Corrado Segre

Sui complessi lineari di piani nello spazio a cinque dimensioni

Annali Mat. pura ed applicata, Vol. **27** (1918), p. 75–123

in: Corrado Segre, Opere, a cura della Unione Matematica Italiana, Volume IV, Edizione Cremonese, Roma, 1963, p. 215–263

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Segre_CW_4_215>

LXXIII.

SUI COMPLESSI LINEARI DI PIANI NELLO SPAZIO A CINQUE DIMENSIONI (1)

« Annali di matematica pura ed applicata »,
serie III, tomo XXVII, 1917, pp. 75-123.

Premesse. Rappresentazione dei piani di S_5 su una V_9 di S_{19}. Il sistema nullo $\mathfrak{N}$.

1. I piani dello S_5 si rappresentano colle note coordinate di Grassmann, p_{hkl}, determinanti estratti dalla matrice delle coordinate (omogenee) di tre punti indipendenti del piano, prendendone le colonne $h\,k\,l$. Basterà assumere, per gl'indici, delle *combinazioni* ternarie di $1\ 2 \ldots 6$. Perciò le coordinate distinte sono 20.

Talvolta ci converrà anche d'indicare quelle coordinate con p_i, ove l'indice unico i, variabile da 1 a 20, starà per rappresentare una *terna* $h\,k\,l$.

I piani sono ∞^9.

La condizione d'incidenza di due piani p, p' (2) è

$$(1) \qquad (p\,,p') \equiv p_{123}\,p_{456} + \cdots = 0,$$

ove s'intende, nella somma, che si assumano come indici delle p 20 combinazioni ternarie distinte di $1\ 2 \ldots 6$, e si moltiplichi ciascuna p per quella p' che ha per indici i tre numeri residui, disposti in modo che i sei indici della p e della p' costituiscano una permu-

(1) V. alla fine un indice particolareggiato, che può dare una prima idea del contenuto di questo scritto.

(2) Sarà sottinteso, ogni volta che non si dica espressamente il contrario, che lo spazio ambiente è S_5.

tazione pari. — E qui si osservi subito, e sarà essenziale in seguito, che se indichiamo con i e j rispettivamente due *terne* d'indici (non due indici) *complementari* in quel senso, cioè tali che ij costituisca una permutazione pari di $1\,2 \ldots 6$, scambiandole fra loro si avrà invece in $j\,i$ una permutazione dispari. In conseguenza nella (1) insieme al termine $p_i p'_j$ figurerà un termine che potremo scrivere: $-p_j p'_i$. Così vi sarà il termine: $-p_{456}\, p'_{123}$; ecc. La relazione bilineare (1) è, cioè, *alternata*, non simmetrica come risulta invece l'analoga condizione d'incidenza per due rette di S_3 (cfr. la nota (6) al n⁰ 4). Coi simboli $1, 2, \ldots, 20$ per indicare le venti combinazioni ternarie di $1\,2 \ldots 6$, la (1) si potrà scrivere:

$$(2) \qquad (p_1 p'_2 - p_2 p'_1) + (p_3 p'_4 - p_4 p'_3) + \ldots + (p_{19} p'_{20} - p_{20} p'_{19}) = 0.$$

2. Un *complesso lineare di piani* è l'insieme di quei piani le cui coordinate verificano una data equazione lineare (omogenea).

Mettendo in evidenza tre punti $x\,y\,z$ di un piano p di un complesso lineare Γ, cioè ponendo le coordinate $p_{hkl} = (x\,y\,z)_{hkl}$, e assumendo come dati due di quei punti, od uno, l'equazione di Γ mostra subito quanto segue.

I piani di Γ passanti per una data retta riempiono, in generale, coi loro punti un iperpiano (contenente la retta).

I piani di Γ passanti per un dato punto x sono quelli che projettano da x le rette di un complesso lineare di rette, pel quale x è punto *singolare*, nel senso che tutte le rette passanti per x stanno nel complesso.

Dualmente: i piani di Γ giacenti in un S_3 formano, in generale, un'ordinaria stella di piani; i piani di Γ giacenti in un dato S_4 formano, entro questo, un complesso lineare di piani, ossia il duale, entro S_4, di un complesso lineare di rette.

I coefficienti dell'equazione dei complessi lineari di piani, in S_5, sono 20; perciò questi complessi sono ∞^{19}.

Un esempio, molto particolare, di complesso lineare di piani è dato dall'insieme di quei piani che incontrano un piano fisso α. Se a_{hkl} sono le coordinate di questo, l'equazione del complesso sarà (n⁰ 1): $(a, p) = 0$. Ne indicheremo talvolta il 1⁰ membro, anche più brevemente, con (a). E diremo che il complesso lineare è *nucleato*, e che il piano α è il suo *nucleo*.

3. Si considerino, in uno spazio di dimensione 19, i punti le cui 20 coordinate omogenee sono le p_{hkl} dei vari piani di S_5. Questi

punti formeranno una V_9, che verrà così a dare la più opportuna rappresentazione dell'insieme dei piani di S_5: allo stesso modo come le rette dello spazio ordinario si rappresentano convenientemente sui punti di una V_4^2 di S_5.

Le sezioni della V_9 (3) cogl'iperpiani di S_{19} saranno le imagini dei complessi lineari di piani di S_5 (4).

In particolare vi saranno ∞^9 sezioni iperpiane particolari, corrispondenti ai complessi lineari nucleati. Riconosceremo più avanti (n⁰ 41) la singolarità di queste sezioni.

L'ordine della V_9, ossia il numero delle intersezioni di 9 sue sezioni iperpiane, cioè il numero dei piani di S_5 comuni a 9 complessi lineari, sarà uguale in particolare al numero dei piani di S_5 che ne incontrano 9 dati, ossia (per una formola di H. SCHUBERT) a 42 (5). Del resto, non avremo occasione di servirci di questo numero.

4. Nello spazio S_{19} avremo da considerare quel sistema nullo, ovvero complesso lineare di rette, che è rappresentato dalla relazione bilineare alternata (1) o (2), quando i due gruppi di 20 variabili p e p' che vi compajono s'interpretino come coordinate di punti *qualunque* in quello spazio. Indicheremo con $\mathcal{N}$ tanto il sistema nullo quanto il complesso lineare di rette (6).

---

(3) Nel seguito, dicendo « *la* V_9 » s'intenderà sempre quella ora definita.

(4) F. SEVERI, *Sulla varietà che rappresenta gli spazi subordinati di data dimensione, immersi in uno spazio lineare* (Ann. mat., (3) 24, 1915, p. 89), dimostra un teorema generale, da cui segue che sulla nostra V_9 ogni V_8 (algebrica) è la completa intersezione della V_9 con una forma (cioè V_{18} di S_{19}): sicchè un complesso algebrico di piani dello S_5 tale che in un fascio di piani generico ve ne siano n si potrà sempre rappresentare con un'equazione di grado n fra le coordinate di piano. In particolare i *complessi lineari di piani* si potranno definire come varietà algebriche irriducibili di piani tali che in un fascio generico di piani ve n'è uno.

(5) Per le citazioni su questo enunciato, come su altre cose, mi sia permesso rinviare il lettore al mio articolo « *Mehrdimensionale Räume* », a p. 769 e seg.ⁱ del 2⁰ volume di Geometria dell' *Encyklopädie der math. Wissenschaften.* Gli sviluppi su quei fatti che riguardiamo come noti si potranno trovare, ad esempio, in E. BERTINI, *Introduzione alla geometria projettiva degli iperspazi*, Pisa, 1907.

(6) Nella geometria degli spazi autoduali S_q di uno spazio di dimensione impari $2q+1$ si presenta la condizione d'incidenza di due S_q, analoga alla (1), con una forma bilineare *simmetrica*, oppure *alternata*, secondo che q è impari o pari. Per conseguenza, a seconda di questa imparità o parità di q, vi è da considerare, nello spazio rappresentativo degli S_q, una forma quadrica (ossia polarità ordinaria), oppure un complesso lineare di rette (ossia sistema nullo).

Dal n⁰ 1 segue che è lo stesso dire che due punti della V_9 sono imagini di due piani incidenti di S_5, o dire che i due punti sono *coniugati* rispetto ad $\mathcal{N}$ (cioè situati su una retta del complesso $\mathcal{N}$, ossia tali che ognuno giace nell'iperpiano polare dell'altro rispetto al sistema nullo $\mathcal{N}$).

Abbiamo visto (n⁰ 3) che un complesso lineare di piani di S_5

$$\Sigma\, c_{hkl}\, p_{hkl} = 0 \tag{3}$$

si può rappresentare in S_{19} per mezzo dell'iperpiano che ha ivi quest'equazione (le p essendo coordinate di punto variabile). Orbene ci converrà anche di adoperare come imagine di quel complesso quel punto di S_{19} la cui coordinata d'indici 1 2 3 è c_{456}, e così via: ciò vuol dire il punto che è polo di quell'iperpiano rispetto ad $\mathcal{N}$.

L'equazione (2) di $\mathcal{N}$ si presenta sotto la forma canonica per le equazioni bilineari alternate, ossia per le equazioni di complessi lineari di rette e sistemi nulli negli spazi di dimensione impari. Si riconosce subito che il suo discriminante non è nullo: $\mathcal{N}$ non è degenere.

Introduzione delle trilinearità tra forme di 1.ª specie.

5. Per il seguito sarà utile che facciamo fin d'ora un cenno di un legame tra i complessi lineari di piani di S_5 e le trilinearità tra forme di 1.ª specie (7).

Date tre rette m n p *linearmente indipendenti* (cioè aventi per spazio congiungente l'S_5), *i piani appoggiati ad esse, che stanno in un dato complesso lineare, segnano in generale su* m n p *le terne di una determinata trilinearità.*

In fatti, assumiamo rispettivamente su quelle tre rette le coppie di punti fondamentali per le coordinate: 1 e 4, 2 e 5, 3 e 6; sicchè tre punti qualunque di $m\,n\,p$ avranno per coordinate:

$$\left\{\begin{array}{cccccc} u & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & w & 0 & 0 & 1. \end{array}\right. \tag{4}$$

(7) Intorno alle *trilinearità*, o *corrispondenze trilineari* tra forme di 1.ª specie, cfr. ad esempio R. STURM, *Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften*, Bd. I, Leipzig, 1908, pp. 319 e segg., ove si troveranno anche altre citazioni.

Il piano che congiunge questi punti avrà 8 coordinate espresse così:

$$(5) \qquad \begin{cases} p_{123} = u\,v\,w\,, & p_{234} = v\,w\,, & p_{315} = w\,u\,, & p_{126} = u\,v\,, \\ p_{156} = u\,, & p_{264} = v\,, & p_{345} = w\,, & p_{456} = 1\,, \end{cases}$$

e le 12 coordinate rimanenti uguali a zero. Scrivendo che il piano sta in un dato complesso lineare, di equazione (3), non si porrà alcun legame fra i tre punti, se in quell'equazione mancano precisamente i termini contenenti le prime otto p_{hkl}. *Vi sono dunque* ∞^{11} *complessi lineari che contengono tutti i piani incidenti ad* m n p. Invece se il complesso lineare è generico, sostituendo i detti valori delle p_{hkl} nella sua equazione, otteniamo:

$$(6) \qquad \begin{cases} c_{123}\,u\,v\,w + c_{234}\,v\,w + c_{315}\,w\,u + c_{126}\,u\,v + \\ \qquad + c_{156}\,u + c_{264}\,v + c_{345}\,w + c_{456} = 0\,, \end{cases}$$

equazione di una corrispondenza trilineare fra i tre punti $u\ v\ w$ di $m\ n\ p$.

Viceversa, data una trilinearità fra le tre rette $m\,n\,p$, possiamo rappresentarla coll'equazione (6). Quindi essa proverrà nel modo indicato da ∞^{12} complessi lineari di piani (3), pei quali sono gli stessi (o proporzionali) gli 8 coefficienti c_{hkl} che figurano nella (6), e diversi invece i rimanenti 12.

6. La rappresentazione, per mezzo dei parametri variabili $u\ v\ w$, dei piani incidenti a $m\ n\ p$, che è data dalle (5) unite all'annullamento delle rimanenti coordinate, prova che i punti imagini di quei piani nello S_{19} (n^0 3) stanno tutti in un S_7 (quello degli otto punti fondamentali 123, 456, 234, 156, 315, 264, 126, 345); e formano una varietà V_3^6 (contenuta nella V_9) luogo di tre sistemi ∞^2 di rette, ecc., costituente una rappresentazione biunivoca opportuna per le terne di punti di $m\ n\ p$ [8]. Le sezioni iperpiane di questa V_3^6 sono imagini delle trilinearità fra queste tre rette, ecc.

L'S_7 considerato non è *totale* pel complesso lineare di rette $\mathfrak{N}$ di S_{19}: non ha cioè in $\mathfrak{N}$ tutte le sue rette. Se nell'equazione (1) o (2) di $\mathfrak{N}$, in cui scriveremo simboli c invece delle p, poniamo

(8) Si tratta cioè di una di quelle varietà a cui è dedicata la mia Nota: *Sulle varietà che rappresentano le coppie di punti di due piani o spazi,* Rend. Palermo, 5, 1891, p. 192 [V. queste « Opere », I, pp. 173-184].

nulle quelle coordinate c o c' di punto di S_{19}, il cui annullarsi caratterizza l'S_7, otteniamo:

$$(7)\qquad \begin{cases} c_{123}\,c'_{456} - c_{456}\,c'_{123} + c_{156}\,c'_{234} - c_{234}\,c'_{156} + \\ + c_{264}\,c'_{315} - c_{315}\,c'_{264} + c_{345}\,c'_{126} - c_{126}\,c'_{345} = 0: \end{cases}$$

equazione di un complesso lineare di rette, o sistema nullo, non degenere, di S_7, che occorre nello studio delle trilinearità fra tre rette date, e che nel seguito indicheremo con $\mathcal{N}_1$.

Piani legati linearmente. Spazi contenuti nella V_9.

7. Due o più piani $\alpha, \beta, \ldots$ di S_5 si dicono *legati linearmente* se le loro coordinate $a_i, b_i, \ldots$ $(i = 1, 2, \ldots, 20)$ verificano, per ogni i, relazioni della forma

$$(8)\qquad \lambda\, a_i + \mu\, b_i + \ldots = 0,$$

ove $\lambda, \mu, \ldots$ non sono tutte nulle. Ciò è come dire che i punti $a, b, \ldots$ della V_9 di S_{19}, imagini di $\alpha, \beta, \ldots$, sono legati linearmente.

Due piani legati linearmente sono due piani coincidenti.

Se k piani $\alpha\,\beta\,\gamma\ldots$, distinti, sono legati linearmente, ciò è come dire che uno di essi (avente nella (8) un coefficiente λ, o $\mu, \ldots$ non nullo), per esempio α, si può riguardare come combinazione lineare dei rimanenti $\beta, \gamma, \ldots$ Allora ogni complesso lineare che contenga questi ultimi contiene anche quello. In particolare ogni piano incidente a $\beta, \gamma, \ldots$ sarà pure incidente ad α. — Ciò varrà, *comunque* si prenda α fra i k piani $\alpha\,\beta\,\gamma\ldots$, quando si sappia che $k-1$ di questi sono *sempre* linearmente indipendenti.

Se una retta r è incidente a $k-1$ piani $\beta\,\gamma\ldots$, sarà pure incidente ad un piano α che sia combinazione lineare di quelli. Infatti, ogni piano per r, incontrando $\beta\,\gamma\ldots$, dovrà pure incontrare α: ora se r ed α non fossero incidenti e quindi determinassero un S_4, un piano tirato per r, non giacente in questo spazio, non incontrerebbe α.

Se i k piani $\alpha\beta\ldots\gamma\delta$ sono legati linearmente, senza che siano così legati una parte di essi, una retta r incidente ai primi $k-2$ fra essi sarà tale che ogni piano per essa incidente a γ è pure incidente a δ, e viceversa: onde r incontrerà anche γ e δ, o se no, γ e δ staranno in uno stesso S_4 (con r).

8. Siano $\alpha\,\beta\,\gamma$ tre piani distinti legati linearmente. Ogni retta tirata da un punto A di α ad incontrare β, incontrerà pure γ (n⁰ 7), e viceversa: onde l'S_3 che unisce A a β coincide con quello che unisce A a γ. Nè questo S_3, contenente β e γ, potrà mutare se A varia su α. Dunque $\alpha\,\beta\,\gamma$ sono in un S_3. Se poi per un qualunque punto D della retta comune ad α e β tiriamo un piano che incontri quell'S_3 solo in D, esso incontrando α e β dovrà incontrare anche γ, il che non può avvenire che in D stesso: onde γ passerà per D. *Tre piani legati linearmente sono tre piani di un fascio.*

Possiamo anche dire che: affinchè due piani ammettano una combinazione lineare, che sia un piano distinto da essi, occorre e basta che stiano in un S_3, o, ciò che è lo stesso, che passino per una stessa retta. Allora ogni combinazione lineare dei due piani sarà un piano del loro fascio: perchè se α e β si rappresentano come congiungenti gli stessi due punti x, y ad altri due z, t, rispettivamente, cioè se $a_i = (x\,y\,z)_i$, $b_i = (x\,y\,t)_i$, ne deriva $\lambda\, a_i + \mu\, b_i = (x, y, \lambda\, z + \mu\, t)_i$. *Le varietà lineari ∞^1 di piani sono i fasci.*

Traducendo il risultato sulla V_9, abbiamo che le rette giacenti in questa sono le imagini dei fasci di piani di S_5; e che la V_9 non ammette altre *trisecanti* che le rette in essa giacenti.

9. Trovate le varietà lineari ∞^1 di piani, per ottenere i sistemi lineari di maggior dimensione basterà applicare la nota costruzione ricorrente degli spazi delle varie dimensioni.

Anzitutto si prenderà un fascio di piani $\alpha\,\beta$, e, fuori di questo, un piano γ atto a determinare un fascio con ognuno di quelli. Dovrà dunque (n⁰ 8) γ incontrare in una retta ciascun piano del fascio $\alpha\,\beta$. Se questa retta è fissa al variare di questo piano, vuol dire che γ passa per la retta $\alpha\,\beta$; se invece è variabile, γ dovrà stare nello S_3 di α e β. Giungiamo così a due specie, fra loro duali, di sistemi lineari ∞^2 di piani: i piani di un'ordinaria stella, cioè giacenti in un S_3 e passanti per un punto di questo; e i piani che passano per una retta fissa e stanno in un S_4 di questa.

Dopo ciò, indicando con Σ il sistema lineare ∞^2 di piani così determinato mediante $\alpha\,\beta\,\gamma$, si cerchi un piano δ esterno a Σ, ma tale che con ogni piano di Σ determini un fascio, cioè tale che incontri in una retta ogni piano di Σ. Se Σ è un'ordinaria stella, δ deve tagliare i piani di questa in rette, che non possono tutte coincidere: dunque δ starà nello S_3 della stella; e questa è anche condizione sufficiente. Allora $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ determineranno un sistema lineare ∞^3 composto di tutti i piani di un S_3. Ed è chiaro che non si potrà poi trovare, fuori dello S_3, un nuovo piano che incontri in rette tutti i piani dell'S_3: quindi la costruzione dei sistemi lineari di piani ha termine. Dualmente, se Σ si componeva dei piani di un S_4 passanti per una retta fissa, δ dovrà passare per questa retta; e si ottiene come sistema lineare ∞^3 di piani quello composto di tutti i piani passanti per una data retta.

Concludiamo: *I sistemi lineari di piani della massima dimensione, in* S_5, *sono di due specie, fra loro duali: sistema degli* ∞^3 *piani di un* S_3, *e sistema degli* ∞^3 *piani passanti per una retta* (9). *Un sistema lineare di piani* ∞^2 *sta necessariamente in un determinato sistema lineare* ∞^3 *dell'una o dell'altra specie; ed è, a seconda dei casi, una ordinaria stella di piani, o l'ente duale.*

10. Il risultato precedente si può enunciare così: gli spazi di massima dimensione contenuti nella V_9 (nei quali poi stanno gli spazi minori) sono due schiere ∞^8 di S_3, nettamente separate, imagini rispettivamente dei sistemi dei piani contenuti in uno spazio ordinario e dei sistemi dei piani passanti per una retta. Ogni retta della V_9 sta in un S_3 di ciascuna delle due schiere. Due S_3 della V_9 non hanno in generale alcun punto a comune; se sono della stessa schiera possono avere al più un punto comune; se sono di schiera diversa ed hanno comune un punto, avranno comune una retta. Ecc., ecc.

Qui possiamo accennare alle *collineazioni di* S_{19} *che mutano in sè la* V_9. Ve ne sono di due specie: quelle che mutano in sè ognuna delle due schiere di S_3 della V_9, e quelle che scambiano fra loro queste schiere. È evidente che una collineazione, od una reciprocità, dello S_5 determina tra i piani di questo spazio una corrispondenza che si riflette sulla V_9 rispettivamente in una collineazione di 1.ª, o di 2.ª specie. Ma è anche vero il fatto inverso. Invero una collineazione di 1.ª specie della V_9 rappresenterà una corrispondenza algebrica fra i piani di S_5, tale da indurre anche una corrispondenza tra le rette di S_5 come sostegni di piani (ossia imagini degli S_3 di una schiera della V_9); a tutte le rette passanti per un punto, e quindi aventi a due a due un piano (variabile) in comune, corrisponderanno rette così fatte, cioè passanti per un punto: si tratta dunque di una corrispondenza algebrica fra i punti di S_5, che muta

---

(9) Cfr. la proposizione generale sulle varietà lineari di spazi S_k nella nota (85) a p. 794 del mio articolo citato qui in (5).

punti allineati in punti allineati, ossia di una collineazione di S_5. Similmente si vede che una collineazione di 2.ª specie della V_9 rappresenta una reciprocità di S_5.

Le varietà ∞^1 di piani, irriducibili, del 2.° e del 3.° ordine.

11. Prima di procedere a ricercare gli ulteriori legami lineari fra piani di S_5, conviene che accenniamo qualcosa su alcune varietà di 2.° e 3.° ordine.

Anzitutto gli ∞^4 piani che passano per un punto dato A e stanno in un dato S_4 (contenente A) costituiscono una varietà quadratica, come quella (Plücker-Klein) delle rette tracce di quei piani su un S_3 (non passante per A) dell'S_4. Dette a_h le coordinate di A, x_k e y_l quelle di due punti ulteriori di quei piani, variabili in un S_3 che possiamo supporre sia $x_5 = x_6 = 0$, le coordinate $(a\,x\,y)_{hkl}$ dei piani risultano forme lineari delle 6 quantità variabili $(x\,y)_{kl}$, legate dalla nota relazione quadratica. Onde i punti della V_9, imagini di tali piani, staranno tutti in un S_5, e più precisamente in una V_4^2 irriducibile.

Mutando in S_5 il punto A e l'iperpiano per esso, otteniamo così sulla V_9 ∞^9 V_4^2.

Due punti qualunque di una stessa V_4^2, essendo imagini di piani di S_5 incidenti, saranno coniugati rispetto ad $\mathcal{N}$ (n° 4). Viceversa per due punti di V_9 coniugati rispetto ad $\mathcal{N}$ passa in generale una V_4^2 ben determinata. Fa solo eccezione il caso che i due punti stiano su una retta di V_9, ossia che i due piani s'incontrino in una retta e quindi giacciano in uno stesso S_3. In tal caso il punto A si può prendere ad arbitrio su questa retta, e l'iperpiano ad arbitrio fra quelli passanti per l'S_3. Pei due punti di V_9 (e per la loro retta) passano allora ∞^2 V_4^2.

12. In S_5 una ∞^1 di piani del 2.° ordine, irriducibile, dà, come luogo dei suoi punti, una V_3^2, che, com'è ben noto, è necessariamente un cono ed appartiene a un S_4. Essa si compone dei piani che da un punto fisso A projettano un *regolo* (schiera di generatrici rettilinee di una quadrica ordinaria), il cui S_3 non passa per A.

La curva imagine di una tale ∞^1 di piani, sulla V_9, sarà una conica irriducibile; e viceversa ogni conica irriducibile della V_9 rappresenta una ∞^1 di piani del 2.° ordine, irriducibile.

Poichè questa ∞^1 di piani è contenuta nel sistema dei piani passanti per un punto A e giacenti in un S_4, segue che una conica della V_9 (sott. irriducibile) sta in una determinata V_4^2 di questa, fra quelle ottenute al n^0 11 (cfr. n^0 13).

Quattro punti di una conica della V_9, come punti complanari, sono legati linearmente. Dunque, in S_5, quattro piani di una stessa ∞^1 irriducibile di 2.^{0} ordine sono legati linearmente.

13. A complemento del n^0 11 possiamo ora aggiungere che sulla V_9 non esistono altre V_4^2 che le ∞^9 là ottenute. In fatti, data nella V_9 una V_4^2 qualsiasi (necessariamente irriducibile, perchè la V_9 non contiene spazi S_4: v. n^0 10), si fissino su essa due punti a, b non congiunti da una sua retta. Per essi e per ogni ulteriore punto c della V_4^2 passerà una conica di questa. Ne segue (n^0 12) che, se $\alpha\ \beta\ \gamma$ sono i piani di S_5 aventi $a\ b\ c$ per imagini, γ passerà sempre pel punto $\alpha\beta$ e starà sempre nell'S_4 di α e β: ossia γ varierà in un sistema di ∞^4 piani, quale appunto s'era considerato al n^0 11, giungendo a quelle ∞^9 V_4^2.

14. Passiamo ora alle varietà di ∞^1 piani *del* 3.^{0} *ordine*, irriducibili, immerse nello S_5, e non coni. Esse hanno, nella Geometria projettiva di S_5, un'importanza speciale, analoga a quella che hanno le coniche e i regoli nella Geometria projettiva del piano e dello S_3, e sono generabili in modo altrettanto elementare.

Ricordiamo alcune proprietà ovvie e ben note della V_3^3 luogo di una tale ∞^1 di piani. Essa contiene, fuori di quei piani (*generatori*), ∞^2 rette (*generatrici*) tali che per ogni punto della varietà ne passa una. Queste rette punteggiano gli ∞^1 piani collinearmente; e vengono punteggiate projettivamente fra loro dai piani. La V_3^3 può definirsi come il luogo degli ∞^1 piani incidenti a 4 rette generiche, o congiungenti i punti omologhi di 3 rette punteggiate projettivamente; od anche come il luogo delle ∞^2 rette incidenti a tre piani generici, o congiungenti i punti omologhi di due piani collineari.

Sulla V_9 l'imagine della V_3^3 *come* ∞^1 *di piani* (così riguarderemo sempre le V_3^3, salvo avviso contrario) sarà una cubica sghemba ([10]). E poichè tre piani generici individuano quella ∞^1 di piani, così avremo che per tre punti generici della V_9 passa una cubica di questa.

([10]) Se fosse una cubica piana, poichè tutte le rette del suo piano sarebbero trisecanti della V_9, per la proposizione finale del n^0 8 il piano giacerebbe in questa varietà; onde (n^0 9) la V_3^3 giacerebbe in un S_3, o sarebbe un cono avente una retta per vertice.

Cinque punti di una cubica irriducibile giacciono in un S_3, e quindi sono legati linearmente. Dunque, in S_5, cinque piani generatori di una V_3^3 irriducibile sono sempre legati linearmente.

Legame lineare fra 4, 5, 6 piani.

15. Siano α β γ δ quattro piani di S_5 legati linearmente, senza che tre di essi, comunque scelti, siano linearmente legati, cioè stiano in uno stesso fascio.

Se ogni retta r incidente ad α, β incontra pure γ, e quindi (n^0 7) δ, ragionando come in principio del n^0 8 si vede che α e β staranno in uno stesso S_3 con γ e δ. Se quell'ipotesi non si verifica, l'ultima osservazione del n^0 7 ci dà che γ e δ dovranno stare in un S_4 con r; se γ e δ non stanno in un S_3, quell'S_4 sarà fisso al variare di r, e quindi conterrà α e β.

Così *i quattro piani* α β γ δ *stanno in uno stesso* S_4. Sembrerebbe, da quanto ora s'è detto, che si debba aggiungere anche il caso che essi stiano a due a due in un S_3, ossia che si taglino in rette. Ma anche in questa ipotesi si ritorna alla stessa conclusione: perchè, segandosi ad esempio α β γ a due a due secondo rette, staranno certo in un S_4 (od in infiniti); e ogni piano di questo spazio, essendo incidente ad α β γ, dovrà pure (pel legame lineare supposto) incontrare δ: onde δ dovrà giacere in quell'S_4.

Dualmente possiamo dire subito che: α β γ δ *passeranno per uno stesso punto.*

Se escludiamo, per un momento, che i quattro piani stiano in un S_3 (passando per uno stesso punto), o che passino per una stessa retta (giacendo in un S_4), e li seghiamo con un S_3 del loro S_4, non passante pel loro punto comune; avremo nello S_3 quattro rette tali che ogni retta incidente a tre è pure incidente alla quarta (in causa del legame lineare tra α β γ δ: v. n^0 7): dunque 4 rette di un regolo. I piani α β γ δ projettano da uno stesso punto queste 4 rette, e quindi saranno piani generatori di una stessa schiera di un cono V_3^2 di S_4. Viceversa quattro tali piani sono (v. fine del n^0 12) legati linearmente. Aggiungendo i due casi più speciali, dianzi esclusi, nei quali i 4 piani vengono a stare (pel n^0 9) in sistemi lineari ∞^2, e quindi sono, senz'altro, legati linearmente, concludiamo:

Quattro piani legati linearmente, senza che tre fra essi siano così legati, possono presentare solo i tre casi seguenti: 1.°) stanno in *un'ordinaria stella di piani; 2.°) (duale del precedente) stanno in un* S_4 *passando per una retta di questo; 3.°) stanno in un* S_4, *passano per uno stesso punto, e appartengono a una stessa schiera di piani di un cono quadrico* V_3^2.

16. Esamineremo ancora il legame lineare fra 5 e 6 piani, senza però esaurire tutti i casi *speciali* che si possono presentare.

Siano 5 piani distinti α β γ δ ε legati linearmente. Ogni retta incidente a quattro di essi dovrà pure (n^0 7) incontrare il quinto. Supponiamo anzitutto che una retta r incidente a tre, per esempio ad α β γ, non incontri nè δ nè ε. Allora (fine del n^0 7) δ ed ε staranno in un S_4 con r. Se δ ed ε non sono in un S_3, ogni retta r incidente ad α β γ giacerà nell'S_4 di δ ed ε; e poichè per ogni punto di uno dei primi tre piani passa almeno una retta incidente a tutti tre, anche α β γ staranno in quell'S_4: ossia i cinque piani dati staranno in uno stesso S_4. Se invece δ ed ε stessero in un S_3, l'equazione che esprime il legame lineare tra i cinque piani, supposto che non consista in un legame fra i soli α β γ, darebbe che una combinazione lineare di δ ed ε, vale a dire, nel caso attuale, un piano η del loro fascio, è legato linearmente ad α β γ: onde (n^0 15) α β γ η starebbero in un S_4, passando per uno stesso punto ([11]).

Se dunque escludiamo, sia che i 5 piani stiano in uno stesso S_4, sia che tre stiano in uno stesso S_4 e che i due rimanenti si taglino in una retta di questo spazio, accadrà che ogni retta incidente tre dei cinque piani incontra pure gli altri due. Ne deriva, applicando il n^0 14, e semplificando: *Cinque piani legati linearmente, fra i quali almeno tre siano a due a due sghembi* (cioè non incidenti), *sono cinque piani generatori di una* V_3^3.

17. Siano infine 6 piani α β γ δ ε η legati linearmente, e a due a due sghembi. Esistono tre rette appoggiate ad α β γ δ: le 3 generatrici della V_3^3 α β γ che incontrano δ. Se una di esse non incontrasse ε, e quindi nemmeno η, ε ed η starebbero (fine del n^0 7) in un S_4, contrariamente all'ipotesi che siano sghembi. Dunque le tre rette incidenti ad α β γ δ sono pure incidenti ad ε ed η.

Se sei piani, sghembi a due a due, sono legati linearmente, esistono in generale tre rette incontrate da tutti quei piani.

([11]) Viceversa, presi 4 piani α β γ η legati linearmente (secondo il n^0 15), si rappresenti η come combinazione lineare di altri due piani δ ε (presi ad arbitrio in un fascio contenente η). Si otterranno così vari casi di quintuple di piani α β γ δ ε legati linearmente.

Questa condizione non è però sufficiente perchè vi sia legame lineare. Essa prova che i sei piani hanno per imagini sulla V_9 sei punti di una V_3^6 di S_7, del n^0 6. Devono essere, non sei punti qualunque, ma le intersezioni di questa varietà con un S_4 dell'S_7. Possiamo anche esprimere quel legame lineare dei 6 piani sostituendo ai complessi lineari di piani le trilinearità che, secondo il n^0 5, i piani di questi complessi, incidenti alle tre rette considerate (chiamiamole di nuovo $m\,n\,p$), segnano su queste. Abbiamo su $m\,n\,p$ 6 terne di punti tracce rispettivamente dei 6 piani dati. Dire che tutti i complessi lineari che contengono 5 di questi piani devono contenere il 6.^{0}, sarà come dire che tutte le trilinearità fra $m\,n\,p$ contenenti 5 delle 6 terne contengono anche la 6^a. *Sei piani legati linearmente sono, in generale, sei piani che segano tre rette secondo 6 terne di punti «associate» rispetto alle trilinearità fra quelle rette: ossia le 6 terne comuni a tre trilinearità linearmente indipendenti, vale a dire comuni alle* ∞^2 *trilinearità contenenti 5 date terne.*

I due piani, cardini di un complesso lineare.

18. Le proposizioni sui legami lineari fra piani ci permetteranno di risolvere facilmente i problemi di *rappresentazione di un complesso lineare di piani come combinazione lineare di due o più complessi lineari nucleati.*

Ricorriamo alla rappresentazione dei complessi lineari coi punti di S_{19}: quelli nucleati sono dati dai punti della V_9. Dato un complesso lineare qualunque, ossia un punto P di S_{19}, dire che quello è combinazione lineare di 2, o di 3, ..., complessi nucleati, è come dire che per P passa una retta contenente 2 punti della V_9, od un piano contenente 3 punti di questa varietà, ecc.

Anzitutto: le corde della V_9 sono ∞^{18}; e i loro punti sono ∞^{19}, cioè tutti i punti di S_{19}, se escludiamo che un punto, pel solo fatto di stare su una corda, stia di conseguenza su infinite. Occorre dunque vedere quali siano i punti esterni a V_9, per cui passano due corde.

Sia P un tal punto. I 4 punti d'appoggio delle due corde saranno legati linearmente: e non potendo stare in un piano della V_9, perchè P s'è supposto esterno a questa, saranno (fine del n^0 15) imagini di 4 piani passanti per uno stesso punto e giacenti in uno stesso S_4: ossia (n^0 11) staranno su una V_4^2 della V_9; e P cadrà nell'S_5 di questa V_4^2. Sono dunque i punti degli S_5 contenenti le V_4^2 della V_9 i soli punti di S_{19} da ognuno dei quali passa più che una corda della V_9.

Qual'è la dimensione della varietà luogo di tali punti? Osserviamo che in generale un punto P esterno a V_9 non può stare che in *uno* dei detti S_5. Perchè se stesse in due, due rette tirate per P in modo generico, una entro l'un spazio e l'altra entro l'altro, segnerebbero sulle due V_4^2 di quegli S_5 due coppie di punti, imagini, come dianzi, di 4 piani passanti per uno stesso punto e giacenti in un S_4: la varietà dei piani di questo S_4 passanti per quel punto sarebbe rappresentata da ambe le V_4^2; onde queste coincidono. *Gli* ∞^9 S_5 *delle* V_4^2 *giacenti nella* V_9 *sono tali che non s'incontrano altrove che sulla* V_9. *Riempiono, dunque, semplicemente, una* V_{14}.

(V. in seguito, nella ([43]), altri spazi contenuti in questa V_{14}).

19. Consideriamo d'altra parte gli ∞^{24} S_3 delle cubiche sghembe C^3 di V_9 (n^0 14).

Due punti di una C^3 generica rappresentano piani non incidenti. Quindi per un punto P del suo S_3, esterno alla V_9 (ossia alla curva), oltre alla corda della C^3 non può passare un'altra corda della V_9 (n^0 18). Ne deriva che gli S_3 di cubiche della V_9, i quali passano per P, saranno soltanto quelli delle ∞^8 C^3 della V_9 condotte per i due punti d'appoggio di quell'unica corda di questa varietà, che esce da P.

Così un punto P, non di V_9, che stia su uno degli ∞^{24} S_3 considerati, starà precisamente su ∞^8 tali spazi. Potremo dunque, imponendo 8 condizioni, staccare una ∞^{16} di quegli S_3 tale che i punti di questi risultino ∞^{19}, ossia tutti i punti di S_{19}.

20. Dopo ciò, alla questione posta al n^0 18: se cioè un punto che stia su una corda della V_9 sta di conseguenza su infinite corde, possiamo ora rispondere negativamente. Anzi, potremo dire che *per un punto generico* P *di* S_{19} *passa una ed una sola corda di* V_9; e che eccezione si ha solo se P sta sulla V_9, oppure se sta sulla V_{14} del n^0 18: nei quali casi le corde passanti per P sono ∞^9 e ∞^4. Anche va aggiunto che una corda può, al limite, ridursi a una tangente della V_9.

Rifacendoci al principio del n^0 18, deduciamo che: *un complesso lineare di piani dell'*S_5 *appartiene in generale ad uno ed un solo fascio di complessi lineari contenente due complessi nucleati*; si può cioè, in generale, rappresentare, in modo unico, come combinazione lineare di due complessi nucleati.

I due piani nuclei di questi due complessi sono strettamente legati al complesso dato: li diremo *cardini* di esso ([12]).

21. Si può, in base al n⁰ 5, collegare l'ultima proposizione ad una nota proprietà delle corrispondenze trilineari.

Ammettiamo il fatto, su cui poi ritorneremo (n⁰ 26) che, dato un complesso lineare generale di piani Γ, esistono infinite rette (*totali* per Γ), ognuna delle quali è tale che *tutti* i suoi piani stanno in Γ; e che di tali rette se ne possono trovare tre non situate in un S_4. Su tre rette siffatte $m\,n\,p$ assumiamo rispettivamente i punti fondamentali 1 e 4, 2 e 5, 3 e 6, come al n⁰ 5. Un piano passante per m avrà nulle tutte le coordinate tranne le p_{14l}. Quindi se Γ è rappresentato dall'equazione (3) (n⁰ 4), la condizione imposta ad m in relazione con Γ si tradurrà nell'annullarsi dei coefficienti c_{14l}. Similmente saranno nulle le c_{25l} e c_{36l}. Restano dunque soltanto precisamente quegli 8 coefficienti c_{hkl} che figurano nell'equazione (6) della trilinearità segnata su $m\,n\,p$ dai piani di Γ.

Ora si sa (v. ad es. STURM cit. in ([7]), p. 322) che la trilinearità ha in generale due gruppi di 3 punti (rispettivamente di $m\,n\,p$) *singolari* o *neutri* $M'\ N'\ P'$, $M''\ N''\ P''$, tali cioè che ad esempio la coppia $M'\ N''$ è *neutra*, ossia forma terna della trilinearità con ciascun punto di p, ecc. Se si assumono M' e M'', N' e N'', P' e P'' come punti fondamentali delle coordinate 1 e 4, 2 e 5, 3 e 6, si riconosce subito che l'equazione della trilinearità si riduce alla forma

$$\lambda\, u\, v\, w + \mu = 0$$

(nota forma *normale* per le trilinearità generali). Dunque nella (6) dovranno allora annullarsi anche i 6 coefficienti c_{hkl} intermedi. Resta Γ con soli due cofficienti non nulli: c_{123} e c_{456}; Γ si può scrivere così:

$$\lambda\, p_{123} + \mu\, p_{456} = 0,$$

il che prova di nuovo il teorema del numero precedente.

([12]) Daremo in seguito (n⁰ 27) le citazioni relative al risultato precedente. Se si ha un complesso lineare Γ e i suoi cardini α, β, si potranno costruire gli altri complessi lineari aventi gli stessi cardini (complessi *sizigetici* di Γ) nel seguente modo, che deriva subito dalla rappresentazione analitica, o geometrica, del fascio di complessi. In ogni fascio di piani si prendano quel piano che sta in Γ ed i due che sono incidenti rispettivamente ad α, β; e si costruisca un 4⁰ piano che faccia con quei tre un dato birapporto ϱ. Il luogo di questo 4⁰ piano sarà appunto uno dei complessi sizigetici a Γ, e variando ϱ si otterranno tutti.

Distinzione dei complessi lineari in specie.

22. Un complesso lineare può presentare anzitutto questa singolarità: che i due cardini coincidano. Sarà rappresentato allora in S_{19} da un punto di una tangente della V_9. Diremo il complesso *singolare*: in generale *semplicemente singolare.*

Doppiamente singolare, o *conico* (v. nel seguito la nota ([15])), diremo il complesso lineare quando ammette infinite coppie di cardini. Risulta dal n^0 18 che ciò avviene solo quando il punto imagine P sta nella V_{14} ivi considerata: cosicchè si tratta di una condizione *quintupla.* P sta allora nell'S_5 di una V_4^2 contenuta nella V_9. Ora pensiamo che i punti di questa V_4^2 sono imagini di uno *stelloide* (così dirò per brevità) di piani, cioè dei piani passanti per un punto O e giacenti in un S_4 Ω; e pensiamo ancora che, quando una V_4^2 si riguarda come rappresentazione delle rette di un S_3, le coppie di punti della V_4^2 allineate con un punto fisso P sono le imagini delle coppie di rette coniugate rispetto ad un ordinario sistema nullo. Qui, al posto di un S_3 rigato, abbiamo lo stelloide $O\,\Omega$: entro questo sarà definito un *sistema nullo* (che risulta projettando da O un ordinario sistema nullo di un S_3 giacente in Ω). *Il complesso lineare doppiamente singolare ammette* ∞^4 *coppie di cardini: sono cardini tutti i piani di uno stelloide (ossia piani per un punto entro un* S_4*); sono cardini coniugati (cioè di una coppia) due piani quando sono coniugati rispetto a un determinato sistema nullo dello stelloide.*

Più singolare ancora (diciamo: *triplamente singolare*) è un complesso nucleato. Fungono da cardini coniugati per esso il suo nucleo insieme con un piano arbitrario di S_5; od anche due piani qualunque che stiano in un fascio col nucleo.

Nel seguito chiameremo *piano singolare* di un complesso lineare, di cui il punto P sia l'imagine in S_{19}, ogni piano rappresentato sulla V_9 da un punto di contatto di questa con una tangente passante per P: il limite dunque di due cardini coniugati infinitamente vicini. Un complesso semplicemente singolare ha un solo piano singolare; un complesso conico, o nucleato, ne ha infiniti. Vedremo poi (n^0 44) che *un piano singolare si può anche definire come un piano tale che ogni piano che lo incontra secondo una retta sta nel dato complesso.*

23. Cerchiamo delle equazioni normali per le quattro specie di complessi.

Pel complesso nucleato si può assumere, ad esempio,

$$p_{123} = 0. \tag{9}$$

Ancora in modo semplicissimo rappresentiamo subito ogni altro complesso che ammetta due cardini *distinti*. Se il complesso è generale, e quindi questi due piani non sono incidenti, si possono prendere su essi rispettivamente i punti fondamentali delle coordinate 1 2 3, 4 5 6; sicchè le equazioni dei complessi che hanno quei piani per nuclei saranno rispettivamente: $p_{456} = 0$, $p_{123} = 0$ (come alla fine del n⁰ 21). Scelto convenientemente il punto unità, l'equazione del dato complesso, che per ipotesi è nel loro fascio, e non è nucleato, si potrà scrivere:

$$p_{123} + p_{456} = 0. \tag{10}$$

Se invece il dato complesso lineare è doppiamente singolare, il che è come dire che ammette due piani incidenti in un sol punto come cardini coniugati, prendiamo quei due piani, ad esempio, come piani 4 5 6, 2 3 6: allora l'equazione del complesso potrà scriversi così:

$$p_{123} + p_{145} = 0. \tag{11}$$

24. Meno immediata riesce la rappresentazione di un complesso semplicemente singolare, cioè dotato di un solo cardine [13].

Consideriamo il fascio determinato dal complesso lineare che ha per nucleo il piano 1 2 3, ossia per equazione $p_{456} = 0$, e da un altro complesso lineare nucleato $(q, p) = 0$, il cui piano nucleo q si avvicini indefinitamente a quello: congiunga cioè tre punti $x\,y\,z$, i quali si muovano insieme, tendendo rispettivamente ai punti 1 2 3. Siano $x\,y\,z$ funzioni di un parametro t, che per $t = 0$ si riducano ai punti 1 2 3; e le loro trajettorie ammettano in questi punti le tangenti, sulle quali rispettivamente supporremo presi i punti fondamentali 4 5 6. Potremo assumere per le coordinate di $x\,y\,z$ (scrivendo solo i

[13] V. al n⁰ 49 un'altra deduzione, senza considerazione di limiti. — Si potrebbe anche giungere alla seguente equazione (12) basandosi su una rappresentazione normale delle trilinearità *singolari* (cioè a terne singolari coincidenti); come al n⁰ 21 avevamo dedotto l'equazione normale del complesso generale da quella delle trilinearità generali.

termini principali, rispetto a t, che si dovrà poi prendere infinitesimo):

$$x_1 = y_2 = z_3 = 1\,;$$

$$x_4 = at + \dots, \quad y_5 = bt + \dots, \quad z_6 = ct + \dots\,;$$

e le rimanenti coordinate aventi come termine principale un termine in t^2, o più elevato.

Le coordinate q_{hkl} del piano variabile sono i determinanti $(xyz)_{hkl}$; sicchè risultano: $q_{123} = 1 +$ termini in t^4,

$$q_{234} = at + \dots, \quad q_{315} = bt + \dots, \quad q_{126} = ct + \dots,$$

e le rimanenti con un primo termine in t^2.

In conseguenza, nel fascio determinato dai due suddetti complessi nucleati, il complesso

$$\frac{1}{t}\,[(q, p) - p_{456}] = 0,$$

quando t tende a zero, ossia quando il 2^0 complesso nucleato tende al 1^0, ha per limite

(12) $$ap_{156} + bp_{264} + cp_{345} = 0\ (^{14}).$$

Se le costanti $a\,b\,c$ sono tutte tre diverse da zero, una conveniente scelta del punto unità permette di scrivere quell'equazione così:

(13) $$p_{156} + p_{264} + p_{345} = 0.$$

Sarà questa l'equazione normale del complesso semplicemente singolare.

Se invece una o due di quelle costanti sono nulle, la (12) ci riporta alle forme di equazioni prima ottenute pei complessi conici, o nucleati.

---

[14] Il complesso così ottenuto è il limite di *uno* dei complessi del fascio determinato dai due nucleati infinitamente vicini: e precisamente, possiamo dire, di quello che resta fissato dalla condizione (che è lecito porre) di contenere il piano 456. Un complesso *qualunque* soddisfacente alle condizioni primitive, ossia un complesso qualunque del fascio limite, avrà per equazione:

$$ap_{156} + bp_{264} + cp_{345} + dp_{456} = 0.$$

Le equazioni normali (9), (10), (11), (13) mettono in evidenza che: *le quattro specie di complessi lineari, ossia quella generale e le tre specie singolari, sono tali che due complessi della stessa specie sono sempre projettivamente equivalenti.*

In altri termini, in S_{19}, rispetto al gruppo projettivo che muta in sè la V_9 (n^0 10), sono *equivalenti* (deducibili con trasformazioni del gruppo): 1.^{0}) i punti della V_9; 2.^{0}) i punti della V_{14} non situati sulla V_9; 3.^{0}) i punti, non sulla V_{14}, della V_{18} luogo delle tangenti a V_9 (della quale tratteremo ai n^i 38 e segg.); 4.^{0}) i punti di S_{19} non situati su questa V_{18}. (Sono i punti imagini rispettivamente dei complessi: nucleati, conici, semplicemente singolari, generali).

Punti, rette, spazi totali per complessi lineari. Notizie bibliografiche.

25. Diciamo che un punto, o una retta, è *totale* per un complesso lineare di piani Γ, se *tutti* i piani passanti pel punto o per la retta sono piani di Γ. Dualmente un S_4, o un S_3, si dirà *totale* per Γ se tutti i piani in esso contenuti sono piani di Γ.

Se Γ è doppiamente singolare, ossia ammette come cardini coniugati due piani α β, distinti, incidenti in un punto O, e quindi giacenti in un S_4 Ω, ogni piano per O, oppure di Ω, sta nel fascio di complessi determinato dai due nucleati (α), (β); e però starà in Γ. Così Γ ammette O come punto totale, Ω come iperpiano totale.

Viceversa, supponiamo che un complesso lineare Γ ammetta un punto totale O. Un piano qualunque di Γ non passante per O sarà congiunto a questo punto da un S_3, in cui, oltre alla stella O di piani di Γ, vi è quel tal piano del complesso: sicchè (n^0 2) tutti i piani di questo S_3 saranno in Γ (l'S_3 è totale per Γ). Così Γ si compone di spazi ordinari solcati da piani, passanti per O [15]. Esso si può dunque ottenere projettando da O mediante spazi S_3 il complesso lineare di piani secondo cui (n^0 2) Γ è *segato* da un iperpiano non passante per O. Si sa che un tal complesso dell'S_4 ammette un S_3 totale, nel quale sta un ordinario complesso lineare L di rette, così che il complesso di piani è composto di quei piani dell'S_4 che passano per le rette di L. L'iperpiano Ω che projetta

[15] Appunto perchè sono così composti, abbiamo chiamato anche *complessi conici* i complessi lineari doppiamente singolari (n^0 22).

da O quell'S_3 sarà dunque totale per Γ: sicchè risulta intanto che in S_5, se un complesso lineare di piani ha un punto totale, avrà pure un S_4 totale passante pel punto. Inoltre otteniamo, in questo caso, una generazione semplicissima del complesso Γ. Si ha in un S_3 un ordinario complesso lineare di rette L; da un punto O, esterno a quello spazio, si conducono gli ∞^3 piani projettanti le rette di L: Γ si comporrà di tutti i piani che incontrano secondo rette (ossia stanno in S_3 con) i vari piani di quella ∞^3.

Si può rappresentare L come combinazione lineare di due complessi lineari speciali di rette del suo S_3, i quali abbiano per assi due rette coniugate rispetto ad L. Se ne trae subito che Γ si può rappresentare come combinazione lineare dei due complessi lineari di piani dell'S_5, che hanno per nuclei i piani che vanno da O a due tali rette. Γ è dunque doppiamente singolare; e ritroviamo ciò che s'è visto al n^0 22 sulle coppie di cardini coniugati di Γ [16]. Gli ∞^3 piani dianzi considerati saranno i piani singolari di Γ: e per essi risulta verificata la proprietà con cui finiva quel n^0 22.

26. Un complesso lineare di piani Γ non ammette dunque, in generale, nè punti, nè iperpiani totali.

Ammette però sempre *rette* e *spazi* ordinari totali. Come già s'è notato al n^0 2, i piani di Γ passanti per un punto x sono quelli che congiungono x alle rette di un complesso lineare C di rette di S_5, pel quale x è punto singolare. Per un noto teorema, C avrà in generale una retta singolare r (passante per x), sì che tutte le rette appoggiate ad r sono rette di C. Ciò è come dire che tutti i piani passanti per r stanno in Γ: r è retta totale per questo. Viceversa per x non passa in generale altra retta totale di Γ.

Farebbe eccezione a questo ragionamento il caso che C avesse non solo una retta singolare, ma un S_3 singolare (passante per x). Allora C si comporrebbe delle rette appoggiate all'S_3, e i piani di Γ passanti per x sarebbero quelli incidenti in rette l'S_3.

---

(16) Aggiungiamo che dalla nota generazione del complesso lineare di rette L per mezzo di un'involuzione entro una schiera rigata, si trae: *Un complesso lineare di piani doppiamente singolare si può generare come l'insieme dei piani incidenti alle coppie di piani coniugati in un'involuzione posta fra i piani di una schiera di un cono quadrico* V_3^2 *in un* S_4. — Se, più in particolare, si genera L colle rette incidenti le rette omologhe di due fasci projettivi dotati di retta unita, si ha: *Per generare un complesso lineare di piani doppiamente singolare, si ponga fra due ordinari fasci di piani, aventi un piano comune (dunque ad assi incidenti), una tale projettività che per essa quel piano sia unito: il complesso si comporrà dei piani incidenti a coppie di elementi omologhi dei due fasci.*

Se Γ ammette due cardini distinti $\alpha\,\beta$, ogni retta incidente a questi è retta totale pei complessi nucleati (α), (β), e quindi anche per ogni complesso del loro fascio, in particolare per Γ. Un punto generico sta precisamente su *una* retta incidente ad α e β. Viceversa, *se Γ non è singolare*, una retta r totale per Γ deve appoggiarsi ad α e β; perchè ogni piano per essa che incontri α, appartenendo a Γ e ad (α), starà pure in (β), e quindi incontra β; e viceversa ogni piano per r incidente a β incontrerà α; onde, se r non fosse incidente ad ambi i piani $\alpha\,\beta$, dovrebbero questi (cfr. n^0 7) stare (con r) in uno stesso S_4, e Γ sarebbe doppiamente singolare, contro l'ipotesi. Se invece Γ è doppiamente singolare, si riconosce subito che le sue rette totali sono quelle che escono dal punto totale O e inoltre le ∞^5 rette che stanno in quegli ∞^3 piani (singolari per Γ) dello stelloide $O\,\Omega$, di cui s'è detto al n^0 25.

27. Qui sia posta una breve digressione bibliografica sulle cose precedenti.

Sono ben quattro gli Autori che, indipendentemente l'uno dall'altro, e in conseguenza senza citarsi fra loro, hanno ottenuto alcuni più essenziali fra i risultati esposti negli ultimi paragrafi ([17]).

Primo è stato O. LANDSBERG. A p. 41 e segg. della sua dissertazione egli tratta (cogli ordinari mezzi analitici) il complesso lineare Γ di piani dell' S_5. Dall'equazione di Γ giunge alle equazioni di un'omografia involutoria di quello spazio, per la quale le rette singolari dei complessi lineari di rette C provenienti dai singoli punti, ossia (n^0 26) le rette totali di Γ, sono rette unite. I punti uniti di questa collineazione involutoria formano due piani (che sono i nostri *cardini* di Γ) a cui si appoggiano tutte quelle rette. Essi coincidono, se si annulla un certo invariante di 4.^{0} grado nei coefficienti di Γ. Il LANDSBERG rileva pure il caso del complesso doppiamente singolare e quello del complesso nucleato; e ne dà le condizioni analitiche.

Le stesse cose ritrova, molti anni dopo, con calcolo simbolico per forme alternate ([18]), W. REICHEL; nel cui lavoro sono pur da

([17]) O. LANDSBERG, *Untersuchungen über die Gruppen einer linearen fünffachen Mannigfaltigkeit,* Inaug. Dissertation, Breslau, 1889. — W. REICHEL, *Ueber trilineare alternierende Formen in sechs und sieben Veränderlichen und die durch sie definierten geometrischen Gebilde,* Inaug. Dissertation Greifswald, Leipzig, 1907. — R. WEITZENBÖCK, *Komplex-Symbolik,* Leipzig, 1908. — E. VENERONI, *Sui connessi bilineari fra punti e rette negli iperspazi,* Rend. Palermo, 26, 1908_2, p. 387.

([18]) Come quello usato da E. STUDY, *Geometrie der Dynamen,* Leipzig, 1903, ad es. a p. 135.

rilevare le equazioni normali del complesso nei quattro diversi casi ([19]). Anche col calcolo simbolico studia il complesso lineare di piani di S_5 R. WEITZENBÖCK, a p. 134 e segg. del suo libro; e giunge, ancora per la via su indicata di O. LANDSBERG, ai due piani cardini; ottiene l'invariante biquadratico che caratterizza i complessi semplicemente singolari; e fa pur cenno del complesso doppiamente singolare (che egli chiama *polare*). Simultaneo a quest'Autore, E. VENERONI, nella sua Nota essenzialmente geometrica, fa un cenno in generale sulle rette totali (singolari) di un complesso lineare di piani in uno spazio qualunque e dimostra in particolare che nel caso di S_5 quelle rette si appoggiano in generale a due piani fissi. Con questi e con un piano generico del complesso questo risulta determinato ([20]).

Terne di piani coniugati. Generazioni del complesso lineare.

28. Diciamo *terna di piani coniugati* (o brevemente *terna coniugata*) rispetto ad un complesso lineare generale Γ una terna di piani $\gamma\,\delta\,\varepsilon$ tale che Γ si possa riguardare come combinazione lineare dei complessi che hanno per nuclei $\gamma\,\delta\,\varepsilon$.

Se $\alpha\,\beta$ sono i cardini di Γ, distinti e non incidenti, avremo che una combinazione lineare dei complessi nucleati (α), (β) coincide con una combinazione lineare di (γ), (δ), (ε). I cinque piani sono legati linearmente. Dunque (n^0 16) essi stanno in una stessa V_3^3. *Ogni terna di piani coniugati sta in una stessa* V_3^3 *coi due piani cardini.*

Viceversa si dia una V_3^3 generica passante per $\alpha\,\beta$. Si fissino in essa due piani $\gamma\,\delta$; se ε è un altro suo piano *mobile*, esiste un legame lineare tra $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon$. Nella relazione che così si ha fra le coordinate di questi piani, non può essere che i coefficienti di $\alpha\,\beta$ conservino un rapporto fisso al variare di ε; se no, prese due posizioni di ε, risulterebbe, sottraendo le due relazioni, che γ, δ e quei due piani ε son legati linearmente, il che (in base al n^0 15) si esclude supponendo che γ e δ non s'incontrino (ossia che la V_3^3 appar-

---

([19]) Si avverta però che da una citazione di STUDY, loc. cit. p. 247, risulta che l'equazione normale pel caso generale era già stata ottenuta da F. ENGEL; quella del complesso semplicemente singolare è data ivi da STUDY.

([20]) S. KANTOR nella sua *Theorie der linearen Strahlenkomplexe im Raume von r Dimensionen,* Journal für Math., 118, 1897, p. 74, comincia con varie osservazioni generali sui complessi lineari di spazi S_k entro l' S_r: ma si tratta solo di conseguenze presso che immediate delle definizioni o di teoremi noti. Non s'incontrano i risultati su cui ora ho riferito.

tenga ad S_5). Ne deriva che per una conveniente scelta di ε i coefficienti di α e β nella detta relazione saranno precisamente quelli coi quali Γ si esprime per combinazione lineare di (α), (β). E allora il legame lineare fra i cinque piani ci dirà che Γ è combinazione lineare di $\gamma\,\delta\,\varepsilon$; ossia $\gamma\,\delta\,\varepsilon$ sono una terna di piani coniugati per Γ. *Una* V_3^3 *generica passante pei piani cardini di* Γ *contiene infinite terne di piani coniugati rispetto a* Γ*: potendosi prendere ad arbitrio due piani della* V_3^3 *per formare una tal terna.*

Per la V_9 di S_{19}, la 1.ª proposizione esposta dice che i suoi piani trisecanti passanti per un punto generico P si appoggiano ad essa in terne di punti, ognuna delle quali sta in una C^3 della V_9 contenente i due punti d'appoggio della corda tirata da P a questa varietà. La 2.ª proposizione trovata diventa evidente, riferita ad una data C^3 della V_9 passante per i due punti d'appoggio ora nominati.

29. Colle ultime osservazioni si connetta il fatto che su una cubica sghemba irriducibile i piani del suo spazio passanti per un punto fisso P segano un'*involuzione cubica* ∞^2, o *serie lineare* g_3^2 di terne di punti (trilinearità simmetrica), per la quale i due punti d'incontro della curva colla corda uscente da P formano la *coppia neutra*. Avremo così : *Su una* V_3^3 *passante pei due cardini* $\alpha\,\beta$ *di* Γ *le terne di piani coniugati rispetto a* Γ *formano una* g_3^2 *di cui* $\alpha\,\beta$ *è la coppia neutra.*

Dalla definizione di terna coniugata $\gamma\,\delta\,\varepsilon$, vale a dire dall'espressione di Γ come combinazione lineare di (γ), (δ), (ε), segue che se un piano di Γ incontra γ e δ, incontrerà pure ε. Se dunque in una V_3^3 passante pei cardini $\alpha\,\beta$ di Γ si prendono due piani qualunque $\gamma\,\delta$, i piani di Γ incidenti γ e δ incontreranno pure un terzo determinato piano della V_3^3: quello che con $\gamma\,\delta$ costituisce una terna coniugata di Γ, ossia un gruppo della g_3^2 di poc'anzi. *La* g_3^2 *sulla* V_3^3 *si compone delle terne di piani di questa che incontrano i singoli piani del complesso* Γ.

Un complesso lineare generale di piani si può costruire nel seguente modo. Si scelga ad arbitrio, entro al sistema dei piani generatori di una V_3^3 *una* g_3^2 (21).

(21) Per segnare sulla V_3^3 una qualunque g_3^2 basterà associare tre piani sempre quando siano incidenti ad uno stesso elemento di un'ordinaria stella di piani (di un S_3).

Sono i piani di un determinato complesso lineare quelli pei quali avviene che i tre piani della V_3^3 *da essi incontrati formino una terna di quella* g_3^2. In fatti fra i piani che soddisfano a questa condizione quelli che fan parte di un dato fascio di piani si avranno, entro l'S_3 del fascio, considerando sulla cubica traccia della V_3^3 sull'S_3 l'involuzione ∞^2 traccia della data g_3^2 di piani; e cercando quei piani del fascio che contengono terne di quell'involuzione. Si trova così, in generale, un sol piano (perchè l'involuzione sulla cubica ha le sue terne nei piani di una stella). Dunque in S_5 i piani suddetti son tali che in un fascio generico ve n'è uno solo: formano quindi un complesso lineare ([22]).

Quando si genera in tal modo un complesso Γ, si otterranno subito i suoi cardini, come costituenti la coppia neutra della g_3^2. Aggiungasi che i tre elementi tripli della g_3^2 (costituenti la terna a cui sono armoniche, od apolari, tutte le terne di questa) non sono altro che i tre piani di Γ contenuti nella V_3^3. Invero ognuno di questi ultimi piani non incontra altri piani della V_3^3 che se stesso: in sè dunque riunisce una terna della g_3^2. Com'è noto, la coppia neutra della g_3^2 (ossia i cardini di Γ), costituisce l'Hessiano di quella terna di elementi tripli.

Se si parte da una g_3^2 della V_3^3 che abbia la coppia neutra ridotta ad un elemento doppio (ossia g_3^2 delle terne armoniche ad una terna fissa dotata di elemento doppio), si otterrà un complesso a cardini coincidenti, ossia semplicemente singolare.

30. Se di un complesso lineare generale di piani son dati i due cardini $\alpha\,\beta$ e un piano π che gli appartiene (non incidente ad $\alpha\,\beta$) il complesso è determinato, e si può costruire così. Si conduca per $\alpha\,\beta$ una V_3^3; e tra i piani di questa si consideri la g_3^2 che ha $\alpha\,\beta$ per coppia neutra e che contiene come una terna quella costituita dai piani della varietà incidenti a π. Il complesso si comporrà dei

---

([22]) Questa costruzione è analoga a quella già ricordata nella ([16]) del complesso lineare di rette di S_3 per mezzo di un'involuzione ordinaria (una g_2^1) entro una schiera rigata. Essa si estende in generale, collo stesso ragionamento precedente, così: Si consideri in S_{2q+1} una V_{q+1}^{q+1} luogo degli ∞^1 S_q congiungenti i punti omologhi di $q+1$ rette punteggiate projettivamente (od S_q che incontrano $q+2$ rette date, ecc.), ed entro a questa ∞^1 di S_q si fissi una serie lineare g_{q+1}^q. L'insieme di quegli S_q per ognuno dei quali i $q+1$ S_q ad esso incidenti di quella varietà formano un gruppo della serie lineare fissata è un complesso lineare (particolare, se $q > 2$) di S_q.

piani incidenti a terne di quella g_3^2. In particolare si potrà prendere quella V_3^3 che passa per $\alpha\,\beta$ e π; e in essa la g_3^2 di cui $\alpha\,\beta$ è la coppia neutra e π un piano triplo.

31. La generazione precedente (n^0 29) del complesso lineare si modifica facendo spezzare la V_3^3, o la cubica che ne è imagine in S_{19}: ad esempio facendo spezzare questa in tre rette, una delle quali incontra le altre due. Enunciamo senz'altro il risultato.

Sia dato un complesso lineare di piani Γ, avente i piani α β per cardini. Si prendano su questi due rette a b, e sia c una loro trasversale arbitraria. Consideriamo i tre fasci di piani determinati dalle coppie di piani $(\alpha,\ a\,c)$, $(a\,c,\ b\,c)$, $(b\,c,\ \beta)$; e poniamo fra essi una trilinearità avente queste coppie di elementi neutri: il piano $a\,c$ comune ai primi due fasci, considerato in entrambi; il piano $b\,c$ comune al 2.^{0} e al 3.^{0} fascio, considerato in entrambi; infine α e β nel 1.^{0} e nel 3.^{0} fascio ([23]). I piani che incontrano tre elementi dei tre fasci formanti terna nella trilinearità (tolti però i piani generici incidenti all'uno o all'altro piano doppio neutro $a\,c$, $b\,c$) formeranno un complesso lineare: perchè, cercando quelli fra essi che stanno in un S_3 generico, si viene ad avere in questo spazio tre rette, di cui la 2.^{a} è incidente alla 1.^{a} e alla 3.^{a}, e fra queste rette una trilinearità, per la quale quei due punti di incidenza son punti neutri doppi; onde i piani congiungenti le terne di punti della trilinearità, i quali in generale invilupperebbero una superficie di 3.^{a} classe (AUGUST), ora che da questa si staccano due stelle di piani, formeranno una residua stella di piani. E poichè α β costituiscono una coppia neutra, ogni piano incidente ad essi starà nel complesso: sicchè α e β sono i cardini di questo. Si può poi ottenere che il complesso considerato coincida con quello dato Γ, determinando la trilinearità fra i tre fasci di piani coll'ulteriore condizione che formino una terna di essa i piani incidenti ad un dato piano π di Γ.

32. Quattro piani $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ devono soddisfare ad una condizione, perchè esista un complesso lineare con α β per cardini, contenente γ e δ. Dovrà accadere che per uno stesso valore di $\lambda:\mu$ siano verificate le due equazioni

$$\lambda\,(\alpha\,\gamma)+\mu\,(\beta\,\gamma)=0\,, \qquad \lambda\,(\alpha\,\delta)+\mu\,(\beta\,\delta)=0\,;$$

([23]) S'intende cioè che è indeterminato, ad es., l'elemento del 2.^{0} fascio che forma terna con α del 1.^{0} e β del 3.^{0}; e così via.

sicchè la condizione è:

$$(\alpha\,\gamma)\,(\beta\,\delta) - (\alpha\,\delta)\,(\beta\,\gamma) = 0\,. \tag{14}$$

È dunque simmetrica rispetto alle due coppie di piani $\alpha\,\beta$, $\gamma\,\delta$ (come anche risulterebbe dalla rappresentazione in S_{19}, considerando il sistema nullo $\mathfrak{N}$).

La si può esprimere semplicemente in forma geometrica, considerando le tre rette $m\,n\,p$ appoggiate ai quattro piani. Presi come punti fondamentali delle coordinate 1 2 3 le intersezioni di quelle rette con α, e come punti 4 5 6 le loro intersezioni con β, la sola coordinata non nulla di α sarà la p_{123}, e così per β sarà la p_{456}. Le possiamo assumere $= 1$. Se poi γ congiunge i punti che su $m\,n\,p$ hanno le coordinate $(u, 1)$, $(v, 1)$, $(w, 1)$, e δ quelli di coordinate $(u', 1)$, $(v', 1)$, $(w', 1)$, la condizione precedente diverrà, in base alle (5) del n⁰ 5:

$$u\,v\,w = u'\,v'\,w'\,, \tag{15}$$

che si può esprimere così: *I tre birapporti delle quaterne di punti che i piani α β γ δ segnano sulle tre rette ad essi incidenti hanno per prodotto l'unità* [24].

Gli spazi tangenti alla V_9.

33. Conviene, per varie deduzioni, che ci procuriamo una semplice rappresentazione analitica dell'S_9 tangente alla V_9 di S_{19} in un suo punto.

Come punto di contatto prendiamo quello, che dirò O, che rappresenta il piano ω dei punti fondamentali 1 2 3 di S_5. L'S_9 tangente in O conterrà tutte le rette della V_9 passanti per O. I punti di queste rette sono imagini (n⁰ 8) dei piani di S_5 che incontrano ω secondo rette. Un tal piano π si determina con due punti x y di ω e un terzo punto z generico. Le sue coordinate sono dunque i

---

[24] L'equazione normale delle trilinearità, a cui ci siamo riferiti al n⁰ 21, esprime un'analoga conosciuta relazione di birapporti per le trilinearità, che in base a quel n⁰ 21 si può riguardare come equivalente a quella ora ottenuta.

determinanti del 3.° ordine estratti dalla matrice

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 0 & 0 & 0 \\ y_1 & y_2 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 \end{vmatrix}.$$

Indichiamo con $u_1\, u_2\, u_3$ le tre coordinate della retta $x\,y$ *entro* al piano ω, cioè rispettivamente i determinanti $(x\,y)_{23}$, $(x\,y)_{31}$, $(x\,y)_{12}$. Le 20 coordinate del nostro piano π risultano espresse nel modo seguente, ove gli indici $a\ b\ c$ prendono solo i valori 1 2 3, costituiscono anzi una permutazione pari di 1 2 3, mentre $l\ m$ prendono solo i valori 4 5 6 (*convenzione che adotteremo anche in seguito*):

$$(16) \qquad p_{123} = \Sigma\, z_a\, u_a\,, \qquad p_{abl} = z_l\, u_c$$

$$(17) \qquad p_{456} = 0\,, \qquad p_{alm} = 0 \qquad \begin{pmatrix} a = 1, 2, 3 \\ l,\ m = 4, 5, 6 \end{pmatrix}.$$

Sono le (16) e (17) due gruppi, ognuno di dieci formole, le quali, interpretando le p come coordinate di punti in S_{19}, rappresenteranno il cono composto di tutte le rette della V_9 passanti per O. Risulta che questo cono sta nell'S_9 rappresentato dalle (17). Esso è segato dall'iperpiano $p_{123} = 0$ (che non passa pel vertice O) secondo una V_4 rappresentata, per mezzo delle due terne di parametri omogenei $u_1\, u_2\, u_3$, $z_4\, z_5\, z_6$, dalle formole $z_l\, u_c$. È questa una V_4^6 [25] che non sta in uno spazio inferiore a S_8 (non essendovi identità lineari tra quei nove prodotti $z_l\, u_c$). Dunque il nostro cono è di 6° ordine, V_5^6, e non sta in uno spazio inferiore all'S_9 rappresentato da (17) [26]. D'altronde le sue generatrici devono stare (come s'è detto in principio) nell'S_9 tangente in O alla V_9. Dunque *l'*S_9 *tangente a* V_9 *in* O *è quello,* Ω*, rappresentato dalle equazioni* (17).

---

(25) Studiata diffusamente nella Nota citata in (6), come varietà che rappresenta le coppie di punti di due dati piani.

(26) Risulta che quel cono contiene due sistemi ∞^2 di S_3 passanti per O. Questi si potevano anche ottenere geometricamente, come gli S_3 che entro la V_9 rappresentano (nel senso del n° 10) rispettivamente le rette di ω e gli spazi ordinari passanti per ω. E dalle relazioni reciproche, che così si vedono, fra quei due sistemi di S_3 della V_9, si poteva di nuovo trarre, per via geometrica, che il cono da essi costituito è del 6° ordine, projettante una V_4^6 della specie indicata.

34. Lo spazio Ω_9 tangente a V_9 in un punto O incontra questa varietà soltanto lungo il cono V_5^6 del numero precedente. Ossia: un punto della V_9 giacente in Ω è imagine di un piano segante ω in una retta.

In fatti, se un punto di S_{19} rappresenta un piano sghembo con ω, possiamo (ω restando sempre il piano 123) assumere quel piano come piano fondamentale 456; e se invece il punto rappresenta un piano incidente a ω in un sol punto, possiamo prendere questo piano come 145. Nel 1^0 caso il punto di S_{19} ha per unica coordinata non nulla la p_{456}, nel 2^0 la p_{145}. Un tal punto non soddisfa le (17), e quindi non può stare in Ω.

Possiamo anche dire così: *Una retta tangente alla* V_9 *in un punto non può incontrare altrove questa varietà senza giacervi per intero* (Cfr. la proposizione del n^0 8 sulla mancanza di trisecanti).

35. Come le (17) rappresentano l'S_9 tangente alla V_9 nel punto imagine del piano 123, così si scrivono le equazioni rappresentanti l'S_9 tangente nel punto imagine di un altro piano fondamentale delle coordinate: risulterà un *altro* S_9. Se ne deduce che *non può uno stesso* S_9 *essere tangente alla* V_9 *in due diversi punti.*

Due S_9 *tangenti alla* V_9 *si tagliano solo se i loro punti di contatto rappresentano due piani incidenti.* In fatti, se son dati due piani *non incidenti*, possiamo prenderli come piani fondamentali 123, 456. L'S_9 tangente nel punto imagine di 123 è dato dalle (17). Per quello tangente nel punto imagine di 456 i punti soddisferanno alle equazioni analoghe alle (17), cioè avranno nulle precisamente quelle 10 coordinate che son diverse da quelle nulle in causa delle (17). Non esiste dunque un punto comune ai due S_9.

Consideriamo invece due piani incidenti. Se sono incidenti secondo una retta, prendiamoli come piani fondamentali 123, 124. Rappresentati gli S_9 tangenti nei punti corrispondenti della V_9 colle (17) e analoghe, vediamo che quei due spazi hanno comuni i punti per cui son nulle tutte le coordinate aventi per indici due almeno dei numeri 4 5 6, oppure almeno due dei numeri 3 5 6. Sono quattordici queste coordinate; quindi quei punti comuni formano un S_5. Se invece i due piani s'incontrano solo in un punto, assumendoli ad esempio come piani 123, 145, troviamo similmente che i due S_9 tangenti si tagliano secondo un S_3.

Si vede anche direttamente come l'uno e l'altro fatto avvengano. Se due piani ω e τ si tagliano in una retta, i piani che li incontrano entrambi secondo rette sono: quelli dell'S_3 che unisce ω

e τ, e quelli che passano per la retta comune a ω e τ. Questi due sistemi ∞^3 di piani sono rappresentati sulla V_9 da due S_3 di diverso sistema, aventi una retta in comune, e quindi congiunti da un S_5; e questo dovrà stare sugli S_9 tangenti nei due punti O, T corrispondenti ad ω, τ. Anzi, poichè quei due sistemi ∞^3 di piani incontrano in rette anche gli altri piani del fascio di ω e τ, così quell'S_5 starà sugli ∞^1 S_9 tangenti alla V_9 nei punti della retta OT: sarà uno spazio tangente alla V_9 lungo quella retta.

Se invece i due piani $\omega\ \tau$ s'incontrano in un sol punto, i piani che sono incidenti ad essi secondo rette sono solo ∞^2. Nella rappresentazione del n⁰ 11 dei piani di un S_4 passanti per un punto per mezzo dei punti di una V_4^2, rappresentazione in cui sostituivamo tali piani colle rette loro tracce su uno spazio ordinario dell'S_4, i piani che ora dobbiamo considerare corrispondono alle rette appoggiate a due rette fisse: sono dunque rappresentati dai punti di una quadrica ordinaria. In conseguenza i due S_9 tangenti alla V_9 avranno in comune l'S_3 di questa quadrica.

36. Se una tangente e una corda della V_9 s'incontrano in un punto che non è su questa varietà, i piani rappresentati dai tre punti d'appoggio della tangente e della corda passano per uno stesso punto e stanno in un S_4; in altre parole, i tre punti d'appoggio sono su una V_4^2 della V_9 [27].

Per dimostrare ciò, prendiamo l'S_9 tangente a V_9 nel punto imagine del piano fondamentale $123 \equiv \omega$. Gli altri due piani nominati siano $\alpha\ \beta$. In S_{19} l'ipotesi sarà che la retta dei due punti imagini di quei due piani — li indicheremo anche con $\alpha\ \beta$ — incontri l'S_9 rappresentato dalle (17). Il punto d'incontro (o *un* punto d'incontro, se fossero infiniti), combinazione lineare di $\alpha\ \beta$, diverso sì da α che da β, si potrà rappresentare, alterando con un fattore conveniente le coordinate, con $\alpha - \beta$. Quindi le condizioni (17) citate diverranno:

$$\alpha_{456} = \beta_{456}, \quad \alpha_{alm} = \beta_{alm} \qquad \begin{pmatrix} a = 1, 2, 3 \\ l, m = 4, 5, 6 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Le coordinate dei piani $\alpha\ \beta$ di S_5 verificano le note relazioni quadratiche, come questa:

$$\alpha_{412}\,\alpha_{456} + \alpha_{415}\,\alpha_{462} + \alpha_{416}\,\alpha_{425} = 0 \tag{19}$$

---

(27) Questo teorema è un'estensione del n⁰ 15 al caso che due dei quattro piani là considerati diventino infinitamente vicini.

e l'analoga (19′), ottenuta scrivendo β al posto di α. Ma, valendosi delle (18) per sostituire dove si può le α alle β, la (19′) diventa

$$\beta_{412}\,\alpha_{456} + \alpha_{415}\,\alpha_{462} + \alpha_{416}\,\alpha_{425} = 0\,.$$

Dal confronto colla (19) segue

$$\alpha_{456}\,(\alpha_{412} - \beta_{412}) = 0\,.$$

Se fosse α_{456} non nullo, avremmo così che sono uguali (come α_{412} e β_{412}) tutte le coppie di coordinate omologhe di α β con due indici fra 1 2 3 ed uno fra 4 5 6. Ciò, insieme colle (18), vorrebbe dire che i piani α β differiscono solo per la coordinata d'indici 1 2 3; sicchè le $\alpha_i - \beta_i$ risultano le coordinate di ω; α e β formano fascio con ω.

Se invece è $\alpha_{456} = 0$, ciò significa che il piano α incontra ω. Dicendo $x_1\ x_2\ x_3\ 0\ 0\ 0$ le coordinate del punto d'incontro, si ha subito (per $l,\ m = 4,\ 5,\ 6$)

$$\alpha_{1lm} : \alpha_{2lm} : \alpha_{3lm} = x_1 : x_2 : x_3\,.$$

Quindi, in base alle (18), il piano β incontrerà ω in quello stesso punto. Similmente, se indichiamo con $0\ 0\ 0\ \xi_4\ \xi_5\ \xi_6$ le coordinate dell'S_4 che unisce α ad ω, si ha (per $a = 1,\ 2,\ 3$)

$$\alpha_{a56} : \alpha_{a64} : \alpha_{a45} = \xi_4 : \xi_5 : \xi_6\,,$$

onde, per le (18), lo stesso S_4 unirà β ad ω.

37. *Per un punto, non situato sulla* V_9, *comune a due* S_9 *tangenti di questa, passano precisamente* ∞^3 S_9 *tangenti. I loro punti di contatto formano una* V_3^2*; stanno quindi in un* S_4.

Sia P il punto, comune agli S_9 tangenti nei punti A B di V_9. Secondo il n⁰ 35 dovranno A B rappresentare due piani di S_5 fra loro incidenti. Siano anzitutto incidenti in un sol punto. Allora (n⁰ 11) A B stanno in una determinata V_4^2 della V_9; e nell'S_5 di quella sta (v. la fine del n⁰ 35) l'S_3 in cui si tagliano gli S_9 tangenti a V_9 in A B; in particolare dunque vi sta il punto P. Gli ∞^3 S_4 tangenti alla V_4^2 tirati per P — i cui punti di contatto formeranno una V_3^2 — staranno negli S_9 tangenti in questi punti alla V_9. Così per P passano ∞^3 S_9 tangenti di questa. Nè può passare per P un altro S_9 tangente, ossia l'S_9 tangente a V_9 in un punto X

di questa esterno alla V_4^2. In fatti, chiamando M N una coppia generica di punti della V_4^2 allineati con P, il teorema del n⁰ 36 dice che quel punto X dovrebbe stare con M N in una stessa V_4^2 della V_9: dunque sulla V_4^2 considerata.

Se i piani α β di S_5 rappresentati da A B s'incontrano in una retta, possiamo ancora ridurci al caso precedente. Invero, in quella ipotesi, gli S_9 tangenti in A B si tagliano (n⁰ 35) secondo un S_5, che incontra la V_9 secondo due S_3, la cui intersezione è una retta. Questi S_3 rappresentano coi loro punti rispettivamente i piani dello spazio congiungente $\alpha\beta$ e i piani passanti per la retta $\alpha\beta$. Pel punto P del detto S_5 passano infinite rette seganti i due S_3 in due punti distinti. Siano C D i due punti d'incontro di una di queste rette; i piani γ δ che essi rappresentano sono l'uno nello spazio ordinario $\alpha\beta$, l'altro passante per la retta $\alpha\beta$, ma nessuno dei due soddisfa ad entrambe queste condizioni. Per conseguenza γ δ sono incidenti in un sol punto. P essendo sulla retta CD, sta nello S_5 della V_4^2 unica passante per C e D. Da esso si possono tirare, come nel caso precedente, gli ∞^3 S_4 tangenti a quella V_4^2, e si otterranno, come prima, ∞^3 S_9 tangenti della V_9.

La varietà W_{18}^4 degli S_9 tangenti alla V_9.

38. Proseguendo nello studio degli S_9 tangenti alla V_9, osserviamo che la varietà W da essi costituita sarà di dimensione 18, perchè gli S_9 sono ∞^9, come i punti della V_9 (ognuno essendo tangente in un sol punto: n⁰ 35), e un punto *generico* di uno di essi non sta su altri. W è dunque una *forma*, o *ipersuperficie*, di S_{19}.

Il suo ordine si trova subito $= 4$, segandola con una retta particolare, per esempio una retta r giacente nell'S_3 di una cubica generica della V_9 [28]. Sono punti d'incontro di r con W i 4 punti in cui r è incontrata da tangenti della C^3, perchè queste sono in spazi S_9 tangenti della V_9. Nè vi può essere su r un ulteriore punto P d'incontro con altro S_9 tangente della V_9; perchè per P passerebbe una retta appoggiata alla C^3 in due punti distinti M N, e l'ipotesi che per P passi anche un S_9 tangente della V_9 trarrebbe (n⁰ 36)

[28] Si ritroverà quest'ordine, senza far uso della conservazione del numero, al n⁰ 54. Il 1.⁰ membro dell'equazione di W dà quell'invariante di 4.⁰ grado dei complessi lineari di piani, di cui s'è detto al n⁰ 27.

che $M\ N$ rappresenterebbero piani di S_5 incidenti fra loro: mentre i punti della cubica generica rappresentano piani tutti sghembi tra loro.

39. *Gli* S_9 *tangenti della* V_9 *sono spazi totali pel complesso lineare* $\mathcal{N}$ (n° 4) ([29]), *ossia sono autopolari nel sistema nullo* $\mathcal{N}$.

Prendiamo in fatti lo spazio Ω_9 tangente alla V_9 nel punto O imagine del piano fondamentale 123 di S_5. I suoi punti verificano le equazioni (17). D'altra parte l'equazione del complesso lineare $\mathcal{N}$, ossia la relazione fra due punti p, q di S_{19} congiunti da una retta del complesso, si può scrivere così:

$$p_{123}\, q_{456} - p_{456}\, q_{123} + \Sigma\,(p_{alm}\, q_{bcn} - p_{bcn}\, q_{alm}) = 0\,,$$

ove, nella somma, $a\,b\,c$ è una permutazione di 1 2 3, $l\,m\,n$ una di 4 5 6, colla condizione che $a\,l\,m\,b\,c\,n$ sia una permutazione pari di 1 2 3 4 5 6 (onde 18 binomi nella somma). Evidentemente quest'equazione è soddisfatta se tanto il punto p quanto il punto q verificano le (17) citate. Dunque ogni retta di Ω_9 sta in $\mathcal{N}$. Il teorema è dimostrato.

40. Consideriamo cogli ∞^9 punti della V_9 gli ∞^9 iperpiani che ad essi corrispondono rispetto a $\mathcal{N}$. Questo sistema nullo farà corrispondere alle rette tangenti della V_9 gli spazi limiti dell'intersezione di due infinitamente vicini di quegl'iperpiani; e all'S_9 *tangente*, cioè luogo delle tangenti alla V_9 in un punto x, un S_9 *caratteristico* per la ∞^9 d'iperpiani, cioè comune ad un iperpiano fisso ξ e a tutti i suoi infinitamente vicini nella ∞^9. Quindi, pel teorema precedente, questo S_9 caratteristico di ξ coinciderà sempre coll'S_9 tangente in x. La ∞^9 degli S_9 tangenti di V_9 è in pari tempo la ∞^9 degli S_9 caratteristici della ∞^9 d'iperpiani ξ. Ne segue ([30]) che la W luogo di questi S_9 è toccata da ogni iperpiano ξ lungo il corrispondente S_9. *L'iperpiano tangente a* W *è lo stesso per tutti i punti di un suo* S_9 *generatore.*

41. Tutte le tangenti di V_9 stanno in $\mathcal{N}$. Così stanno in $\mathcal{N}$ le tangenti a una V_4^2 di V_9; e siccome esse non possono stare in

---

([29]) Cioè spazi di cui tutte le rette stanno in quel complesso.

([30]) V. il n° 16 dei miei *Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazi*, Rend. Palermo, 30, 1910_2, p. 87 [V. queste « Opere », II, pp. 71-114].

un complesso lineare di rette dell'S_5 che contiene la V_4^2, tutte le rette di questo spazio saranno rette di $\mathcal{N}$; ossia l'S_5 è *totale* per $\mathcal{N}$.

Consideriamo invece una curva della V_9, per esempio la sezione fatta in questa varietà da un S_{11} generico. Tale curva, avendo per tangenti rette di $\mathcal{N}$, apparterrà al complesso lineare di rette sezione di $\mathcal{N}$ coll'S_{11} della curva considerata. Per ogni punto O di questa, il fascio di rette di centro O giacente nel piano osculatore alla curva si compone, com'è ben noto, di rette di quel complesso lineare. Dunque, poichè queste rette sono anche in $\mathcal{N}$, quel piano osculatore starà nell'iperpiano Π_{18} che corrisponde a O nel sistema nullo $\mathcal{N}$. Così Π, contenendo il piano osculatore in O alla curva, avrà in O incontro tripunto con questa. Applicando ciò ad ogni S_{11} passante per O, col quale, e con Π, seghiamo la V_9, vediamo che la varietà V_8 traccia di Π su V_9 è segata da ogni S_{11} passante per O in un gruppo di punti, dei quali tre cadono in O. Ossia: *L'iperpiano che nel sistema nullo* $\mathcal{N}$ *corrisponde ad un punto della* V_9 *sega questa secondo una* V_8 *per la quale quel punto è triplo* ([31]).

Diremo che un tale iperpiano è *osculatore* alla V_9.

Pei complessi lineari di piani, in base al n⁰ 4, la proposizione precedente si traduce così: *In* S_5 *un complesso lineare di piani nucleato contiene il proprio nucleo come elemento triplo.*

42. *La* W_{18}^4 *ammette come varietà doppia la* V_{14}, *considerata alla fine del* n⁰ 18, *luogo degli* S_5 *contenenti le* V_4^2 *della* V_9: poichè dal n⁰ 37 risulta che appunto questa V_{14} è costituita da tutti i punti per cui passano due, e quindi infiniti S_9 (tangenti della V_9, cioè) generatori di W ([32]).

Consideriamo, come al numero precedente, un punto O di V_9 e l'iperpiano Π_{18} che gli corrisponde rispetto ad $\mathcal{N}$; ed anche lo

---

([31]) È questa un'importante particolarità della V_9. Gli ∞^9 iperpiani passanti per l'S_9 tangente in un punto O della V_9 segano questa in generale secondo V_8 con O doppio. I coni quadrici tangenti a queste V_8 in O stanno nell'S_9 e formano un sistema lineare passante pel cono V_5^6 (n⁰ 33) di rette della V_9 uscente da O. L'esservi, fra gli ∞^9 iperpiani, uno che dà per sezione una V_8 con punto triplo si potrebbe anche derivare da ciò che quel sistema lineare di coni quadrici è solo ∞^8 (come risulta dalla rappresentazione analitica del cono V_5^6 colle formole $p_{abl} = z_l\, u_c$ del n⁰ 33).

([32]) A sua volta *la* V_{14} *ammette come doppia la varietà* V_9: perchè, mentre per un suo punto generico passa uno solo dei detti S_5 che la generano (n⁰ 18), eccezione a ciò si ha quando il punto è sulla V_9, chè allora ne passano infiniti.

spazio Ω_9 tangente in O a V_9. La V_8 sezione di V_9 con Π, ossia luogo dei punti di V_9 coniugati di O rispetto a $\mathcal{N}$, si compone delle V_4^2 di V_9 passanti per O: perchè i punti di queste, come i punti di quella V_8, rappresentano tutti i piani di S_5 incidenti al piano ω imagine di O. Le tangenti a quella V_8 nel punto triplo O (n^0 41) formano in Ω un cono cubico, che sarà dunque altresì il luogo delle tangenti in O alle V_4^2 di V_9 passanti per O; e, per conseguenza, anche il luogo dei punti di Ω situati sulla V_{14} di cui s'è detto dianzi. Ossia: *Su un* S_9 *tangente a* V_9 *in un punto* O *i punti d'incontro cogli altri* S_9 *tangenti, cioè i punti d'incontro colla* V_{14} *doppia di* W, *formano un cono cubico* V_8^3 *di vertice* O, *di dimensione* 8, *che è anche il cono tangente in* O *alla intersezione di* V_9 *coll'iperpiano osculatore in questo punto.*

Per O passa anche (n^0 33), in Ω, un cono V_5^6 composto di rette di V_9: con esso si definisce semplicemente il nuovo cono V_8^3. Se in fatti per una tangente in O ad una V_4^2 (della V_9) conduciamo un piano che la unisca ad una retta di questa varietà uscente da O, il piano segherà la V_4^2 in un'altra retta passante per O. D'altronde due rette di V_9 passanti per O stanno sempre in una stessa V_4^2 della V_9, come mostra subito la rappresentazione coi piani di S_5; sicchè ogni retta del loro fascio è tangente in O alla V_4^2, e quindi è generatrice di V_8^3. Concludiamo: *il cono cubico* V_8^3, *di cui all'enunciato precedente, è composto dei piani che congiungono a due a due le rette della* V_9 *passanti per* O (costituenti cioè il cono V_5^6).

Segando con un iperpiano e applicando il n^0 5 della Nota citata in (8) alla V_4^6, che rappresentavamo al n^0 33 colle formole $p_{abl} = z_l u_c$, si trae che: il cono V_8^3 è quello che riesce definito dall'avere come varietà doppia il cono V_5^6, e che si rappresenta nelle notazioni di quel n^0 33, entro Ω_9, annullando il determinante delle coordinate di punto p_{abl}.

43. Per un punto P della V_{14}, non situato su V_9, passano ∞^3 S_9 tangenti di questa. L'iperpiano omologo di P in $\mathcal{N}$ conterrà questi S_9 (perchè spazi autopolari), e sarà dunque tangente a V_9 nei punti di contatto di essi. *Esistono* ∞^{14} *iperpiani che toccano* V_9 (in due punti e per conseguenza) *lungo una* V_3^2. *Gli* S_9 *tangenti a* V_9 *nei punti di quella concorrono in un punto.*

Se invece prendiamo un punto O su V_9, per esso passeranno ∞^5 S_9 tangenti, cioè tutti quelli tangenti a V_9 nei punti del cono V_5^6 di rette di V_9 uscente da O; ed essi staranno ancora sull'iperpiano polare di O rispetto ad $\mathfrak{N}$, che è ora l'iperpiano osculatore a V_9 in O. Dunque: *L'iperpiano osculatore a* V_9 *in un punto* O *le è tangente in* ∞^5 *punti costituenti il cono* V_5^6 *uscente da* O.

Sui complessi lineari singolari di piani, e su una loro generazione.

44. Un complesso lineare Γ di piani di S_5 ammetta un piano singolare ω. Il complesso sarà rappresentato in S_{19} da un punto P situato sullo spazio Ω_9 tangente a V_9 nel punto O imagine di ω; od anche dall'iperpiano ξ polare di P rispetto ad $\mathfrak{N}$, iperpiano che conterrà Ω (autopolare per $\mathfrak{N}$). Stanno in Γ i piani che hanno per imagini i punti di V_9 situati su ξ, in particolare quelli posti su Ω: dunque Γ contiene tutti i piani che segano ω secondo rette [33]. Viceversa, se un complesso lineare di piani Γ è in questa relazione con un piano ω, sarà ω singolare per Γ: giacchè l'ipotesi equivale a dire che l'iperpiano ξ imagine di Γ contiene il cono delle rette di V_9 passanti per O (imagine di ω), e quindi (n^0 33) contiene l'S_9 tangente in O alla V_9. *Un piano singolare di un complesso lineare di piani è caratterizzato da ciò che tutti i piani passanti per le sue rette sono piani del complesso* (tutte le sue rette sono *totali*).

45. La generazione dei complessi singolari, di cui ora vogliamo parlare, trae la sua origine dalla seguente osservazione: *se un complesso lineare di piani di* S_5 *ammette un piano singolare* ω, *esso contiene i piani di ogni* V_3^3 *irriducibile congiungente* ω *ad altri due piani qualunque del complesso.*

In fatti il complesso è rappresentato in S_{19} dalla sezione che un iperpiano ξ tangente alla V_9 in un punto O fa su questa varietà. La V_3^3 poi corrisponde ad una cubica di V_9 passante per O e per altri due punti di ξ. Poichè la curva passa per O, sarà ivi tangente all'S_9 tangente in O alla V_9, e quindi anche a ξ; e siccome essa taglia questo iperpiano in altri due punti, ed è irriducibile, giacerà in ξ.

Da questa proposizione deriva che, se fissiamo, oltre al piano singolare ω, un altro piano qualunque δ di un complesso lineare

---

(33) Ciò risulterebbe anche riguardando ω come limite di due cardini coniugati di Γ, infinitamente vicini.

Γ, questo si potrà riguardare come costituito da ∞^7 V_3^3 passanti per ω e δ. Si tratterà ora di caratterizzare convenientemente queste ∞^7 V_3^3, fra le ∞^8 che passano per ω e δ.

46. Ogni V_3^3 passante per ω e δ è luogo di ∞^2 rette generatrici che segano su quei due piani una ben determinata collineazione. E viceversa da ogni collineazione fra ω e δ è determinata una V_3^3 passante per questi piani.

Così la questione posta dianzi si può trasformare nel seguente modo: di che natura è il sistema delle ∞^7 collineazioni tra ω e δ che provengono dalle ∞^7 V_3^3 passanti per ω e δ e contenute in Γ?

47. Assumiamo i due piani fissi ω e δ, sghembi fra loro, rispettivamente come piani fondamentali 123 e 456. Sia π un piano qualunque congiungente i tre punti di coordinate q_i, r_i, s_i $(i = 1, \ldots, 6)$. Detti x e y due punti rispettivamente di ω e δ allineati con uno stesso punto $(\lambda q_i + \mu r_i + \nu s_i)$ di π, sarà

$$(20) \qquad \begin{cases} \varrho\, x_1 = \lambda\, q_1 + \mu\, r_1 + \nu\, s_1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \varrho\, x_3 = \lambda\, q_3 + \mu\, r_3 + \nu\, s_3 \end{cases}$$

$$(21) \qquad \begin{cases} \sigma\, y_4 = \lambda\, q_4 + \mu\, r_4 + \nu\, s_4 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \sigma\, y_6 = \lambda\, q_6 + \mu\, r_6 + \nu\, s_6 . \end{cases}$$

Diciamo $u_1\ u_2\ u_3$ le coordinate, entro al piano ω, di una retta passante per x, sicchè $\Sigma\, x_a\, u_a = 0$ $(a = 1, 2, 3)$, ossia, per le (20):

$$(22) \qquad \lambda\, \Sigma\, q_a\, u_a + \mu\, \Sigma\, r_a\, u_a + \nu\, \Sigma\, s_a\, u_a = 0.$$

Dalle (21), indicando per un momento con Q_l, R_l, S_l $(l = 4, 5, 6)$ i complementi algebrici di q_l, r_l, s_l nel determinante di queste 9 quantità, si trae:

$$\lambda : \mu : \nu = \Sigma\, Q_l\, y_l : \Sigma\, R_l\, y_l : \Sigma\, S_l\, y_l ;$$

e sostituendo in (22):

$$(23) \qquad \sum_{a,l} u_a\, y_l\, (q_a\, Q_l + r_a\, R_l + s_a\, S_l) = 0.$$

Ora il trinomio fra parentesi, se $l\ m\ n$ indica una permutazione pari di 4 5 6, non è altro che il determinante

$$\begin{vmatrix} q_a & r_a & s_a \\ q_m & r_m & s_m \\ q_n & r_n & s_n \end{vmatrix}$$

ossia la coordinata p_{amn} del piano π. Dunque la relazione (23) si può scrivere così:

$$\Sigma\, p_{amn}\, u_a\, y_l = 0. \tag{24}$$

Quest'equazione bilineare fra le coordinate $u_1\ u_2\ u_3$ di retta del piano $\omega \equiv 123$ e le coordinate $y_4\ y_5\ y_6$ di punto del piano $\delta \equiv 456$, rappresenta una collineazione, e precisamente quella che è segnata sui due piani dalle rette appoggiate ad essi e al piano π di coordinate p_{123}, ecc. (ossia dalle generatrici della V_3^3 di $\omega\, \delta\, \pi$).

48. Supponiamo ora che π vari in un complesso lineare singolare Γ contenente ω e δ, ed avente ω per piano singolare. L'equazione di Γ dovendo essere soddisfatta dalle (17) del n^0 33 (perchè l'iperpiano di S_{19} corrispondente a Γ deve contenere l'S_9 tangente in O a V_9, che è appunto rappresentato dalle (17)), non conterrà termini in p_{123} nè nelle p_{abl} (34). Nè vi sarà il termine in p_{456}, in causa dell'ipotesi che Γ passi per δ. Quell'equazione si riduce dunque ad un'equazione lineare nelle sole 9 coordinate p_{amn}: ossia appunto in quelle 9 che compajono come coefficienti nell'equazione bilineare (24) della collineazione.

In conseguenza il dire che π descrive Γ equivale a dire che quella collineazione varia in un *sistema lineare* ∞^7.

Un complesso lineare di piani con un piano singolare ω si può generare così. Si fissi un altro suo piano δ sghembo con ω. Da un piano qualunque π, projettando l'uno sull'altro quei due piani fissi, nasce fra essi una collineazione. Il complesso lineare si compone di quei piani π, pei quali le collineazioni così definite costituiscono un sistema lineare ∞^7.

---

(34) È sempre inteso (dal n^0 33) che $a\ b\ c$ prendono solo i valori 1 2 3, e $l\ m\ n$ i valori 4 5 6.

Si avverta però subito che la locuzione « *sistema lineare* ∞^7 *di collineazioni fra* ω *e* δ » ha due distinti significati, a seconda che una collineazione si considera come connesso di rette di ω e punti di δ, e quindi si pone un'equazione lineare tra i coefficienti di quel connesso: oppure invece si considera come connesso di punti di ω e rette di δ. Risulta che è nel primo significato che va presa quella locuzione, nel teorema enunciato.

49. Le collineazioni tra ω e δ di un sistema lineare ∞^7 sono quelle *armoniche* od *apolari* ad una collineazione fissa, riguardata (a differenza di quelle) come connesso di punti di ω e rette di δ [35]. Se l'equazione di Γ è (n⁰ 48):

$$\Sigma\, c_{amn}\, p_{amn} = 0\,, \tag{25}$$

essa esprime appunto che la collineazione (24), prodotta dal piano variabile π di Γ fra ω e δ, è apolare alla collineazione fissa C:

$$\Sigma\, c_{amn}\, x_a\, v_l = 0 \tag{26}$$

(sempre designando $l\ m\ n$ una permutazione pari di 4 5 6).

Quale significato avrà questa collineazione C pel complesso di piani Γ? Un punto x di ω e una retta v di δ sono coniugati in essa (cioè v passa pel punto omologo di x), quando fra le ∞^7 collineazioni ve n'è una che, come connesso, si spezza nel fascio di rette di centro x e nella retta punteggiata v: ossia una che ha per punti singolari x e tutti i punti di v. Questa collineazione degenere è segnata su ω e δ dalle rette incidenti a questi ed al piano congiungente x con v: perciò questo piano sta in Γ. Lo stesso fatto risulta notando che le coordinate p_{amn} del piano di x e v valgono precisamente $x_a\, v_l$, e rendono quindi equivalenti le (25) e (26). Ne deriva che la retta r congiungente due punti x e y, di ω e δ, omologhi in C, sta in un fascio di piani di Γ, giacente nell' S_3 che unisce x a δ. D'altronde r sta pure in un altro fascio di piani di Γ: quello che giace nell'S_3 congiungente y a ω: giacchè questi piani, incontrando ω secondo rette, stanno appunto (n⁰ 44) in Γ. I due fasci di piani non sono in un S_4; e quindi i piani di Γ passanti per r non possono avere come luogo un S_4. *Tutti* i piani per r staranno in Γ: ossia r è retta totale per Γ.

---

[35] V. ad esempio STURM cit. in [7], Bd. II, pp. 290 e segg.

D'altra parte anche ogni retta di ω è una retta totale per Γ. Una retta qualunque g passante per x e giacente nell'S_3 che unisce y a ω sta in un fascio colla retta $r \equiv x\,y$ e con una determinata retta s di ω. Un piano qualunque tirato per g si potrà in infiniti modi riguardare come appartenente ad un fascio con due piani passanti rispettivamente per r ed s, ossia con due piani di Γ: sarà dunque esso stesso in Γ. Ossia g è retta totale per Γ. Tutte le rette totali si otterranno in questo modo, perchè (n^0 26) per un punto generico ne passa una sola.

Le rette totali di un complesso lineare di piani Γ avente un piano singolare ω si ottengono così. Esiste una determinata collineazione fra il piano ω punteggiato e la rete degli spazi ordinari passanti per ω. Sono rette totali di Γ quelle che passando per un punto di ω giacciono nell'S_3 corrispondente (36).

Segando la rete di spazi con un altro piano δ di Γ, nasce fra ω e δ una collineazione, che è quella armonica a tutte le ∞^7 collineazioni fra ω e δ determinate dagli ∞^8 piani del complesso, ossia dalle ∞^7 V_3^3 contenute in Γ e passanti per ω e δ.

50. La considerazione dell'omografia C ci permette di semplificare ulteriormente l'equazione (25) del complesso Γ. Avevamo assunto ω e δ rispettivamente come piani fondamentali delle coordinate 123, 456. Ma prendiamo precisamente le coppie di punti fondamentali 1 4, 2 5, 3 6 in coppie di punti omologhi di C. Allora l'equazione (26) di C dovrà ridursi alla forma

$$\alpha\, x_1\, v_4 + \beta\, x_2\, v_5 + \gamma\, x_3\, v_6 = 0\,,$$

e quindi la (25) diverrà:

$$\alpha\, p_{156} + \beta\, p_{264} + \gamma\, p_{345} = 0\,.$$

Così dunque si può rappresentare un complesso lineare singolare. È la forma d'equazione già trovata al n^0 24.

Per ottenere un complesso doppiamente singolare, basterà assumere la collineazione C degenere, per esempio $\alpha = 0$. C si riduce

---

(36) Se Γ si considera come limite di un complesso generale, i cui due cardini α β s'avvicinano indefinitamente, il sistema che sopra s'è ottenuto delle rette totali di Γ è il limite dell'insieme delle rette incidenti ad α β. È questo l'analogo del fatto che si ha in S_3, quando l'insieme delle rette appoggiate a due rette sghembe infinitamente vicine conduce ad una projettività fra la serie dei punti e quella dei piani di una stessa retta.

allora ad una projettività tra il fascio di rette di centro 1 nel piano ω e la punteggiata 56 nel piano δ. Le ∞^7 collineazioni sono quelle, per le quali le rette e punti coniugati, appartenenti rispettivamente a quel fascio e a quella punteggiata, si corrispondono in projettività armoniche a quella projettività fissa. Si ritrovano facilmente le proprietà del complesso doppiamente singolare. Suo punto totale (n^0 25) sarà il punto fondamentale 1, suo S_4 totale quello fondamentale opposto al punto fondamentale 4.

Fasci di complessi lineari di piani.

51. Combinando linearmente le equazioni di due complessi lineari di piani di S_5, si ottiene l'equazione di un *fascio* di tali complessi. I piani comuni a due complessi del fascio sono comuni a tutti; ecc. Prendendo come imagini dei complessi i punti di S_{19}, oppure gl'iperpiani, l'imagine del fascio sarà una retta (punteggiata), oppure un fascio d'iperpiani.

Siano α β i cardini di un complesso Γ del fascio, α_1 β_1 quelli di un altro Γ_1. Le rette incidenti a questi 4 piani saranno totali per quei due complessi, e quindi anche per tutti i complessi del fascio. Se Γ e Γ_1 sono in posizione generica, quelle rette saranno *tre*, m n p; e ad esse si appoggeranno dunque le coppie di cardini di tutti i complessi del fascio ([37]). Ma se, ad esempio, α β α_1 β_1 sono quattro piani generatori di una stessa V_3^3, le ∞^2 rette generatrici di questa saranno rette totali per tutto il fascio, e quindi i cardini di tutti i complessi di questo saranno piani generatori di quella V_3^3.

Se il fascio è generale, conterrà 4 complessi semplicemente singolari: perchè la sua retta imagine in S_{19} incontra in 4 punti la varietà W. Non conterrà invece alcun complesso conico.

52. Vogliamo ricercare i caratteri della varietà costituita, nel caso generale, dai cardini dei complessi del fascio.

Entro questa varietà la corrispondenza fra le coppie di piani, che sono cardini di uno stesso complesso del fascio, è involutoria e biunivoca: in fatti se un piano fosse cardine per due complessi, esisterebbero infinite rette incidenti alle due coppie di cardini di questi complessi, ossia infinite rette totali comuni a tutto il fascio, contro l'ipotesi che siamo nel caso generale. Le coppie di cardini

([37]) Dualmente, i complessi del fascio han comuni tre S_3 totali: che sono precisamente gli S_3 che congiungono a due a due m n p.

sono in corrispondenza biunivoca coi complessi del fascio. Dunque formano, nella varietà di piani considerata, una serie lineare g_2^1; e questa ha 4 elementi doppi, perchè nel fascio stanno 4 complessi a cardini coincidenti (fine del numero precedente). Ne segue che la varietà degli ∞^1 piani cardini dei complessi di un fascio è ellittica.

Sia g la retta che nell'S_{19} rappresenta coi suoi punti i complessi del fascio. Da ogni suo punto si tiri la corda di V_9: queste corde formeranno una rigata razionale, e i loro punti d'appoggio costituiranno la curva D imagine della nostra varietà dei piani cardini. L'ordine di quella rigata risulta subito $= 4$. Per vederlo basta assumere g nell'S_3 di una cubica di V_9, sicchè si tratterà allora delle corde di questa C^3 incidenti a g (poichè per un punto di g, punto generico di S_{19}, non passa altra corda di V_9 che la corda della C^3: n^0 18); nè questa assunzione particolare può produrre una modificazione nell'ordine che la rigata avrebbe nel caso generale. Invece viene modificato l'ordine della curva D, la quale in questa ipotesi speciale si riduce alla C^3: poichè ogni punto di questa va contato due volte come punto di D, essendo esso su due corde incidenti a g [38].

Dal fatto che la rigata è del 4^0 ordine segue che D è in generale del 6^0 ordine: perchè un iperpiano per g conterrà 3 generatrici della rigata e su esse 6 punti di D; oppure anche per una nota formola sulle curve di una rigata.

L'ordine di D, determinato segandola con un iperpiano osculatore a V_9, risulta essere il numero dei piani della nostra ∞^1 incidenti ad un piano dato. Concludiamo dunque: *In un fascio generale di complessi lineari di piani dell'*S_5 *le coppie di cardini sono i piani di una semplice infinità ellittica del* 6^0 *ordine*, V_3^6.

D, come curva d'ordine 6 e genere 1, starà (insieme colla retta g) in un S_5, ossia in ogni iperpiano che ne contenga 6 punti generici. Ne segue che: quella V_3^6 di S_5 è tale che ogni complesso lineare di piani contenente 6 generici fra i suoi piani, li contiene tutti.

53. Preso un punto generico sulla curva D, l'iperpiano osculatore in esso a V_9 andrà ad incontrare ulteriormente la curva in altri

---

(38) Ciò corrisponde al fatto che, nel caso speciale di fascio, accennato verso la fine del n^0 51, in cui si presentava una V_3^3 come luogo dei cardini, ogni piano di questa è cardine per *due* complessi del fascio: sicchè la V_3^3 va contata 2 volte per dare la varietà degli ∞^1 cardini.

3 punti. Ossia, in S_5, un piano della ∞^1 considerata ne incontra in generale altri 3. È facile vedere che tali punti d'incontro di due piani della ∞^1, ossia punti doppi della V_3^6, costituiscono le tre rette totali m n p (n^0 51) del fascio di complessi.

Invero un punto siffatto non può stare sui due cardini di uno stesso complesso del fascio (v. fine del n^0 51). Sarà su un cardine di un complesso e su un cardine di un altro. Per conseguenza, se da esso si tira la retta che va ad incontrare i due ulteriori cardini rispettivamente di quei due complessi, si otterrà una retta totale comune a questi, ossia appunto una delle m n p.

Viceversa ogni punto M di una, m, di queste rette sta su cardini di due complessi del fascio. Per veder ciò direttamente, si considerino, per ciascun complesso del fascio, i piani passanti per M. Le rette di questi piani formeranno i complessi lineari di rette di un fascio: complessi di rette pei quali (n^0 26) m è retta singolare, e che quindi si possono ottenere projettando da m un fascio di ordinari complessi lineari di rette di un S_3 sghembo con m. Dall'esistenza, in quest'ultimo fascio, di due complessi speciali, segue l'esistenza nel fascio di complessi di rette di S_5 di due complessi composti rispettivamente delle rette incidenti a due S_3 passanti per m. Ognuno di essi proverrà da un complesso di piani, del primitivo fascio, contenente ogni piano che passa per M e che incontra secondo una retta un S_3 fisso passante per m; il complesso di piani avrà cioè come rette totali la stella di rette di centro M giacente in quell'S_3: sicchè M sarà su un cardine del complesso (e l'S_3 passerà per l'altro cardine).

La V_3^6, *luogo degl'infiniti cardini dei complessi lineari di piani di un fascio, ammette in generale* 3 *rette direttrici doppie, che sono le* 3 *rette totali comuni ai complessi del fascio.*

54. Da quest'ultimo risultato si può trarre, con un nuovo procedimento, l'esistenza, nel fascio di complessi di piani, di 4 complessi singolari (ossia l'ordine 4 di W ottenuto al n^0 38). Basta considerare, ad esempio, su m la corrispondenza fra i punti che sono tracce dei due cardini di uno stesso complesso del fascio. La corrispondenza sarà (2, 2); e i 4 punti uniti non potranno provenire che dalla coincidenza dei cardini di uno stesso complesso.

Anche l'ordine 6 della varietà dei piani cardini si ritrova, considerando i piani stessi come congiungenti di terne di punti omologhi delle tre rette m n p, così riferite tra loro che ad ogni punto, per esempio M dell'una m, corrispondono sulle altre n p due coppie di punti N P, N_1 P_1; ecc. (Si comportano cioè m n p come tre linee di 2^0 ordine in corrispondenza univoca fra loro). Il principio di corrispondenza prova, in modo noto, che la varietà dei piani congiungenti le terne di punti omologhi è del 6^0 ordine.

55. Secondo il n^0 5, per ciascun complesso del fascio, i piani suoi appoggiati ad m n p stabiliscono fra i punti di queste rette una trilinearità. E l'equazione (6) di questa mostra che dal fascio di complessi nasce così un *fascio di trilinearità.* Dal n^0 21 poi risulta che le ∞^1 coppie di cardini dei complessi segnano su m n p le ∞^1 coppie di terne singolari per le trilinearità del fascio. Così i 4 complessi singolari (ossia a cardini coincidenti) rispondono alle 4 trilinearità *singolari* (ossia a terne singolari coincidenti) del fascio di trilinearità [39].

Il fatto rilevato alla fine del n^0 52 si può ora enunciare così: *Dato un fascio di trilinearità fra tre rette, l'insieme delle terne di elementi singolari delle varie trilinearità è una ∞^1 ellittica, costituita dalle terne comuni ad altre due trilinearità, e quindi a tutte le trilinearità di un altro fascio.*

Anzi, *si può sempre riguardare la ∞^1 delle terne comuni a due trilinearità, e quindi ad un fascio, come composta delle terne di elementi singolari delle trilinearità di un altro fascio*; e ciò in 9 modi diversi, ossia con 9 accoppiamenti involutori delle ∞^1 terne. In fatti la data ∞^1 di terne è rappresentata nell'S_7 del n^0 6 dalla sezione della V_3^6 con due iperpiani, cioè con un S_5: dunque da una curva del 6^0 ordine C^6, che si riconosce subito essere ellittica. Ora si sa [40] che su una tale C^6 esistono 9 serie lineari g_2^1, tali che per ognuna la rigata delle congiungenti le coppie di punti ha una retta direttrice. I punti di questa retta rappresentano le trilinearità di un fascio, le cui coppie di terne singolari saranno rappresentate dalle coppie della g_2^1 (come le coppie di cardini dei complessi di un fascio provenivano dai punti d'appoggio delle corde della C^6 uscenti dai punti della retta g imagine del fascio: n^0 52).

---

[39] Sono appunto 4 queste trilinearità, perchè è di 4^0 grado l'invariante di una trilinearità, il cui annullarsi esprime che essa è singolare (STURM, cit. in [7], fine della p. 322).

[40] C. SEGRE, *Remarques sur les transformations uniformes des courbes elliptiques en elles mêmes*, Math. Ann., XXVII, 1886, p. 296; v. il teorema alla p. 302 [V. queste « Opere », I, pp. 36-55, a p. 42].

Complessi lineari armonici od apolari.

56. Diciamo *armonici* od *apolari* due complessi lineari di piani di S_5

$$\Sigma\, c_{hkl}\, p_{hkl} = 0\,, \qquad \Sigma\, c'_{hkl}\, p_{hkl} = 0\,, \tag{27}$$

quando s'annulla il loro invariante bilineare $c_{123}\, c'_{456} + \ldots$ (a 20 termini, composti com'è detto al n⁰ 1, sicchè risulta una forma bilineare alternata).

In particolare un complesso qualunque ed uno nucleato sono armonici se il 1^0 contiene il nucleo del 2^0.

Se un dato complesso è combinazione lineare di k complessi nucleati, un complesso lineare ad esso armonico, il quale contenga i nuclei di $k-1$ fra quelli, conterrà pure il nucleo del rimanente: e viceversa un complesso passante pei k nuclei sarà armonico al complesso dato.

Così: *Se due complessi lineari di piani di* S_5 *sono tali che l'uno contiene una terna di piani coniugati dell'altro* (n⁰ 28), *oppure i cardini di questo, i due complessi sono armonici. — Se due complessi sono armonici ciascuno di essi segherà ogni* V_3^3 (*luogo di terne di piani coniugati dell'altro, ossia*) *passante pei due cardini dell'altro secondo una terna di piani coniugati di questo. — Se un complesso armonico ad un altro passa per un cardine di questo, ne conterrà pure il secondo cardine.*

Due complessi lineari armonici sono rappresentati in S_{19} da due punti, o da due iperpiani, coniugati rispetto al sistema nullo $\mathcal{N}$: vale a dire da due punti situati su una retta del complesso $\mathcal{N}$.

57. Se due complessi lineari sono armonici, saranno armonici fra loro due complessi qualunque del loro fascio. Ciò è evidente dalla definizione analitica, tenuto conto che sempre $c_{123}\, c_{456} + \ldots = 0$; come anche dalla rappresentazione in S_{19}, ove il fascio risulta avere per imagine una retta di $\mathcal{N}$.

Di qui e dal numero precedente segue che condizione necessaria e sufficiente perchè due complessi lineari di piani Γ, Γ' siano armonici è che nel loro fascio stia un complesso contenente ambo i cardini di uno di essi.

Accadrà allora che ogni complesso del fascio di Γ, Γ' sega la V_3^6 luogo dei cardini di tutti i complessi del fascio secondo 6 piani, che si distribuiscono nelle 3 coppie di cardini di 3 complessi del fascio.

58. Anche l'armonia od apolarità fra complessi lineari di piani di S_5 si può collegare ad una corrispondente relazione fra due trilinearità.

Dicesi che due trilinearità fra tre punteggiate, rappresentate da

$$a_x b_y c_z \equiv \Sigma\, a_{rst}\, x_r\, y_s\, z_t = 0\,; \quad a'_x\, b'_y\, c'_z \equiv \Sigma\, a'_{rst}\, x_r\, y_s\, z_t = 0\,,$$

(ove gl'indici $r\ s\ t$ prendono i valori 1 e 2) sono *armoniche* od *apolari* quando è nullo il loro invariante bilineare (alternato) $(a\, a')\, (b\, b')\, (c\, c')$, ossia quando:

$$(28) \qquad a_{111}\, a'_{222} - a_{222}\, a'_{111} + a_{122}\, a'_{211} - a_{211}\, a'_{122} + \ldots = 0\,;$$

od anche, geometricamente, quando si presenta il seguente fatto. Si chiamino omologhi due punti della 1.ª punteggiata quando le due projettività, che essi, mediante le due trilinearità, rispettivamente, subordinano fra le altre due punteggiate, sono armoniche. Si ha così, entro la 1.ª punteggiata, una projettività: la quale è un'involuzione appunto quando le due trilinearità sono armoniche ([41]).

Ciò premesso, fissiamo tre rette $m\ n\ p$, su cui assumeremo rispettivamente le coppie di punti fondamentali 1 4, 2 5, 3 6, come al n^0 5; e consideriamo le trilinearità che su esse sono segnate dai piani incidenti ad esse di due complessi lineari Γ, Γ', aventi per equazioni le (27) del n^0 56. Le equazioni di queste trilinearità saranno la (6) del n^0 5 e l'analoga colle c' in luogo delle c. La condizione (28) di armonia di queste trilinearità diventa quindi precisamente la (7) del n^0 6. Essa coincide colla condizione (n^0 56) di armonia dei complessi Γ, Γ', se uno di questi, per esempio Γ, ha nulli tutti i coefficienti che non compaiono in quell'equazione (7), ossia (n^0 21) se il complesso Γ ha $m\ n\ p$ come rette totali. Dunque: *L'essere due*

([41]) R. De Paolis, *Le corrispondenze projettive nelle forme geometriche fondamentali di 1.ª specie,* Mem. Acc. Torino, (2) 42, 1892, p. 495: v. ivi n^0 84 e segg. Cfr. anche p. 304 e segg. di H. Wiener, *Geometrische Invariantentheorie der binären Formen,* Jahresber. der deutschen Math.-Vereinigung, 17, 1908, p. 291.

Valgono per le trilinearità armoniche proposizioni analoghe ad alcune dei n^i 56, 57 relative a complessi armonici. Così, da una di esse risulta subito che due fasci di trilinearità, legati com'è detto negli enunciati corsivi del n^0 55, si compongono di trilinearità mutuamente armoniche.

complessi lineari di piani di S_5 *armonici equivale a questo fatto: su tre rette qualunque linearmente indipendenti, totali per un complesso o per entrambi, i piani dei due complessi che si appoggiano ad esse segnano due trilinearità mutuamente armoniche.*

I fasci di complessi con data quaterna di piani singolari.

59. Dovendo considerare i complessi lineari che hanno come rette totali le tre rette $m\ n\ p$ linearmente indipendenti, ricordiamo di nuovo che (n^0 21) quei complessi sono gli ∞^7 i cui coefficienti non necessariamente nulli sono gli 8 che compaiono, ad esempio, nelle equazioni (6), (7). I punti che ne sono imagini in S_{19} formano un S_7, di cui già s'è parlato al n^0 6. Ivi si è pur considerata la V_3^6, che nell'S_7 è traccia della V_9 di S_{19}; come anche il sistema nullo, o complesso lineare di rette, $\mathcal{N}_1$, sezione di $\mathcal{N}$ coll'S_7. Conviene aggiungere che gli S_3 tangenti di V_3^6 saranno totali per $\mathcal{N}_1$, perchè giacciono in spazi S_9 tangenti di V_9, i quali sono totali per $\mathcal{N}$.

60. Siano dati, in S_5, 4 piani $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ in posizione generica. Domandiamo i fasci di complessi *non singolari* (ossia fasci nei quali un complesso *generico* non è singolare) per cui quei piani sono i 4 piani singolari (n^0 51).

Pensiamo le tre rette $m\ n\ p$ che incontrano $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$. Saranno ($n^0$ 51) le tre rette totali comuni a tutti i complessi del fascio cercato. Questi complessi saranno dunque rappresentati da punti dell'S_7 ricordato al numero precedente. In particolare i 4 complessi singolari del fascio saranno rappresentati da punti comuni ad S_7 e agli S_9 tangenti a V_9 nei punti $A\ B\ C\ D$ imagini di $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$. Questi $A\ B\ C\ D$ stanno sulla V_3^6 di S_7 (perchè $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ sono incidenti ad $m\ n\ p$); sicchè quei primi punti staranno sugli S_3 tangenti a V_3^6 in $A\ B\ C\ D$.

Così il problema dato diventa questo: entro S_7 trovare una retta incidente agli S_3 che toccano V_3^6 in $A\ B\ C\ D$.

In generale, se in S_{2q+1} sono dati 4 S_q, le rette incidenti a questi sono, com'è noto, $q+1$: i loro punti d'incontro con uno di quegli S_q si determinano, ad esempio, come i $q+1$ punti uniti della collineazione che su questo S_q nasce projettando su esso un altro S_q dai due rimanenti.

Sono dunque 4 in generale le rette di S_7 incidenti ai quattro S_3. Ma, poichè questi sono autopolari rispetto al sistema nullo $\mathcal{N}_1$, possiamo aggiungere che quelle 4 rette *e f g h* formeranno in generale, cioè se sono ben determinate e distinte, una *quaterna coniugata* rispetto a $\mathcal{N}_1$; ossia che due punti qualunque rispettivamente di due di quelle rette sono sempre coniugati rispetto a $\mathcal{N}_1$, vale a dire che ognuna delle 4 rette ha per S_5 polare rispetto a $\mathcal{N}_1$ lo S_5 delle tre rette rimanenti. In fatti, se così non fosse, due di quelle rette, per es. *e f*, risulterebbero riferite projettivamente, chiamando omologhi su esse due punti coniugati rispetto a $\mathcal{N}_1$; e in questa projettività si corrisponderebbero le tracce su *e f* di ognuno dei 4 S_3 dati (autopolari rispetto a $\mathcal{N}_1$). Le rette congiungenti i punti omologhi di *e f* formerebbero un *regolo* a cui apparterrebbero 4 rette di quei 4 S_3; onde il regolo incidente a quello si comporrebbe di infinite rette incidenti ai 4 S_3 dati. Se dunque siamo nel caso generale, che le rette incidenti a questi spazi sono solo 4, la proposizione è vera.

61. Ora, tenuto conto che l'essere due punti coniugati rispetto ad $\mathcal{N}_1$, e quindi ad $\mathcal{N}$, significa (fine del n^0 56) che i corrispondenti complessi lineari di piani sono armonici, possiamo rispondere nel modo seguente al quesito posto a principio del n^0 60:

Dati in S_5 *quattro piani in posizione generica, sono quattro quei fasci di complessi lineari di piani (i cui complessi generici non sono singolari), per ognuno dei quali i 4 complessi singolari in esso contenuti hanno per piani singolari appunto i 4 piani dati. Questi quattro fasci di complessi sono così legati fra loro, che due complessi di fasci diversi son sempre armonici.*

Merita forse di essere rilevata anche la proposizione corrispondente per trilinearità binarie. Essa segue, senz'altro, o dalla corrispondenza del n^0 5 fra complessi di piani e trilinearità, o dal ragionamento diretto che abbiamo fatto nello S_7 (senza più pensare a S_{19}), considerando S_7 come rappresentativo delle trilinearità tra forme di 1.^{a} specie.

Date in tre forme fondamentali semplici quattro terne di elementi generiche, esistono quattro fasci di trilinearità fra quelle forme, ognun dei quali contiene 4 trilinearità singolari aventi rispettivamente quelle 4 terne come terne singolari. I 4 fasci godono della proprietà che due trilinearità di fasci diversi sono sempre armoniche [42].

[42] Quest'ultimo teorema ricorda una nota proprietà dei 2 fasci di forme binarie cubiche che hanno una stessa forma biquadratica come Jacobiana. V. anche la citazione [44].

62. Può sorgere un dubbio riguardo al procedimento seguito al n^0 60 per giungere alla 1.^{a} proposizione del n^0 61. Se, invece di operare in S_7, avessimo ragionato in modo analogo in S_{19}, cercando *qui* le rette imagini dei fasci di complessi lineari dell'S_5 che risolvono il dato problema, si sarebbe trattato di trovare in S_{19} le rette che incontrano 4 dati S_9, tangenti della V_9 (anzi che 4 dati S_3 di S_7). Il numero di tali rette è in generale 10 (n^0 60, per $q = 9$): si sarebbero dunque trovati 10 fasci, non solo 4.

La contraddizione scompare se si bada che noi, espressamente, avevamo chiesto quei fasci, soddisfacenti alle condizioni imposte relative ad α β γ δ, nei quali un complesso generico non è singolare. Tali fasci sono veramente 4. Gli altri, che risulterebbero dall'ultima considerazione (e che non avranno più m n p come rette totali comuni), saranno composti di complessi singolari. D'altronde essi non saranno nel numero di 6, che, colle 4 soluzioni di prima, darebbe il n^0 10; bensì saranno infiniti. Così, si fissi nello S_3 di n p un ordinario complesso lineare L di rette passante per la congruenza lineare di cui n p sono direttrici. I complessi lineari di piani, conici, col punto totale variabile su m, e aventi le rette di L come rette totali (deducibili quindi da L com'è detto al n^0 25), formeranno un fascio, che conterrà 4 complessi aventi come piani singolari rispettivamente α β γ δ (i 4 complessi che hanno per punti totali rispettivamente le tracce di quei 4 piani su m). Di tali fasci, mutando L, se ne avranno appunto infiniti (43).

---

(43) Colle solite notazioni, l'equazione

$$p_{125} + \lambda p_{136} + \mu p_{425} + \lambda\mu p_{436} = 0$$

rappresenta un complesso lineare di piani, che ha per iperpiano totale $x_1 + \mu x_4 = 0$, e per punto totale la traccia di questo sulla retta fondamentale 14 (ossia m). Fissando λ, e lasciando variare μ, il complesso descrive un fascio, di quelli indicati nel testo.

Aggiungiamo qui, facendo una breve digressione, che anche due complessi lineari di piani aventi uno stesso punto totale, o uno stesso iperpiano totale, determinano evidentemente un fascio di complessi dotati dello stesso elemento totale. Ne deriva che gli ∞^9 complessi con un dato punto, o iperpiano, totale hanno per imagini in S_{19} i punti di uno spazio S_9 della V_{14}. Nascono così sulla V_{14} due distinti sistemi ∞^5 di spazi S_9, corrispondenti in certo senso, rispettivamente, agli ∞^5 punti e agli ∞^5 iperpiani di S_5. Ognuno degli ∞^9 S_5 con cui da prima (fine del n^0 18) eravamo giunti alla V_{14} sta in *un* S_9 di ciascuno dei due sistemi. Ecc., ecc.

63. Se un fascio di complessi di piani di S_5 si compone di complessi mutuamente armonici (n^0 57), i 4 piani singolari per complessi del fascio presenteranno in generale questa particolarità: che dei 4 fasci di complessi che li hanno per piani singolari (n^0 61), due coincidono nel fascio dato.

Di fatti in tal caso la retta g di S_7, imagine del dato fascio di complessi, sta in $\mathcal{N}_1$, ossia nel proprio S_5 polare rispetto a $\mathcal{N}_1$; e quindi la quaterna $e\,f\,g\,h$ di rette coniugate rispetto a $\mathcal{N}_1$, che, secondo il n^0 60, rappresentano i 4 fasci di complessi or ora nominati, sarà tale che 2 rette di essa coincidono in g. Ciò appare anche così. Nelle ipotesi attuali, l'S_5 polare di g segherà i 4 S_3 tangenti di V_3^6 secondo 4 piani : e questi sono incidenti a sole *tre* rette (inclusa g), non a 4. Gli è che, appunto, delle 4 rette incidenti ai 4 S_3 due coincidono in g.

Una proposizione corrispondente si avrà, in relazione colla fine del n^0 61, pei fasci di trilinearità apolari; ossia: un tal fascio conta due volte tra i quattro fasci che hanno le stesse 4 terne singolari ([44]).

INDICE

([44]) C. Stéphanos, *Mémoire sur les faisceaux de formes binaires ayant une même Jacobienne,* Mém. prés. par divers savants à l'Acad. des sciences, (2) 27, 1883 (v. i n^i 26 e 27 a p. 50 e 51), ha, per forme binarie d'ordine n, questa proposizione analoga alla precedente. Se due tali forme appartengono rispettivamente a due fasci aventi la stessa Jacobiana (pel che basta che s'annulli un loro invariante simultaneo, di grado $n-2$ nei coefficienti di ciascuna, l'analogo del nostro invariante bilineare di due trilinearità), il fascio che congiunge le due forme conta 2 volte tra i fasci di forme d'ordine n aventi la stessa Jacobiana.