Corrado Segre

Sulla geometria delle schiere rigate o regoli, e in particolare sui complessi lineari di tali enti

Annali Mat. pura ed applicata, Vol. **27** (1918), p. 151–181

in: Corrado Segre, Opere, a cura della Unione Matematica Italiana, Volume IV, Edizione Cremonese, Roma, 1963, p. 264–294

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Segre_CW_4_264>

LXXIV.

SULLA GEOMETRIA DELLE SCHIERE RIGATE O REGOLI, E IN PARTICOLARE SUI COMPLESSI LINEARI DI TALI ENTI [1]

« Annali di matematica pura ed applicata »,
serie III, tomo XXVII, 1918, pp. 151-181.

Premesse. Rappresentazione dei regoli in S_5 e in S_{19}.

1. La nota considerazione delle rette di uno spazio ordinario come i *punti* di una varietà quadrica V_4^2 di S_5 (varietà che indicheremo nel seguito con R) è suscettibile ancora di molte applicazioni. Queste esigono, naturalmente, la conoscenza di proprietà relative all'S_5, che poi con quella rappresentazione si hanno da trasportare alle rette di S_3. Una parte dei risultati che in tal modo si possono ottenere derivano così immediatamente da proposizioni già note dello S_5, che si può ritenere inutile il rilevarli espressamente. Altri invece si ottengono meno facilmente, oppure esigono che si facciano prima apposite escursioni nella geometria di S_5. Appartengono a questa categoria alcune ricerche relative alle *schiere rigate*, o *regoli*, di S_3, alle quali saranno dedicati questo lavoro e qualche altro.

2. Si sa che, nella rappresentazione ricordata dell'S_3 rigato, le rette di un'ordinaria *schiera rigata* (sistema di generatrici di una quadrica) hanno per imagini i punti di una conica, sezione piana di R. Finchè le schiere rigate, che si hanno da considerare, non sono *degeneri*, la loro rappresentazione coi piani di S_5 che segano su R le corrispondenti coniche è biunivoca. Ancora rimane tale per quelle schiere rigate, che si spezzano in due fasci di raggi con centri

(1) V. una Nota riassuntiva: *Sui complessi lineari di schiere rigate, o regoli,* nei Rend. Acc. Lincei, (5) 26, 1917_1, pp. 341-344 [V. questo volume, pp. 210-214].

e piani distinti, e con una retta comune: esse rispondono ai piani di S_5 tangenti a R in un sol punto (il punto imagine di quella retta). Ma le schiere rigate che degenerano in coni quadrici, o in inviluppi piani di 2ª classe, hanno per imagini coniche giacenti in piani di R. Un piano di R ha i suoi punti corrispondenti alle ∞^2 rette di una stella o di un piano rigato di S_3: esso non sarebbe più imagine di una sola, ma di ∞^5 schiere rigate, degenerate come s'è detto. D'altra parte una schiera rigata che degeneri in un fascio di rette da contarsi doppiamente non dà in S_5 un solo piano, bensì ∞^1 piani, tangenti a R in tutti i punti di una stessa retta p (imagine di quel fascio). Vi è un S_3 (tangente a R lungo p) che sega R nei due piani di questa varietà passanti per p; e i detti ∞^1 piani costituiscono il fascio determinato da questi due.

3. Diremo *regolo* per significare l'insieme delle rette di S_3 comuni a tre complessi lineari di rette (non di un fascio), ossia ad una rete di tali complessi. Sarà come dire: l'insieme delle rette rappresentate in S_5 da tutte le intersezioni di R con un piano. Questo concetto include dunque anzitutto quello delle schiere rigate non degeneri; poi ancora quello delle schiere rigate spezzate in due fasci con centri e piani distinti e con una retta comune; quello dei fasci di rette contati doppiamente; infine *fra i regoli staranno pure le stelle di raggi e i piani rigati.* Restano esclusi gli ordinari coni quadrici e le ordinarie coniche-inviluppi (2).

4. In una Memoria precedente, a cui dovrò riferirmi frequentemente nel seguito (3), ho avuto da valermi spesso della rappresentazione degli ∞^9 piani di S_5 coi punti di una V_9 appartenente a S_{19}. Riguardando ora quei piani come imagini (nel senso anzi detto) degli ∞^9 regoli di S_3, avremo anche per questi regoli una rappresentazione sui punti della V_9. Sarà pur questa una rappresentazione da adoperare nel presente lavoro.

---

(2) Si potrebbero ottenere anche queste degenerazioni delle ordinarie schiere rigate, considerando in S_5 la traccia su R di un piano generico, che s'avvicini indefinitamente a un dato piano giacente in R. A seconda del modo con cui si fa questo passaggio al limite, si otterranno tutti gli ∞^5 coni quadrici di una stella, o tutte le ∞^5 coniche-inviluppi di un piano rigato. Ma nel presente lavoro non ci occorrerà questa considerazione.

(3) *Sui complessi lineari di piani nello spazio a cinque dimensioni,* Ann. mat., (3) 27, 1917, pp. 75-123 [V. questo volume, pp. 215-263]. La citeremo brevemente con (M).

Così ricordiamo (M, n^0 9) che sulla V_9 stanno due diversi sistemi di S_3 (spazi massimi) corrispondenti alle due specie di sistemi lineari ∞^3 di piani di S_5: sistema dei piani di un S_3, sistema dei piani per una retta. Nello spazio ordinario rigato essi rispondono a due sorta di *sistemi lineari* ∞^3 *di regoli* (sistemi lineari massimi di questi enti): i regoli contenuti in una stessa congruenza lineare; e i regoli che passano per due rette fisse (distinte o no). — Una retta della V_9, ossia (M, n^0 8) un fascio di piani di S_5, rappresenterà in conseguenza l'insieme di quei regoli di una stessa congruenza lineare che passano per due rette fisse di questa: un *fascio di regoli*. Le quadriche contenenti questi regoli passano per un quadrilatero, di cui due lati opposti sono le direttrici della congruenza e gli altri due le rette comuni ai regoli. Esse formano un fascio-schiera. — I sistemi lineari ∞^2 di piani in S_5 sono (M, n^0 9) le stelle di piani di spazi ordinari, e gli enti duali, ossia sistemi dei piani per una retta entro un S_4. Ne viene che i *sistemi lineari* ∞^2, o *reti, di regoli* sono di due sorta: reti, i cui regoli stanno tutti in una congruenza lineare; e reti composte dei regoli di un complesso lineare di rette passanti per due rette fisse di questo.

Rileviamo ancora da (M), n^0 4, il sistema nullo $\mathcal{N}$ di S_{19}, nel quale sono coniugati due punti della V_9 quando sono imagini di due piani di S_5 fra loro incidenti, vale a dire imagini di due regoli di S_3 contenuti in uno stesso complesso lineare di rette, o, come dirò brevemente, di due regoli *legati linearmente*.

5. A ciò va ora aggiunta, in S_{19}, una nuova considerazione essenziale, dipendente dal fatto che in S_5 abbiamo adesso un nuovo ente (che non compariva in (M)): la varietà quadrica R.

La polarità rispetto a questa varietà fa corrispondere fra loro i piani di S_5 (in particolare ogni piano di R a se stesso). La corrispondenza è lineare, cioè muta i complessi lineari di piani (M, n^0 2) in complessi lineari. Quindi in S_{19} produrrà una trasformazione *collineare* $\mathcal{J}$ della V_9 in se stessa. $\mathcal{J}$ è involutoria ed ha sulla V_9 due sistemi ∞^3, V_3, di punti uniti: quelli che sono imagini dei due sistemi ∞^3 di piani di R. Gli *assi* (luoghi di punti uniti) di $\mathcal{J}$ contengono rispettivamente le due V_3: perchè queste non possono stare in uno stesso spazio inferiore a S_{19}; ossia non possono i due sistemi ∞^3 di piani di R stare in uno stesso complesso lineare di piani. Invero, se esistesse un tal complesso, prendendo due piani di R che si taglino in una retta, starebbero nel complesso tutti i piani del loro fascio, vale a dire tutti i piani tangenti a R lungo rette; e quindi anche starebbe nel complesso ogni piano tangente a R in un punto, perchè un tal piano si può sempre riguardare in infiniti modi come situato nel fascio di due piani tangenti a R lungo rette (passanti per quel punto). Ora i piani tangenti a R formano un complesso irriducibile di 2^0 grado, non del 1^0.

Poichè i due sistemi di piani di R sono projettivamente equivalenti, i due assi di $\mathcal{G}$, che contengono rispettivamente le due V_3, saranno della stessa dimensione: dunque due S_9. A questi S_9 *appartengono* (vi sono *immerse*) le due V_3; perchè se no, si potrebbe tirare un iperpiano che le contenga entrambe, il che si è escluso.

6. La definizione delle due corrispondenze $\mathcal{H}$ e $\mathcal{G}$ di S_{19} provenienti dallo S_5 mostra che ognuna di esse deve essere mutata in sè dall'altra, ossia che esse sono permutabili. Ciò risulta pure, con più precisa determinazione, nel seguente modo. Si consideri in un S_9 asse di $\mathcal{G}$ la V_3 che rappresenta l'uno dei due sistemi ∞^3 di piani di R. Poichè i piani di questo sistema sono a due a due incidenti, i punti della V_3 sono a due a due coniugati rispetto a $\mathcal{H}$; ossia gl'iperpiani polari rispetto a $\mathcal{H}$ di quei punti passano per la V_3, e quindi (n^0 5) per l'S_9 considerato. Ne segue che questo spazio ha per polare se stesso rispetto a $\mathcal{H}$. Ossia: ognuno dei due assi di $\mathcal{G}$ è omologo di se stesso rispetto a $\mathcal{H}$, ossia è *spazio totale* pel complesso lineare di rette $\mathcal{H}$.

7. Il prodotto delle due corrispondenze $\mathcal{H}$ e $\mathcal{G}$, involutorie e permutabili, sarà una reciprocità involutoria $\mathcal{P}$ di S_{19}. Due punti di V_9 coniugati in $\mathcal{P}$ rappresentano due piani di S_5, l'uno dei quali è incidente al polare dell'altro rispetto a R. Perciò un punto di V_9 è autoconiugato in $\mathcal{P}$ solo se il piano corrispondente di S_5 è tangente a R. $\mathcal{P}$ non è dunque un sistema nullo, ma una polarità ordinaria, ossia rispetto a una V_{18}^2; e questa taglierà la V_9 nei punti che rispondono ai piani di S_5 tangenti ad R, ossia che sono imagini dei regoli di S_3 spezzati in due fasci di raggi (inclusi i regoli degenerati in stelle o in piani rigati). La V_{18}^2 conterrà i due S_9 assi di $\mathcal{G}$.

8. Le sezioni fatte su R da due piani polari rispetto a R medesima rappresentano due *regoli incidenti*, ossia regoli tali che le rette dell'uno sono incidenti alle rette dell'altro: nel caso ordinario, le due schiere di generatrici di una stessa quadrica. Passando alla V_9 di S_{19}, avremo in conseguenza che la collineazione involutoria $\mathcal{G}$, definita al n^0 5, fa corrispondere due punti della V_9, quando sono imagini di due regoli incidenti.

Così, accanto alla nota rappresentazione delle *quadriche*, luoghi o inviluppi, coi punti di un S_9, veniamo qui a considerare la rappresentazione dei *regoli* sulla V_9: *sdoppiando* cioè ogni quadrica nei suoi due regoli. Due punti di V_9 omologhi in $\mathcal{I}$ rispondono ad una stessa quadrica, e cioè rispettivamente ai suoi due regoli.

Ritorneremo diffusamente su ciò.

9. Quando i regoli si rappresentano nei modi esposti, si possono assumere come *coordinate dei regoli* le coordinate dei corrispondenti piani di S_5, o dei corrispondenti punti di S_{19}. Vengono ad essere, per esempio, i 20 determinanti del 3^0 ordine estratti dalla matrice (3,6) delle coordinate di 3 complessi lineari di rette di cui il regolo sia l'intersezione (n^0 3).

Potrà essere utile avere le espressioni di queste coordinate nel caso di un regolo giacente su una quadrica, la cui equazione sia data sotto la forma canonica:

$$A \equiv \sum_1^4 a_{ll}\, x_l^2 \equiv \sum_1^4 a_l^2\, x_l^2 = 0 \tag{1}$$

(ove, per comodità di scrittura nel seguito, mettiamo in evidenza provvisoriamente un sistema di radici quadrate a_l dei coefficienti).

Sono rette di un tal regolo, per ogni valore di σ, le rette (posto $i = \sqrt{-1}$)

$$\left\{\begin{aligned} a_1 x_1 + i\, a_2 x_2 &= \sigma\,(a_3 x_3 + i\, a_4 x_4) \\ \sigma\,(a_1 x_1 - i\, a_2 x_2) &= -\, a_3 x_3 + i\, a_4 x_4 \,. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Le loro coordinate p_{hk} sono:

$$p_{12} = 2\,\sigma\, i\, a_3 a_4\,, \quad p_{13} = -(\sigma^2+1)\, a_4 a_2\,, \quad p_{14} = (1-\sigma^2)\, i\, a_2 a_3\,,$$

$$p_{34} = -\,2\,\sigma\, i\, a_1 a_2\,, \quad p_{42} = (\sigma^2+1)\, a_1 a_3\,, \quad p_{23} = (\sigma^2-1)\, i\, a_1 a_4\,.$$

Ponendo queste espressioni nell'equazione di un complesso lineare di rette

$$\Sigma\, c_{hk}\, p_{hk} = 0\,, \tag{3}$$

si vede che questo conterrà il regolo solo quando

$$c_{12}\, a_3 a_4 = c_{34}\, a_1 a_2\,; \quad c_{13}\, a_4 a_2 = c_{42}\, a_1 a_3\,; \quad c_{14}\, a_2 a_3 = c_{23}\, a_1 a_4\,. \tag{4}$$

Notiamo che se nella (1) si muta il segno ad *una* delle a_l, con che la quadrica A non muta, il regolo (2) si cambia nell'altro regolo giacente in A ([4]).

10. Poichè nel nostro S_5 sono indicate con p_{hk} le 6 coordinate di punto, converrà che in conseguenza scriviamo le 20 coordinate dei piani con simboli del tipo $P_{hk,\,h'k',\,h''k''}$. La (3), interpretata in S_5, dice che l'iperpiano (c_{hk}) contiene il punto (p_{hk}), e le (4) dicono che il piano di S_5 corrispondente al nostro regolo congiunge i tre punti di S_5 che hanno le coordinate seguenti:

p_{12}	p_{13}	p_{14}	p_{34}	p_{42}	p_{23}
$a_3\,a_4$	0	0	$-\,a_1\,a_2$	0	0
0	$a_4\,a_2$	0	0	$-\,a_1\,a_3$	0
0	0	$a_2\,a_3$	0	0	$-\,a_1\,a_4$

Dunque le coordinate di quel piano (determinanti del 3⁰ ordine estratti da questa matrice) sono

$$P_{12,\,13,\,14} = a_2^2\,a_3^2\,a_4^2\,, \text{ e tre analoghe:}$$

$$P_{23,\,34,\,42} = -\,a_1^3\,a_2\,a_3\,a_4\,, \text{ e tre analoghe;}$$

le rimanenti 12 coordinate sono nulle.

Possiamo semplificare lievemente queste espressioni, dividendole per $m = a_1\,a_2\,a_3\,a_4$, che non è altro che una radice quadrata del discriminante di A, ed introducendo i coefficienti primitivi a_{ll} di A

([4]) Se si vuole che il regolo (2) di A e un regolo di un'altra quadrica, che potremo in generale supporre rappresentata con $\Sigma\, b_l^2\, x_l^2 = 0$, stiano in uno stesso complesso lineare di rette, dovranno 6 valori delle c_{hk} non tutti nulli (coefficienti di quel complesso) verificare le (4) e le analoghe, in cui le a si sostituiscano colle b. Confrontando la prima delle (4) coll'analoga, si trae che, se c_{12} e c_{34} non sono entrambe nulle, sarà:

$$a_1\,a_2\,b_3\,b_4 - a_3\,a_4\,b_1\,b_2 = 0\,. \tag{5}$$

Si giunge così al risultato che la condizione perchè i due regoli sian legati linearmente consiste nell'annullarsi di uno dei 3 binomi del tipo (5).

nella (1). Viene che le coordinate del nostro regolo sono:

$$(6) \qquad P_{12,\,13,\,14} = \frac{m}{a_{11}}\,, \qquad P_{23,\,34,\,42} = -\,a_{11}\,,$$

con le analoghe; e poi 12 coordinate nulle.

Rappresentazione in S_{19} delle quadriche ordinarie, luoghi ed inviluppi.

11. Distinguiamo i due assi S_9 dell'involuzione $\mathcal{J}$ di S_{19}, chiamandoli L_9 e Λ_9, o semplicemente L e Λ, rispettivamente, secondo che la V_3 di V_9 in essi contenuta è quella i cui punti rappresentano le stelle di raggi di S_3, oppure i piani rigati di S_3. Possiamo dire allora, più brevemente, che i punti di quelle V_3 di L e Λ rappresentano rispettivamente i punti e i piani di S_3.

Ciò posto, cerchiamo come si rappresentano, ad esempio, su L i punti di una quadrica di S_3.

I due regoli della quadrica avranno per imagini su V_9 (n^0 8) due punti α, α', omologhi in $\mathcal{J}$, e quindi situati su una retta incidente ad L e Λ. Un punto della quadrica si può caratterizzare come centro di una stella di raggi che ha comune una retta con uno (ad arbitrio) di quei due regoli. La stella ha dunque per imagine: in S_5 un piano di R incidente al piano rappresentativo di quel regolo; e quindi in S_{19}, sulla V_3 di L, un punto coniugato rispetto ad $\mathcal{N}$ al punto α (o α'). Così *i punti della* V_3 *di* L *imagini dei punti della quadrica di* S_3 *costituiscono l'intersezione di quella* V_3 *con un iperpiano*, ad esempio col polare di α rispetto a $\mathcal{N}$. Gl'iperpiani polari rispetto a $\mathcal{N}$ dei punti della retta $\alpha\alpha'$ formano un fascio, che comprende l'iperpiano polare della traccia di quella retta su L: iperpiano che contiene L (n^0 6). Quegl'iperpiani segano dunque L in uno stesso S_8, che possiamo determinare, per esempio, coll'iperpiano Π che lo projetta da Λ: questo iperpiano è il polare rispetto a $\mathcal{N}$ della traccia P della retta $\alpha\alpha'$ su Λ.

12. Diremo che Π, o P, è imagine della quadrica-luogo considerata.

Se P è un punto generico di Λ, per esso passerà sempre *una* corda $\alpha\alpha'$ di V_9 (M, n^0 20), la quale avrà se stessa per omologa in $\mathcal{J}$: sicchè i suoi due punti d'appoggio α, α' rappresenteranno, come sopra, i due regoli di una quadrica.

Sia invece P un punto della V_3 di Λ. Allora (M, n^0 43) il suo iperpiano polare Π rispetto a $\mathfrak{N}$ sarà tangente a V_9 in tutti i punti delle rette di questa uscenti da P. Ora una tal retta risponde a un fascio di piani di S_5, che comprende il piano di R rappresentato da P, e che quindi contiene un piano di R dell'altro sistema, la cui imagine sarà la traccia P' di quella retta sulla V_3 di L. In S_3, i punti P e P' avranno per corrispondenti rispettivamente (un piano rigato e una stella, ossia) un piano e un punto incidenti. Quindi la citata proposizione di (M) n^0 43 ci dà che la traccia S_8 di Π su L (la quale, se P era generico in Λ, segava la V_3 di L in una superficie imagine di una quadrica di S_3) è tangente alla V_3 di L lungo una superficie, i cui punti rispondono ai punti del piano di S_3, che ha P come imagine. La rappresentazione, che abbiamo assunto, delle quadriche-luoghi di S_3 coi punti di Λ, fa dunque corrispondere, in particolare, ai punti della V_3 di Λ le quadriche di S_3 degenerate in piani doppi.

13. Caratterizziamo ulteriormente questa rappresentazione delle quadriche-luoghi di S_3.

Per una quadrica *generica* consideriamo la corrispondente sezione iperpiana (generica) della V_3 di L. Se la quadrica varia in un fascio, cioè passa per l'intersezione di due sue posizioni particolari (generiche), un fatto analogo dovrà accadere per quella sezione iperpiana della V_3; ossia l'S_8 ben determinato che la contiene passerà per l'intersezione di due posizioni dello spazio stesso (5). L'S_8 varia in un fascio: quindi anche l'iperpiano che lo projetta da Λ; e il suo polo P rispetto a $\mathfrak{N}$ descriverà una retta. Viceversa ad una retta di Λ risponde su L un fascio di sezioni iperpiane della V_3, e così in S_3 un fascio di quadriche. La rappresentazione puntuale di S_3 sulla V_3 dell'S_9 L è tale che alle quadriche di S_3 rispondono *linearmente* le sezioni iperpiane della V_3. Dunque questa V_3 è la nota V_3^8 di S_9, che rappresenta linearmente il sistema ∞^9 delle quadriche -luoghi di S_3.

Similmente la V_3 di Λ_9 è una V_3^8, i cui punti rappresentano i piani di S_3, in modo che le quadriche di S_3, come inviluppi di ∞^2 piani, rispondono *linearmente* alle sezioni che su quella V_3 fanno

(5) Dalla fine del n^0 5 segue che l'intersezione della V_3 con un S_8 di L non sta in un altro S_8. Quindi l'intersezione della V_3 con due S_8 *generici* non sta in altri S_8 che quelli del fascio di questi due.

gl'iperpiani passanti per L, e quindi anche ai poli di quegl'iperpiani rispetto a $\mathcal{N}$, cioè ai punti di L; e in particolare (per dualità dal n^0 12) le quadriche degenerate in stelle di piani contate doppiamente rispondono ai punti della V_3 di L.

14. Facciamo una breve digressione, per dimostrare in altro modo che, se la quadrica, i cui due regoli han per imagini i punti α, α' di V_9, descrive un fascio, il punto P traccia della retta $\alpha\alpha'$ su Λ descrive una retta.

I piani di S_5, che (colle loro tracce su R) rappresentano i regoli delle quadriche del fascio, formano una V_3, il cui ordine determineremo segandola con un piano di R. Se questo piano è preso fra i piani imagini dei piani rigati di S_3, dal fatto che sono 6 i regoli del nostro sistema che hanno una retta comune col piano rigato (perchè 3 sono le quadriche del fascio tangenti a un piano) segue che l'ordine cercato è 6. Se invece prendiamo un piano π di R tra quelli che rappresentano le stelle di raggi di S_3, si premetta che, essendovi nel dato fascio di quadriche 4 coni, ciò porta ad esservi nel sistema considerato ∞^1 di piani di S_5 4 piani giacenti in R, nella classe in cui s'è preso π; π incontra quei 4 piani, e poi ancora altri 2 del sistema ∞^1, imagini dei regoli di quella quadrica del fascio che passa pel centro della stella di raggi rappresentata da π. Sicchè anche in questo 2^0 modo troviamo che la V_3 è del 6^0 ordine. Essa è ellittica, perchè la g_2^1 delle coppie di piani imagini delle coppie di regoli incidenti (piani polari rispetto a R) ha 4 elementi doppi, appunto nei 4 suddetti piani giacenti in R.

Passando a S_{19}, avremo che le coppie di punti α, α' di V_9 formano una g_2^1 su una curva ellittica del 6^0 ordine C, per modo che le coppie stesse sono su rette appoggiate a L_9 e Λ_9, e che la g_2^1 ha 4 punti doppi su L. Quelle rette costituiscono una rigata con due direttrici su L e su Λ. Un iperpiano per L contiene 2 soli punti variabili di C, quindi una sola generatrice della rigata; sicchè la direttrice che sta su Λ è una retta: ciò appunto che ci eravamo proposto di ritrovare. (Invece la direttrice che è su L sarà una cubica razionale).

Per la rappresentazione di una *schiera* di quadriche vi è solo da scambiare L e Λ.

15. Ritorniamo alla considerazione di un punto P di Λ_9 col suo iperpiano polare rispetto a $\mathcal{N}$, il quale sega L_9 in un S_8, e la V_3^8 di L secondo la superficie imagine di una quadrica-luogo di S_3.

I punti dell'S_8 rappresentano (fine del n^0 13) le quadriche-inviluppi di un sistema lineare ∞^8, che comprende le stelle contate doppiamente aventi per imagini i punti della detta sezione iperpiana di V_3^8. Ora un sistema lineare ∞^8 di quadriche-inviluppi si compone di quelle che sono armoniche, od apolari, ad una quadrica-luogo, composta appunto dei centri delle stelle doppie del sistema. Dunque le quadriche-inviluppi rappresentate dai punti dell'S_8 sono quelle armoniche alla quadrica-luogo rappresentata da P. Ossia: *un punto di Λ e un punto di* L *rappresentano rispettivamente una quadrica-luogo e una quadrica-inviluppo, le quali sono mutuamente armoniche (od apolari) quando quei due punti sono coniugati rispetto a $\mathfrak{N}$.*

16. Quando un punto P di Λ_9 si riguarda come imagine di una quadrica-luogo, i due regoli di questa si hanno (n^0 12) tirando da P la corda di V_9: i punti d'appoggio α, α' di questa rappresentano quei regoli. Essi coincidono se P rappresenta un cono. Su una retta generica di Λ stanno 4 tali posizioni di P, perchè in un fascio di quadriche vi sono 4 coni. Saranno i 4 punti d'intersezione della retta colla varietà W_{18} luogo degli spazi S_9 tangenti alla V_9.

In questo modo il fatto che quella W_{18} è del 4^0 ordine (M, n^0 38) viene ad equivalere al fatto che il discriminante di una quadrica-luogo di S_3 è del 4^0 grado.

L'intersezione di Λ_9 colla W_{18}^4 risulta essere la varietà V_8^4 di Λ_9 luogo dei punti imagini dei coni quadrici, varietà discriminante. *La separazione dei due regoli di una quadrica* corrisponde all'assumere lo spazio Λ_9 come *spazio doppio*, con quella V_8^4 come varietà di diramazione; vale a dire ad *estrarre la radice quadrata dal discriminante della quadrica.*

17. Daremo forma algebrica evidente a quest'ultima osservazione, otterremo cioè una notevole rappresentazione dei regoli con coordinate, facendo un'opportuna trasformazione lineare delle coordinate di cui dicevamo al principio del n^0 9.

In S_{19} assumiamo i punti fondamentali delle coordinate 1, 2, ..., 10 nello spazio Λ_9, e i punti fondamentali residui 11, 12, ..., 20 in L_9. Le quadriche di S_3 son riferite biunivocamente a Λ e a L, sì che le coordinate dei punti di Λ sono in corrispondenza lineare coi coefficienti a_{hk} dell'equazione locale della quadrica, e similmente le coordinate dei punti di L coi coefficienti A_{hk} dell'equazione tangenziale (n^0 13). Pensiamo fatta in S_{19} un'ulteriore sostituzione lineare per le coordinate $X_1, \ldots, X_{10}$, e una per le $X_{11}, \ldots, X_{20}$, equivalenti a quelle due corrispondenze lineari: così che un punto di Λ imagine della quadrica $\Sigma\, a_{hk}\, x_h\, x_k = 0$ avrà le $X_1, \ldots, X_{10}$ uguali rispettivamente alle a_{hk}, a meno di un fattore, e un punto di L imagine della quadrica stessa, come inviluppo, $\Sigma\, A_{hk}\, \xi_h\, \xi_k = 0$, avrà $X_{11}, \ldots, X_{20}$ proporzionali alle A_{hk}.

Un punto della V_9, imagine di un regolo di quella quadrica, sta sulla retta congiungente i due punti considerati di Λ e di L. Ha dunque le 20 coordinate esprimibili così:

$$X_1, \ldots, X_{10} = \varrho\, a_{hk}\,; \quad X_{11}, \ldots, X_{20} = A_{hk}\,,$$

ove sarà da determinare il fattore ϱ.

Fissiamo che le A_{hk} siano precisamente i complementi algebrici delle a_{hk} nel discriminante A della quadrica. Le formole precedenti rappresenteranno parametricamente la V_9 per mezzo dei 10 parametri omogenei a_{hk}. Per l'omogeneità di questi, sarà ϱ una loro funzione algebrica omogenea di 2^0 grado. Essa è a 2 valori, in corrispondenza ai due regoli della quadrica, ossia ai 2 punti d'incontro della retta su nominata colla V_9. Questi punti sono coniugati in $\mathcal{G}$, cioè separati armonicamente da L e Λ, sicchè i due valori di ϱ sono opposti. La coincidenza di questi, ossia dei due regoli, si ha solo per $A = 0$. Dunque ϱ è il prodotto di $\sqrt{A}$ per una funzione razionale di grado zero delle a_{hk}; la quale anzi dovrà ridursi a una costante, appunto perchè non può ϱ annullarsi (o diventare infinita) se non è $A = 0$. Facciamo un'ultima modificazione delle coordinate dividendo per quella costante le $X_1, \ldots, X_{10}$. Otteniamo così questo risultato: *Con una conveniente sostituzione lineare si può rappresentare la* V_9, *i cui punti sono imagini dei regoli di* S_3, *così che le* 20 *coordinate dei suoi punti siano espresse da*

$$(7) \qquad \begin{cases} X_1, \ldots, X_{10} = a_{hk}\sqrt{A} \\ X_{11}, \ldots, X_{20} = A_{hk}\,, \end{cases}$$

ove le 10 *quantità* a_{hk} *sono gli elementi di un determinante simmetrico* A, *e* A_{hk} *è il complemento algebrico di* a_{hk} *in* A.

Si può precisare che se è $X_l = a_{hk}\sqrt{A}$, sia $X_{l+10} = A_{hk}$. Le a_{hk} e le A_{hk} sono i coefficienti dell'equazione locale e tangenziale della quadrica contenente il regolo che si considera. I due regoli di una stessa quadrica provengono dai due valori della $\sqrt{A}$ [6].

---

[6] La rappresentazione (7) cade in difetto per i punti della V_9 situati sulla V_{18}^2 del n° 7, cioè per i punti imagini di regoli degeneri: i secondi membri delle (7) sono allora tutti quanti nulli.

Le formole (6), che avevamo ottenuto al n^0 10, confermano questa proposizione.

18. Quando in S_{19} il sistema di coordinate è quello ora scelto, il sistema nullo $\mathfrak{N}$ sarà quello rappresentato dall'equazione

$$\sum_1^{10} (X_l Y_{l+10} - X_{l\pm 10} Y_l) = 0. \tag{8}$$

Per dimostrare ciò, si ricordi che $\mathfrak{N}$ ha L_9 e Λ_9 per spazi totali; e che un punto di Λ e un punto di L sono coniugati in $\mathfrak{N}$ se rappresentano rispettivamente una quadrica-luogo A (7) e una quadrica-inviluppo B armoniche (n^0 15), cioè tali che $\Sigma\, a_{hk} B_{hk} = 0$: la qual relazione, in base alle (7), dicendo X e Y i punti imagini delle due quadriche, rispettivamente, su Λ e L, diventa

$$\sum_1^{10} X_l Y_{l+10} = 0.$$

D'altra parte a questa equazione si riduce appunto la (8), se la si applica a quei due punti; di cui X, essendo su Λ, ha nulle le coordinate X_{l+10} (e Y, essendo su L, ha nulle le Y_l, $l = 1, \dots, 10$). Inoltre il sistema nullo rappresentato da (8) è tale che due punti qualunque di Λ, come pure due punti qualunque di L, sono coniugati in esso; cioè L e Λ sono spazi totali per (8). Ora è unico, come subito si vede, in S_{19} il sistema nullo che ha L e Λ per spazi totali, e che pone fra i punti coniugati rispettivamente di L e Λ una data reciprocità. Dunque la (8) ci dà veramente $\mathfrak{N}$.

In conseguenza, se consideriamo due regoli α, β di due quadriche A, B, e vogliamo la condizione perchè siano legati linearmente, ciò sarà come dire che i punti X, Y corrispondenti sono coniugati in $\mathfrak{N}$, ossia verificano la (8). Ponendo in questa le espressioni (7), abbiamo: *Il fatto che due regoli sono legati linearmente (vale a dire stanno in uno stesso complesso lineare di rette) si esprime coi coefficienti delle equazioni delle loro quadriche così:*

$$\sqrt{A}\, \Sigma\, a_{hk} B_{hk} - \sqrt{B}\, \Sigma\, b_{hk} A_{hk} = 0. \tag{9}$$

(7) Nel seguito ci accadrà ripetutamente di designare collo stesso simbolo, per es. A, una quadrica e il suo discriminante. Ciò non potrà mai dar luogo a equivoci. Qui s'intenda che per la quadrica B si useranno notazioni analoghe a quelle introdotte per A.

Poichè un cambiamento di segno ai due radicali quadratici, che compaiono in questa condizione, non la altera, mentre esso risponde al mutare i due regoli nei loro incidenti, avremo: *Se due regoli* α, β *sono legati linearmente, anche i regoli* α', β' *ad essi incidenti saranno così legati* (8).

Complessi lineari di regoli. Esempi particolari.

19. I piani di un *complesso lineare di piani* di S_5 (M, n⁰ 2) segnano su R le imagini degli ∞^8 regoli di un *complesso lineare di regoli*. In altri termini, un complesso lineare di regoli è l'insieme degli ∞^8 regoli le cui 20 coordinate (n⁰ 9) verificano una data equazione lineare omogenea. Od anche, ricordando (M, nota (4)) che un complesso lineare di piani in S_5 si può definire come un insieme algebrico irriducibile di piani tale che in un fascio generico ve n'è un solo: *un insieme algebrico irriducibile di regoli di* S_3 *si dice «complesso lineare», quando in un fascio di regoli* (n⁰ 4) *ve n'è in generale un solo.*

In S_{19} i complessi lineari di regoli saranno rappresentati (come i complessi lineari di piani di S_5) dalle sezioni iperpiane della V_9. Possiamo pure assumere come imagine di un complesso lineare di regoli l'iperpiano di S_{19}, od anche il polo dell'iperpiano rispetto a $\mathcal{N}$.

I complessi lineari di regoli sono ∞^{19}.

---

(8) Questa proposizione (che seguiva anche dalla nota (4), cambiando, nella condizione (5) di là, il segno a una delle a e una delle b) si trova, ad es., in A. Voss, *Die Liniengeometrie in ihrer Anwendung auf die Flächen zweiten Grades*, Math. Ann., 10, 1876, p. 143; e precisamente in principio di p. 176. La semplice dimostrazione che ivi è data (in cui va corretta la svista tipografica di una α_x invece di a_x) si può rivestire di forma puramente geometrica. D'altronde la proposizione stessa non è che una traduzione nell'S_3 rigato del fatto, che in S_5, se due piani (quelli che corrispondono ad α, β) sono incidenti, anche i loro piani polari rispetto ad R saranno incidenti.

Si noti anche quest'altra conseguenza dell'equazione (9) e di quella che se ne trae mutando il segno ad *uno* solo dei due radicali quadratici: *È la stessa cosa dire che due quadriche sono armoniche (od apolari) in doppio modo, o dire che ciascun regolo dell'una è legato linearmente a ciascun regolo dell'altra.* (Elementarmente poi si trova subito che questi fatti equivalgono anche all'esistenza, in un regolo dell'una quadrica, di due rette polari fra loro rispetto all'altra quadrica. Se ciò avviene per un regolo, avverrà pure per l'altro; e si conserverà scambiando le due quadriche). Cfr. Voss, loc. cit., pp. 174, 177.

20. Come in S_5 un esempio particolare di complessi lineari di piani è dato (M, n° 2) dall'insieme dei piani incidenti ad un piano fisso (*nucleo*); così, segando R con questi piani, si ha che un particolare complesso lineare di regoli (complesso *nucleato*) è dato dall'insieme dei regoli legati linearmente ad un regolo fisso (*nucleo* del complesso di regoli) (9).

In S_{19} i punti imagini di tali complessi lineari sono i punti della V_9.

21. Altre classi particolari di complessi lineari di regoli sono quelle rappresentate dai punti di Λ_9 o di L_9, cioè dagl'iperpiani passanti per Λ o per L. Un iperpiano passante per Λ sega L in punti che rappresentano, in un certo senso (nn. 12, 15), le ∞^8 quadriche-inviluppi armoniche ad una quadrica-luogo fissa; e sega la V_9 nelle coppie di punti d'appoggio delle corde di questa varietà passanti per quei punti di L (perchè tali corde incontrano pure Λ). Ne viene che il complesso lineare di regoli rappresentato dal detto iperpiano si compone dei regoli situati sulle ∞^8 quadriche-inviluppi nominate. *I regoli delle quadriche-inviluppi (o luoghi) armoniche ad una quadrica-luogo (o inviluppo) fissa formano un complesso lineare* (10).

Si vede così come il nostro concetto generale di complesso lineare di regoli viene a fondere insieme i due concetti distinti, fra loro duali: complesso lineare ∞^8 di quadriche-luoghi, e complesso lineare ∞^8 di quadriche-inviluppi. Queste due diverse classi, di ∞^9 enti, vengono a rientrare insieme fra i complessi lineari di regoli, che sono enti molto più generali, ∞^{19}.

22. In S_5, se prendiamo i piani polari rispetto a R dei piani di un complesso lineare, otterremo ancora i piani di un complesso lineare. Dunque, in S_3: *i regoli incidenti ai regoli di un complesso lineare Γ formano ancora un complesso lineare Γ'*. Due complessi lineari così legati hanno per imagini in S_{19} due iperpiani, oppure due punti, fra loro omologhi nell'involuzione $\mathcal{J}$.

---

(9) Se α è il regolo nucleo di un complesso nucleato, indicheremo talvolta il complesso col simbolo $[\alpha]$.

(10) Effettivamente in un fascio di regoli vi è un sol regolo di un tal sistema, perchè in un fascio-schiera vi è una sola quadrica-inviluppo (ad es.) armonica ad una data quadrica-luogo. Se f è la quadrica-luogo (o inviluppo) fissa, ci accadrà d'indicare il complesso di regoli, di cui qui si tratta, con $[f]$.

Da quest'ultima osservazione deduciamo subito che i due complessi lineari Γ, Γ' coincidono solo quando l'iperpiano che rappresenta uno di essi è *unito* per $\mathcal{J}$, cioè passa per l'uno o l'altro dei due assi L, Λ. *Le due specie particolari di complessi lineari di regoli, di cui al n^0 21, sono caratterizzate da ciò: che il complesso lineare, con ogni suo regolo, contiene sempre anche il regolo incidente.*

23. *Fasci* di complessi lineari di regoli, e così *reti*, ecc., si diranno i sistemi di tali complessi rappresentati in S_{19} da fasci, reti, ecc. d'iperpiani; o, se si preferisce, dai punti di una retta, o di un piano, ecc. Non occorre che ci fermiamo su di ciò. Rileviamo solo, perchè sarà utile in seguito, che un complesso Γ può essere determinato dando un fascio di complessi di cui Γ faccia parte, ed un regolo contenuto in Γ; come pure dando due fasci di complessi tali che Γ stia in entrambi. La costruzione di Γ, in ciascun caso, si fa ovviamente ([11]).

Anche si osservi, riguardo alla proprietà caratteristica di un complesso lineare di regoli (n^0 19), che se, invece di cercare *nei fasci di regoli* i regoli del complesso, cerchiamo questi ad es. fra i regoli *di un fascio di quadriche*, troveremo che ve ne sono, non *uno*, ma *sei* in generale: perchè i regoli delle quadriche di un fascio hanno per imagini in S_{19} i punti di una curva (n^0 14), che è segata dall'iperpiano imagine del complesso lineare, in generale, in 6 punti. Lo stesso, se invece che un fascio di quadriche si considera una schiera.

Le due quadriche d'appoggio di un complesso lineare di regoli.

24. Per un punto qualunque P di S_{19} passa una retta contenente un punto di L e un punto di Λ. In essa starà pure l'omo-

([11]) Nel 2^0 caso siano C, D due dati complessi lineari di regoli, che determinino l'un fascio; E, F due che determinino l'altro fascio. Possiamo proporci di costruire quel regolo di Γ, che sta in un dato fascio di regoli: ossia che sta in una data congruenza lineare di rette γ e passa per due date rette m, n di questa. A tal fine si cerchino in γ quei regoli di C che passano per m: formeranno un fascio, cioè avranno comune un'altra retta p. Così pure i regoli di D appartenenti a γ e passanti per m avranno in comune un'altra retta q. Il regolo di $m\ p\ q$ sarà comune a C e D. Similmente si costruisce in γ il regolo per m comune a E e F. Questi due regoli di γ avranno comune, oltre ad m, un'altra retta r. Il regolo cercato di Γ sarà quello di $m\ n\ r$.

logo P' di P nell'involuzione $\mathcal{J}$. Poichè i punti di una retta di S_{19} sono imagini di un fascio di complessi lineari di regoli, ne segue (nn. 21, 22):

Dato un complesso lineare Γ di regoli, restano individuate in generale una quadrica-luogo f *e una quadrica-inviluppo φ, che diremo «gli appoggi» di Γ. tali che Γ sta (col complesso lineare Γ' costituito dai regoli incidenti a quelli di Γ) nel fascio di complessi lineari determinato dal complesso* [f] *dei regoli situati sulle superficie di* 2^a *classe armoniche a* f *e dal complesso* $[\varphi]$ *dei regoli situati sulle superficie di* 2^o *ordine armoniche a φ.*

In altre parole: dato un complesso lineare Γ di regoli, le quadriche di cui *ambi* i regoli (non uno solo) stanno in Γ sono le ∞^7 che, come inviluppi, sono armoniche a una stessa quadrica-luogo f, e, come luoghi, sono armoniche a una stessa quadrica-inviluppo φ. Sono f e φ i due *appoggi* di Γ.

25. Adottando come coordinate dei regoli quelle del n^0 17, le loro espressioni (7) mettono in evidenza la proposizione precedente. In fatti l'equazione di un complesso lineare di regoli Γ, ossia un'equazione lineare fra quelle $X_1, \dots, X_{20}$, si potrà, per le (7), scrivere così:

$$\sqrt{M}\, \Sigma\, \varphi_{hk}\, m_{hk} + \Sigma\, f_{hk}\, M_{hk} = 0\,, \tag{10}$$

ove le φ_{hk} e f_{hk} sono i 20 coefficienti costanti, mentre le m_{hk}, M_{hk}, $\sqrt{M}$, che prendono il posto delle a_{hk}, A_{hk}, $\sqrt{A}$ nelle (7), si riferiscono ad un regolo variabile di Γ. Ora quell'equazione (10) mostra che questo complesso lineare, come pure quello Γ' dei regoli incidenti, che si ottiene semplicemente col mutare il segno (a $\sqrt{M}$, oppure) ai coefficienti φ_{hk}, stanno nel fascio dei due complessi

$$\Sigma\, \varphi_{hk}\, m_{hk} = 0\,, \quad \Sigma\, f_{hk}\, M_{hk} = 0\,. \tag{11}$$

E questi sono appunto: il complesso $[\varphi]$ dei regoli giacenti sulle quadriche armoniche come luoghi a

$$\varphi(\xi) \equiv \Sigma\, \varphi_{hk}\, \xi_h\, \xi_k = 0$$

e il complesso $[f]$ dei regoli giacenti sulle quadriche armoniche come inviluppi a

$$f(x) \equiv \Sigma\, f_{hk}\, x_h\, x_k = 0\,.$$

26. Da questa rappresentazione analitica (10) appare subito che i due appoggi f e φ sono legati linearmente a Γ, ossia: Se un complesso lineare Γ di regoli descrive un fascio, la quadrica-luogo f di appoggio descrive in generale un fascio, e la quadrica-inviluppo φ d'appoggio una schiera.

Ciò risulta anche geometricamente: perchè se il punto P imagine di Γ in S_{19} descrive una retta, P' descriverà la retta omologa in $\mathcal{G}$, e la retta PP' genererà un regolo, che avrà su L e su Λ rispettivamente due direttrici rettilinee.

Similmente, in generale, se Γ descrive una rete, ecc.

27. I due appoggi di Γ si posson anche definire: f come *luogo dei centri delle stelle che, in qualità di regoli degeneri, fanno parte di* Γ*:* φ dualmente, quale *inviluppo dei piani che, come regoli degenerati in piani rigati, fanno parte di* Γ. Invero, ogni regolo degenerato, ad es. in un piano rigato, sta, senz'altra condizione, nel complesso $[f]$; sicchè per un tal regolo il far parte di Γ equivale allo stare in $[\varphi]$, ossia ad essere il suo piano un piano tangente di φ.

Se Γ appartiene alla 1.ª o alla 2.ª delle due specie particolari di complessi del n° 21, è completamente indeterminata l'una o l'altra delle due quadriche d'appoggio (rispettivamente φ o f).

I due regoli cardini di un complesso lineare. Legame cogli appoggi di questo.

28. Come al n° 24 abbiamo considerato, pel punto P imagine di un complesso lineare di regoli, la retta che va da esso ad incontrare L e Λ, così ora pensiamo la retta che va da P ad incontrare in due punti la V_9. Quei due punti saranno imagini di due regoli α, β, ed anche dei complessi lineari nucleati $[\alpha]$, $[\beta]$ (n° 20). Otteniamo in tal modo la seguente proposizione:

Un complesso lineare di regoli Γ *definisce in generale una coppia di regoli* α*,* β*, tali che* Γ *è nel fascio di complessi determinato dal complesso* $[\alpha]$ *dei regoli legati linearmente ad* α *e dal complesso* $[\beta]$ *di quelli legati linearmente a* β*.*

Diremo α e β *cardini* (fra loro *coniugati*) di Γ.

Nel seguito indicheremo sempre con A e B rispettivamente le quadriche su cui stanno α e β.

29. Una stella di raggi, che contenga una retta di α e una di β, si può riguardare come un regolo legato linearmente sì ad α che a

β. (Sta in fatti con α in un complesso lineare speciale di rette avente l'asse in una *direttrice* di α; e così per β). Essa ci dà dunque un regolo di Γ; e perciò il suo centro, che è un punto comune alle quadriche A, B, sta sulla quadrica f luogo dei centri delle stelle di Γ. *La quadrica d'appoggio* f *è nel fascio delle due quadriche* A, B *contenenti i cardini* α, β ([12]).

Dualmente *la* φ *sta nella schiera di quadriche determinata da* A *e* B.

30. Il tetraedro polare comune ad A, B sarà anche polare per f e φ. L'involuzione assiale che ha per assi due spigoli opposti del tetraedro muta in sè α, β, f, φ: e quindi anche Γ, poichè Γ si può definire come quel complesso che è comune al fascio determinato dai due complessi $[\alpha]$, $[\beta]$ e a quello determinato da $[f]$, $[\varphi]$. Dunque: *un complesso lineare di regoli ammette in generale il gruppo* G_4 *delle tre collineazioni involutorie biassiali di un tetraedro* ([13]).

31. Il teorema del n^0 29 si può ritrovare algebricamente, rappresentando il complesso Γ di regoli $(m_{hk}, M_{hk}, \sqrt{M})$ coll'equazione (10) del n^0 25, e profittando della (9) per rappresentarci i complessi nucleati. Se i nuclei di due tali complessi sono $\alpha\,(a_{hk}, A_{hk}, \sqrt{A})$ e $\beta\,(b_{hk}, B_{hk}, \sqrt{B})$, i complessi stessi saranno:

$$\sqrt{M}\,\Sigma A_{hk} m_{hk} - \sqrt{A}\,\Sigma a_{hk} M_{hk} = 0; \qquad \sqrt{M}\,\Sigma B_{hk} m_{hk} - \sqrt{B}\,\Sigma b_{hk} M_{hk} = 0.$$

Il complesso Γ dato dalla (10) sarà nel fascio di questi due complessi nucleati, se esistono λ e μ tali che

$$\varphi_{hk} = \lambda A_{hk} + \mu B_{hk}; \qquad -f_{hk} = \lambda \sqrt{A}\, a_{hk} + \mu \sqrt{B}\, b_{hk}. \tag{12}$$

Queste formole mettono in evidenza appunto il teorema del n^0 29. Esse hanno una speciale importanza, perchè danno in modo completo, esplicito, il legame fra i due cardini α, β e le due quadriche d'appoggio f, φ di uno stesso complesso lineare di regoli.

([12]) Lo stesso fatto rientra nell'osservazione generale del n^0 26, applicata al caso che Γ varî nel fascio dei complessi lineari aventi i dati cardini α, β: essa dà in fatti che f varierà allora nel fascio di quadriche che contiene appunto A e B.

([13]) Non ammette invece le omologie armoniche del tetraedro, perchè queste mutano α nel regolo incidente α', ecc.

Dati α e β, e facendo variare $\lambda : \mu$, le (12) danno una corrispondenza biunivoca tra le quadriche f del fascio di A e B, e le quadriche φ della schiera di A e B: corrispondenza che vien posta dal fascio dei complessi lineari di regoli aventi α e β per cardini, e che nel seguito sarà ancora approfondita (v. in particolare i nn. 41, 43, ecc.).

Scrivendo che un punto x sta su f e che un piano ξ tocca φ, abbiamo dalle (12) (posto $A(\xi) \equiv \Sigma A_{hk} \xi_h \xi_k$, $a(x) \equiv \Sigma a_{hk} x_h x_k$, ecc.):

$$\lambda A(\xi) + \mu B(\xi) = 0; \quad \lambda \sqrt{A} \cdot a(x) + \mu \sqrt{B} \cdot b(x) = 0,$$

donde:

$$\sqrt{A} \cdot a(x) B(\xi) - \sqrt{B} \cdot b(x) A(\xi) = 0. \tag{13}$$

Quest'equazione rappresenta un connesso (2, 2) di punti e piani, legato alle due quadriche A, B, e più precisamente ai loro regoli α, β: col quale connesso si pone appunto tra il fascio di quadriche AB e la schiera AB la corrispondenza di cui s'è parlato.

Od anche, possiamo dire che la quantità

$$\frac{a(x) \cdot \sqrt{A}}{A(\xi)},$$

dove x e ξ sono un punto e un piano, ha lo stesso valore per due diverse quadriche (più esattamente, per due regoli), quando la quadrica del loro fascio passante per x e quella della loro schiera tangente a ξ sono, colle due quadriche date, nella relazione che stiamo considerando ([14]).

Cenno di casi particolari.

32. Un caso particolare notevole è dato da quei fasci di complessi lineari di regoli, che sono rappresentati da rette di S_{19} congiungenti due punti della V_9 coniugati in $\mathcal{G}$: dunque da rette che sono in pari tempo incidenti a L, Λ, e corde della V_9. Sono fasci caratterizzati da una qualunque di queste due proprietà: che *le due quadriche d'appoggio* f *e* φ *sono una stessa quadrica*, riguardata rispettivamente come luogo e come inviluppo; o che *i due regoli cardini*

([14]) Così, se x e ξ sono il punto e il piano fondamentale 1 delle coordinate, si tratterà del rapporto $a_{11} \sqrt{A}/A_{11}$.

α e β sono fra loro incidenti. Questi due regoli saranno allora quelli della detta quadrica unica. Siamo nel caso che, ad es. nelle (12), $b_{hk} = a_{hk}$, e quindi $B_{hk} = A_{hk}$, ma $\sqrt{B} = -\sqrt{A}$.

33. Si può rilevare anche il caso di un complesso lineare di regoli, del quale un cardine α degeneri in una stella di raggi. Allora lo stesso ragionamento che s'è fatto al n^0 29 prova che l'altro cardine β starà su f, cioè B coincide con f. La φ è nella schiera determinata da f e dal punto (doppio) centro della stella α, ecc.

Se l'un cardine degenera in una stella O e l'altro in un piano rigato $\dot{\omega}$ (indipendente da O), anche in ω e O contati doppiamente degenerano gli appoggi f e φ. Il complesso lineare di regoli Γ è allora determinato semplicemente da O, ω e da un suo regolo. Si può domandare una relazione fra O, ω e due regoli qualunque di Γ, che non esiga la considerazione dei complessi lineari di regoli.

Si ha (M, n^0 32) che l'essere la stella O e il piano rigato ω i cardini per un complesso lineare di regoli che comprende due dati regoli, equivale all'essere questi ultimi i cardini di un complesso lineare di regoli contenente la stella O e il piano rigato $\dot{\omega}$. Se dunque assumiamo i due regoli dati come gli α e β del n^0 31 (e preced.^{i}), sicchè ne deriva la corrispondenza ivi considerata tra il fascio di quadriche e la schiera, contenenti le quadriche A e B di α e β, staranno O e ω (sui due appoggi del nuovo complesso, cioè) su una quadrica del fascio e su una della schiera, fra loro omologhe. La (13) del n^0 31, in cui x e ξ siano appunto O e ω, esprimerà il legame cercato fra i due regoli dati e O, ω. I teoremi del seguito daranno semplici relazioni geometriche tra la quadrica del fascio AB passante per O e la quadrica tangente a ω della schiera AB: con che sarà risolta la questione che ci siam posta ([15]).

34. Da un altro punto di vista si hanno altri casi speciali di complessi lineari di regoli.

In (M) sono considerati quei complessi lineari di piani di S_5, pei quali i due cardini coincidono, come pure quelli che ammettono infinite coppie di cardini coniugati. Traducendo nel nostro linguaggio attuale, abbiamo: 1^0) i complessi lineari di regoli coi due cardini

---

([15]) Se nella (13) si suppongono dati $O(x)$ e $\omega(\xi)$, e il regolo $(a_{hk}, A_{hk}, \sqrt{A})$, la (13) stessa diventa l'equazione, nelle coordinate di regolo variabile $b_{hk}\sqrt{B}$, B_{hk}, del complesso lineare di regoli Γ.

α, β coincidenti (singolarità che importa una sola condizione); 2⁰) quelli con infinite coppie di cardini coniugati, come α, β. Questi ultimi complessi (che diremo *doppiamente singolari*, ma la cui singolarità importa 5 condizioni) si determinano assumendo come cardini coniugati α, β due regoli legati linearmente. Diciamo una parola su essi. (Sugli altri v. nel seguito il n⁰ 50).

In S_5 abbiamo (M, n⁰ 25) che, se un complesso lineare di piani ammette un punto *totale* O, ammette pure un iperpiano *totale* Ω, e viceversa; e il complesso è doppiamente singolare. Ne viene questa proposizione: Se un complesso lineare Γ di regoli è tale che esista un complesso lineare di rette F, di cui *tutti* i regoli stanno in Γ, vi sarà pure un complesso lineare di rette F', involutorio o armonico ad F, tale che *tutti* i regoli incidenti a regoli di F' stanno in Γ.

I complessi lineari di rette F, F' definiscono due sistemi nulli, che indicheremo colle stesse lettere, rappresentati in S_5 dalle omologie armoniche che mutano R in sè e che hanno l'una per iperpiano d'omologia Ω, l'altra per centro d'omologia O. Da (M) n⁰ 25 risulta evidente che tali omologie mutano $\overline{\Gamma}$ (16) in sè. Dunque il complesso lineare di regoli Γ è mutato in sè dai due sistemi nulli F, F': che sono quelli relativi ai due complessi lineari di rette, di cui l'uno contiene α e β, l'altro contiene i regoli α' e β' incidenti a questi.

Ne segue che F (o F') muta l'una nell'altra le due quadriche f, φ d'appoggio di Γ. Perciò f *e* φ *si tagliano in questo caso in un quadrilatero* (quello delle generatrici di f, ad es., che sono unite per F).

Ulteriori proposizioni sui cardini e sugli appoggi di un complesso lineare. Legami tra il fascio e la schiera che congiungono due date quadriche.

35. Dalla (M) n⁰ 26 si trae un'altra definizione dei cardini di un complesso lineare di regoli.

Se del complesso Γ si vogliono quei regoli che stanno in una data congruenza lineare di rette, si trova che essi costituiscono in generale un sistema lineare ∞^2. Ma esistono congruenze lineari particolari, per ognuna delle quali avviene che *tutti* i suoi ∞^3 regoli

(16) Qui e nel seguito indichiamo con $\overline{\Gamma}$, $\overline{\alpha}$, ... gli enti di S_5, che rappresentano gli enti Γ, α, ... di S_3.

sono regoli di Γ. Orbene queste congruenze, che diremo *totali* per Γ, sono definite dai due regoli cardini α e β così: esse sono le intersezioni dei complessi lineari di rette passanti per α coi complessi lineari di rette passanti per β. Ossia esse sono quelle congruenze lineari che contengono due rette di α e due rette di β, vale a dire che hanno per direttrici due rette appoggiate alle stesse 4 rette di α e β.

Similmente: i regoli di Γ passanti per due date rette p, q sono in generale ∞^2 e riempiono un complesso lineare di rette. Ma esistono tali coppie p, q che *tutti* i regoli che le contengono stanno in Γ. Le rette di una coppia siffatta sono le due rette comuni a una congruenza lineare di rette passante per α e ad una passante per β: ossia sono due rette appoggiate alle stesse 4 rette dei due regoli α', β' incidenti ad α, β.

36. Si è così condotti a considerare una particolare corrispondenza fra rette di S_3, determinata da due regoli dati α e β: la corrispondenza $\mathfrak{T}$, in cui si chiamano omologhe due rette quando incontrano le stesse rette di α e di β. E insieme con essa si presenta la corrispondenza analoga $\mathfrak{T}'$ definita similmente dai regoli α', β' incidenti ad α, β. In S_5 si tratta della corrispondenza fra punti di R situati sulle rette incidenti a due piani fissi, e di quella analoga definita dai piani polari di questi rispetto a R.

Si riconosce subito che $\mathfrak{T}$, ad es., è generalmente biunivoca; che esistono 3 coppie di rette omologhe in $\mathfrak{T}$, di cui una retta sta in una data stella e l'omologa in un dato piano; e 2 coppie, le cui rette stanno rispettivamente in due date stelle, o in due dati piani ([17]).

Questa corrispondenza $\mathfrak{T}$, come l'insieme delle congruenze *totali*, sono comuni a tutti i complessi lineari di regoli Γ del fascio definito dai due cardini α, β.

37. Fra le congruenze lineari di rette, che sono totali per un complesso lineare di regoli Γ, consideriamo quelle *speciali*, cioè a direttrici infinitamente vicine. Queste direttrici saranno le rette unite

---

([17]) Per vedere ciò, basta considerare, fra una stella e un piano rigato, o fra due stelle, o fra due piani, la projettività in cui sono omologhi i piani e i punti che appartengono ad una stessa retta del regolo α, e la projettività che proviene analogamente dal regolo β. Si tratta delle 3 coppie di elementi omologhi comuni a quelle due projettività (togliendo, se le due forme geometriche sono omonime, la retta comune ad esse, nella quale coincidono appunto i due elementi di una di quelle coppie).

della corrispondenza $\mathfrak{T}$ (e anche della $\mathfrak{T}'$, com'è facile vedere). Poichè una congruenza siffatta contiene due rette a a_1 di α e due rette b b_1 di β, la sua direttrice p sarà tale che i suoi 4 punti d'incontro con quelle 4 rette, e i 4 piani che la congiungono rispettivamente alle rette stesse, formano due quaterne projettive. Viceversa ogni retta p, che, colle rette a a_1, b b_1 dei regoli α, β ad essa incidenti, soddisfi a questa condizione, è direttrice di una congruenza lineare speciale contenente a a_1 b b_1, e quindi totale per Γ.

Ora, in una Nota recente ([18]) ho fatto vedere che, dati due regoli α, β, le rette p tali che la quaterna dei punti d'incontro di p colle rette di α, β incidenti a p sia projettiva alla quaterna dei piani che, rispettivamente, congiungono p alle rette stesse, formano un complesso quadratico (generale) di BATTAGLINI. Dunque: *le direttrici delle congruenze lineari speciali che sono totali per Γ* (e per ogni complesso lineare di regoli avente gli stessi cardini α, β) *formano un complesso quadratico di rette del* BATTAGLINI. Lo indicheremo con T.

Il complesso T si può definire nello stesso modo coi due regoli α', β' incidenti a α, β. Esso contiene ogni fascio di rette determinato da due rette (incidenti) di α e β; ecc. ecc. (v. la Nota citata).

38. Si prenda una congruenza lineare speciale di rette (non spezzata), nella sua rappresentazione in S_5, cioè come cono quadrico (irriducibile) di R. Supponendo che essa sia totale per Γ, si avrà, in particolare, che il piano ϱ tangente a quel cono lungo una sua generatrice r sarà un piano del complesso lineare di piani $\overline{\Gamma}$ (corrispondente a Γ) di S_5. Per r passano due piani di R, situati in un fascio con ϱ (fine del n^0 2). Se uno di essi sta pure in $\overline{\Gamma}$, tutto il fascio di piani starà in $\overline{\Gamma}$, e quindi anche il 2^0 di quei due piani. Ritornando all'S_3 rigato, r ci dà un fascio di rette della nostra congruenza lineare speciale, e i due piani di R passanti per r ci danno il centro e il piano di quel fascio: elementi omologhi nella projettività intorno alla retta p, che definisce la congruenza lineare speciale. D'altronde i piani di R appartenenti al complesso $\overline{\Gamma}$ rappresentano rispettivamente i punti di f e i piani di φ. Quindi l'osservazione precedente ci dà:

Per ogni retta p *del complesso* T, *la projettività, che fra i suoi punti e piani è determinata dalle rette ad essa incidenti dei regoli*

([18]) *Su una generazione dei complessi quadratici di rette del* BATTAGLINI, Rend. Palermo, 42, 1917, p. 85 [V. questo volume, pp. 197-209].

α, β, fa corrispondere ai punti della quadrica f *i piani della quadrica φ.*

39. Viceversa, abbiansi un punto P di f e un piano π di φ, tra loro incidenti. Vorrà dire, in S_5, due piani del complesso $\overline{\Gamma}$ giacenti in R e passanti per una retta r (imagine del fascio di rette $P\pi$): onde tutti i piani del fascio di quei due, ossia tutti i piani tangenti a R lungo r, staranno in $\overline{\Gamma}$. Per r passa anche un S_3 che è totale per $\overline{\Gamma}$ (ossia incidente secondo rette ai piani $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$). Esso, insieme col detto fascio di piani passanti per r, starà nell'S_4 luogo dei piani di $\overline{\Gamma}$ passanti per r (19); e però avrà comune un piano con quel fascio. Così quell'S_3 totale di $\overline{\Gamma}$, contenendo un piano tangente a R lungo r, sarà tangente a R in un punto di r: rappresenterà cioè una congruenza lineare speciale, che è totale per Γ, e che contiene il fascio di rette $P\pi$ di cui r era imagine.

Dunque: *un punto di* f *e un piano di φ, tra loro incidenti, sono sempre omologhi nella projettività che, fra i punti e i piani di una retta (in generale unica) del complesso* T, *è determinata dalla congruenza lineare speciale inerente (per* T*) a questa retta.*

40. I fasci di rette col centro in f e col piano in φ si presentano nei nn. 38, 39 in un modo che va rilevato. Contati doppiamente, costituiscono regoli di Γ (20). Ma ciò non li caratterizza, senz'altro. Si può dire che *ogni* regolo degenerato in un fascio di rette da contarsi doppiamente sta in Γ. In fatti, ogni tal regolo è rappresentato in S_5 (n° 2) da tutto un fascio di piani tangenti a R lungo una retta r; e in questo fascio vi è *sempre* un piano che sta in $\overline{\Gamma}$. O, ricorrendo a S_{19}, quel regolo ha per imagini tutti i punti di una retta, e questa incontra in un punto l'iperpiano imagine di Γ.

Ma i regoli degeneri da noi incontrati, ossia fasci doppi di rette, col centro in f e piano in φ, stanno in Γ, per così dire, in un senso più completo: sono cioè quelli le cui imagini in S_5, o in S_{19}, stanno

---

(19) Dicendo così, si esclude il caso che r sia retta totale per $\overline{\Gamma}$, cioè incidente a $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$. In tal caso il fascio di rette $P\pi$ contiene una retta del regolo α e una di β: ogni sua retta è nel complesso T e soddisfa all'enunciato finale di questo n° 39.

(20) Anche se, per una retta p del complesso T, si prendono due fasci qualunque distinti di rette della congruenza lineare speciale di direttrice p, che è totale per Γ, essi costituiscono sempre un regolo degenere di Γ.

completamente nell'imagine di Γ (*tutti* i piani tangenti a R lungo r stanno in $\overline{\Gamma}$; o, per S_{19}, *tutta* la retta sta nell'iperpiano).

41. Dai nn. 38, 39 tragghiamo questo notevole teorema relativo alle quadriche.

Siano dati due regoli α, β, rispettivamente di due quadriche A, B. *Da essi risulta determinata una corrispondenza tra le quadriche del fascio di* A *e* B *e le quadriche della schiera di* A *e* B, *nel seguente modo. Si consideri il complesso di* BATTAGLINI T *delle rette, fra i cui punti e piani si ha una projettività, nella quale sono omologhi quei punti e quei piani che appartengono rispettivamente alle stesse* 4 *rette di α, β. Diciamo* P π *ogni coppia di punto e piano omologhi in quelle projettività: sicchè a ciascun punto* P *spettano* (∞^1 *rette di* T *e quindi*) ∞^1 *piani π, e viceversa ad ogni π ∞^1 punti* P. *Ciò posto, se il punto* P *è preso su una data quadrica* f *del fascio* AB, *π riescirà sempre tangente a una quadrica φ della schiera* AB, *ben determinata da* f; *e viceversa.* (Dato P, gli ∞^1 piani π inviluppano il cono circoscritto da P a φ; ecc.).

Due quadriche f, φ così legate sono gli appoggi di uno stesso complesso lineare di regoli, avente per cardini α e β.

Dal n⁰ 31 risulta che le formole (12) esprimono le f e φ per mezzo di α, β: corrispondendosi f e φ che provengano dallo stesso valore di $\lambda : \mu$.

42. Dal teorema del n⁰ 38 segue che, se sulla retta p del complesso T coincidono gl'incontri con f, coincideranno pure i piani di φ per essa. Ossia: *ogni retta di* T *tangente a una delle quadriche* f, *φ è pur tangente all'altra; il complesso* T *e i due complessi delle tangenti a* f *e a φ formano fascio.* Anche con questa proposizione si pone, adoperando il complesso T, la corrispondenza tra le f e le φ.

Possiamo profittare delle formole (12), e dell'equazione del complesso T data nella Nota citata in ([18]), per verificare l'ultima proposizione.

Prendiamo le equazioni delle quadriche A, B, come luoghi, sotto la forma canonica

$$\Sigma\, a_i\, x_i^2 = 0\,, \quad \Sigma\, b_i\, x_i^2 = 0\,.$$

Le (12) danno allora:

$$\varphi \equiv \Sigma\,(\lambda\, a_2\, a_3\, a_4 + \mu\, b_2\, b_3\, b_4)\, \xi_1^2\,; \qquad -f \equiv \Sigma\,(\lambda \sqrt{A} \cdot a_i + \mu \sqrt{B} \cdot b_i)\, x_i^2\,,$$

ove $A = a_1 a_2 a_3 a_4$, $B = b_1 b_2 b_3 b_4$. In conseguenza il complesso delle tangenti alla quadrica f è

$$\Sigma \, (\lambda \sqrt{A} \cdot a_1 + \mu \sqrt{B} \cdot b_1)(\lambda \sqrt{A} \cdot a_2 + \mu \sqrt{B} \cdot b_2) \, p_{12}^2 = 0 \, ,$$

ossia

$$\Sigma \, [A \, \lambda^2 a_1 a_2 + \sqrt{A} \sqrt{B} \, \lambda \, \mu \, (a_1 b_2 + a_2 b_1) + B \, \mu^2 b_1 b_2] \, p_{12}^2 = 0 \, ; \tag{14}$$

e il complesso delle tangenti a φ è

$$\Sigma \, (\lambda \, a_1 a_2 a_4 + \mu \, b_1 b_2 b_4)(\lambda \, a_1 a_2 a_3 + \mu \, b_1 b_2 b_3) \, p_{12}^2 = 0 \, ,$$

ossia

$$\Sigma \, [A \, \lambda^2 a_1 a_2 + a_1 a_2 b_1 b_2 \, \lambda \, \mu \, (a_3 b_4 + a_4 b_3) + B \, \mu^2 b_1 b_2] \, p_{12}^2 = 0 \, . \tag{15}$$

Sottraendo questa dalla (14), si vede che, qualunque siano λ, μ, la congruenza delle tangenti comuni a f e φ sta sempre nel complesso quadratico fisso di equazione

$$\Sigma \, [\sqrt{A} \sqrt{B} \, (a_1 b_2 + a_2 b_1) - a_1 a_2 b_1 b_2 \, (a_3 b_4 + a_4 b_3)] \, p_{12}^2 = 0 \, ,$$

che si può anche scrivere:

$$\Sigma \left[a_1 b_2 + a_2 b_1 - \sqrt{A} \sqrt{B} \left(\frac{1}{a_3 b_4} + \frac{1}{a_4 b_3} \right) \right] p_{12}^2 = 0.$$

Ora questa è appunto l'equazione del complesso quadratico T data in (4), n^0 6, della citata Nota [v. questo volume, p. 203].

43. Fra le rette del complesso T vi è (come già ricordammo al n^0 37) ogni retta che stia nel fascio di una retta di α e una di β. Il centro P di un tal fascio è un punto della curva AB: dunque di f. Il piano π del fascio è un piano tangente comune ad A, B e quindi a φ. Applichiamo a una retta del fascio il fatto (n^0 42) che, se essa è tangente ad f, è pure tangente a φ. Nel fascio non vi è altra tangente di f che la traccia su π del piano tangente a f in P: nè altra tangente di φ che la retta congiungente P al punto di contatto di π con φ. Troviamo dunque che queste due rette coincidono. Ossia: *Per ogni coppia di rette incidenti dei due regoli α, β,*

il piano tangente nel loro punto comune alla quadrica f, *e il punto di contatto del loro piano con* φ, *si appartengono* (21).

44. Nel n^0 precedente poniamo che il punto P stia su φ (sia cioè uno degli 8 punti d'intersezione di φ colla quartica comune ad A, B, f). La retta, ivi considerata, che passa per P, sta nel piano π tangente a φ, ed è tangente a φ, diverrà una generatrice rettilinea di questa quadrica. E quel teorema ci dice che essa sarà tangente (in P) a f. Dunque: *gli 8 punti* $O_1, \ldots, O_8$, *comuni ad* A, B, f, φ, *stanno sulle 8 generatrici di* φ *tangenti a* f. Ognuna di queste generatrici è poi in un fascio con una retta di α e una di β.

Dualmente gli 8 piani $\omega_1, \ldots, \omega_8$, tangenti comuni ad A, B, f, φ, passano per le 8 generatrici di f tangenti a φ.

45. Questo ci darà il modo, quando sono assegnate le quadriche d'appoggio di un complesso lineare di regoli, di fissare due regoli convenienti come cardini (mentre i legami prima visti fra cardini e appoggi ci permettevano, dati i cardini, di assegnare convenientemente gli appoggi).

Invero, date le due quadriche f, φ in modo generico, ciascun regolo di φ contiene 4 tangenti di f: sicchè abbiamo 8 punti $O_1, \ldots, O_8$ di contatto, che, per quanto sopra s'è visto, staranno, oltre che su f e φ, anche su A e B. Dualmente le generatrici di f tangenti a φ ci determinano gli 8 piani $\omega_1, \ldots, \omega_8$ tangenti comuni a f, φ, A, B. Rispetto al tetraedro polare comune di f e φ gli 8 punti O sono *associati*, e così pure gli 8 piani ω: intendendo con ciò che quei punti, o quei piani, sono equivalenti rispetto al gruppo G_8 generato dalle 4 omologie armoniche del tetraedro. In conseguenza, fra le ∞^3 quadriche aventi quel tetraedro polare ve ne sono ∞^1 che passano (per uno dei punti O e quindi) per gli 8 punti O e toccano (uno dei piani ω e quindi) gli 8 piani ω. Questo sistema ∞^1 di quadriche comprenderà f, φ, A, B. Si può definirlo come composto di quelle quadriche della rete definita dagli 8 punti base O che sono tangenti ad un piano ω. Ne deriva subito che i punti di contatto

(21) Abbiamo così questo teorema sulle quadriche:

Fissati su due quadriche A, B *rispettivamente due regoli, se su ognuno degli* ∞^1 *piani tangenti comuni ad* A *e* B *si congiunge il punto* P *d'incontro delle due rette di quei due regoli giacenti nel piano stesso, col punto in cui questo è tangente ad una quadrica fissata* φ *della schiera di* A *e* B, *le* ∞^1 *rette così ottenute saranno tangenti ad una stessa quadrica* f *del fascio di* A *e* B, *rispettivamente nei detti punti* P *della linea* AB.

delle ∞^1 quadriche con questo piano formano in generale una cubica ellittica; onde quel sistema è ellittico. Inoltre le generatrici delle quadriche del sistema giacenti in un piano ω formano un inviluppo di 3ª classe. E dualmente.

46. Ciò posto, si costruiscano, per le date quadriche f e φ, gli 8 punti O e gli 8 piani ω, e quindi il sistema ∞^1 di quadriche. Si otterranno i due cardini per un complesso di regoli avente f e φ come appoggi, così. Per uno dei punti O passa un cono cubico di generatrici del sistema ∞^1 di quadriche, cono che contiene, per ipotesi, una generatrice di φ tangente in O a f. Condotto per questa retta un piano arbitrario, che taglierà il cono cubico in altre due rette, si prendano le due quadriche A, B del sistema ∞^1 che passano per queste; anzi, i regoli α, β di A, B, contenenti rispettivamente quelle due rette. Saranno α, β i cardini cercati. A e B riusciranno in un fascio con f, in una schiera con φ [22].

47. Si può dimostrare che, dati in modo generico un gruppo di 8 punti O associati rispetto a un tetraedro, e un gruppo di 8 piani ω pure associati rispetto a questo, si possono trovare due quadriche f, φ — e quindi ∞^1 complessi lineari di regoli — per cui quei punti e piani fungano nel modo anzidetto.

Anche osserviamo che dal n⁰ 52 di (M) segue che in un fascio generale di complessi lineari di regoli le coppie di regoli, cardini dei vari complessi, formano una ∞^1 ellittica d'indice 6, cioè tale che un punto generico sta in una retta di ciascuno di 6 regoli, e dualmente. Se si prende, in particolare, il fascio di complessi determinato da due quadriche f, φ d'appoggio, esso conterrà con ogni complesso di regoli quello formato dai regoli incidenti; e quindi quella ∞^1 dei regoli cardini si comporrà di regoli a due a due incidenti; i regoli cardini staranno nelle quadriche di un sistema ∞^1 di indice, puntuale e planare, 3. E anche questo sistema di quadriche sarà ellittico,

---

(22) Si noti che il sistema considerato ∞^1 di quadriche, comune ad una rete di quadriche e ad un *tessuto* (duale della rete), ha 3 quadriche in ogni fascio della rete, e 3 quadriche in ogni schiera del tessuto. Fissata ad arbitrio nel sistema una quadrica, le ∞^1 coppie di quadriche del sistema, che fanno fascio con questa, formano schiera con un'altra quadrica fissa del sistema, determinata dalla 1ª. (Ciò risulta subito dal fatto che quelle coppie formano una g_2^1 entro quella varietà ellittica di quadriche; e una g_2^1 è individuata da una sua coppia). Così è appunto delle ∞^1 coppie A B di sopra, rispetto a f e a φ.

perchè le coppie di regoli incidenti che stanno su esse formano, entro la ∞^1 ellittica di regoli, un'involuzione priva (in generale) di elementi doppi, e quindi ellittica. Ne deriva pure, di nuovo, che il sistema di quadriche sta sì in una rete che in un tessuto.

Alcune costruzioni di complessi lineari di regoli.

48. Abbiamo già incontrato costruzioni per complessi lineari di regoli. Così, nella nota ([11]) al n^0 23 abbiamo dato una costruzione pel caso che si conoscano due fasci di tali complessi, aventi in comune il complesso cercato. Quella costruzione si potrà applicare, ad es., al caso che siano dati i due appoggi f, φ, e i due cardini α, β del complesso: questo essendo allora comune al fascio di complessi definito dai due appoggi, e a quello definito dai due cardini dati.

Rileviamo ora un'altra generazione generale, che segue da (M) n^0 29.

Ivi si considerano le V_3^3 razionali normali di S_5, luoghi di ∞^1 piani. Queste varietà, segate con R, danno nello spazio ordinario rigato dei sistemi ∞^1 di regoli, razionali, d'indici 3, generabili in infiniti modi come i regoli d'intersezione degli elementi omologhi di tre fasci projettivi di complessi lineari di rette ([23]). Orbene, si fissi entro un tal sistema ∞^1 di regoli una serie lineare g_3^2, ossia involuzione ∞^2 di 3^0 grado; e si considerino gli ∞^8 regoli, ognun dei quali è legato linearmente a tre regoli di uno stesso gruppo dell'involuzione, ossia ognun dei quali si ottiene come intersezione di tre complessi lineari di rette condotti ad arbitrio rispettivamente per tre regoli di uno stesso gruppo. Quegli ∞^8 regoli costituiranno un complesso lineare di regoli. I cardini di questo saranno la coppia neutra della g_3^2.

49. Da (M) n^0 32 si trae pure la costruzione seguente del complesso lineare di regoli, di cui son dati i due cardini α, β e un regolo qualunque ε. Si considerino quei fasci di complessi lineari di rette, ognun dei quali ha tre elementi passanti rispettivamente per α, β,

([23]) Tali sistemi ∞^1 di regoli costituiscono dunque delle *congruenze* ROCCELLA (3, 3). V. D. ROCCELLA, *Sugli enti geometrici dello spazio di rette generati dalle intersezioni de' complessi corrispondenti in due o più fasci projettivi di complessi lineari*, Piazza Armerina, 1882.

ε [24]; e per ogni ulteriore complesso lineare di un tal fascio si prenda il birapporto che esso determina con quei primi tre complessi. Tre qualunque complessi lineari di rette così ottenuti (da tre arbitrari fra i detti fasci), ai quali spettino in tal modo tre birapporti, il cui prodotto sia $= 1$, si segheranno secondo un regolo, che descrive il complesso lineare cercato.

50. Avevamo accennato nel n^0 34 ai complessi lineari di regoli coi due cardini α, β coincidenti. Si può ottenere questo caso, assumendo la g_3^2 del n^0 48 tale che la sua coppia neutra si riduca a un elemento doppio.

Se, oltre al regolo ω in cui coincidono i due cardini, è dato un altro regolo δ del complesso, possiamo invece fare la costruzione applicando il n^0 48 di (M). A tale scopo, si osservi prima che, se nelle reti di complessi lineari di rette passanti rispettivamente per due regoli fissi ω, δ si chiamano omologhi quei complessi che segano su un altro regolo dato π la stessa coppia di rette, si sarà posta con ciò una corrispondenza projettiva fra le due reti. Orbene, i regoli π tali che le corrispondenze projettive, da essi così definite fra le due reti passanti per ω e δ, formino un dato sistema lineare ∞^7 (sistema lineare in questo senso, che le dette projettività si considerino come connessi di complessi lineari per δ e congruenze lineari per ω), costituiscono un complesso lineare di regoli passante per ω e δ, e avente i due cardini coincidenti in ω.

51. In particolare, degenerino ω in un piano rigato, e δ in una stella di rette O. Allora le reti di complessi lineari di rette passanti rispettivamente per ω e per δ si comporranno di complessi speciali, di cui basterà considerare gli assi. Le due reti si ridurranno così al piano rigato ω e alla stella di raggi O. La corrispondenza projettiva, che un regolo qualunque π determinava fra le due reti, diventa ora la reciprocità che si pone fra il piano ω e la stella O, quando si considerino come omologhe due loro rette, se sono incidenti alla stessa coppia di rette del dato regolo π (vale a dire la reciprocità che fa corrispondere ogni punto di ω e ogni piano di O appartenenti ad una stessa retta di π). Una reciprocità fra ω ed O proviene in tal modo da ∞^1 regoli π (quelli dedotti da uno di essi colle omolo-

---

(24) Si ottiene un tal fascio, conducendo ad arbitrio un complesso lineare di rette per ε: esso sega α e β in due coppie di rette, che determinano la congruenza lineare base del fascio cercato.

gie di centro O e piano d'omologia ω). Se poi la reciprocità varia in un sistema lineare ∞^7, ossia è armonica ad una reciprocità fissa, gli ∞^8 regoli π formano un complesso lineare di regoli, pel quale i due cardini coincidono nel piano rigato ω, oppure nella stella O, secondo che il sistema lineare di reciprocità si ha, riguardando queste come connessi fra rette di O e punti di ω, od invece fra piani di O e rette di ω.