

---

(13) In particolare le intersezioni delle tre rette principali con R, congiunte fra loro, danno 8 piani di R, cui rispondono in S_3, come stelle e piani rigati, i vertici e le facce del tetraedro principale del complesso quadratico di BATTAGLINI.

(14) Corrispondono alle tracce di R sulle tre rette principali.

(15) Queste provengono dalle tracce di T sulle rette principali. Si tien conto qui della fine della nota (12).

(16) Sicchè nelle projettività restan solo più due costanti arbitrarie.

mento projettivo, gli 8 *regoli intersezioni di tre complessi tolti rispettivamente da quelle tre coppie descriveranno un sistema* S *di* ASCHIERI (n^0 1) *relativo ad un complesso quadratico di* BATTAGLINI. *E ad uno qualunque di tali regoli, per esempio a quello che è intersezione dei complessi* $\mathrm{m}_1\,\mathrm{m}_2\,\mathrm{m}_3$, *sarà associato per la generazione del* n^0 2 *del complesso di* BATTAGLINI *quel regolo che è incidente al regolo intersezione di* $\mathrm{n}_1\,\mathrm{n}_2\,\mathrm{n}_3$.

Torino, Ottobre 1916.