Corrado Segre

I connessi bilineari alternati di coppie di rette

Rend. Circolo Mat. Palermo, Vol. **44** (1920), p. 139–166

in: Corrado Segre, Opere, a cura della Unione Matematica Italiana, Volume IV, Edizione Cremonese, Roma, 1963, p. 295–328

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Segre_CW_4_295>

LXXV.

I CONNESSI BILINEARI ALTERNATI DI COPPIE DI RETTE

« Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo »,
tomo XLIV, 1920, pp. 139-166.

---

1. Fissiamo un sistema qualunque di coordinate omogenee projettive per le rette dello spazio: siano esse le 6 coordinate tetraedriche di GRASSMANN e PLÜCKER; oppure 6 forme lineari indipendenti di esse, cioè coordinate generali di KLEIN.

Un'equazione bilineare fra le coordinate di due rette p, q:

$$\Sigma\, c_{rs}\, p_r\, q_s = 0 \qquad (r, s = 1, \ldots, 6) \tag{1}$$

definirà un *connesso bilineare di coppie di rette*, che aggruppa le rette in coppie (*ordinate*): così, che le rette coniugate di una data retta (come 1ª, oppure come 2ª retta della coppia) formano in generale un complesso lineare.

È l'ente analogo, nello spazio di rette, al connesso bilineare di coppie di punti; vale a dire, alla reciprocità dello spazio ordinario.

Se ne ha un esempio particolare, fissando un'ordinaria collineazione, o reciprocità; e accoppiando poi due rette p, q, quando q è incidente all'omologa di p in quella corrispondenza.

Se si ricorre alla rappresentazione dell'ordinario spazio rigato su una V_4^2 di S_5, la (1) definirà in quest'iperspazio una reciprocità; e si tratta di considerare quelle coppie di punti della V_4^2 che son reciproci in questa reciprocità. *Ma in questo lavoro non mi varrò mai di quella rappresentazione iperspaziale* (1).

---

(1) Essa però mi ha servito più volte, nella ricerca primitiva.

2. L'analogia dei connessi attuali colle reciprocità suggerisce subito una serie di problemi e di fatti.

Così, si posson chiedere quei connessi (1) che sono *involutori*: cioè tali che non vi sia luogo a distinguere l'ordine nelle coppie p, q di rette. E anche qui si avranno due casi: che la forma bilineare sia *simmetrica* ($c_{rs} = c_{sr}$), o che sia *alternata* ($c_{rs} + c_{sr} = 0$).

Questo 2⁰ caso, del connesso bilineare alternato, analogo al sistema nullo dello spazio punteggiato (e che si otterrebbe dallo S_5, segando la V_4^2 con un complesso lineare di rette di quest'iperspazio), *sarà l'oggetto del presente lavoro* (²).

Vedremo che esso si collega ad altri enti notevoli dello spazio: particolarmente (nel caso regolare) al sistema di due complessi tetraedrali relativi allo stesso tetraedro, e ad una trasformazione birazionale di 3⁰ grado dei punti in piani, con incidenza degli elementi omologhi.

3. Diciamo subito che, seguendo una ovvia osservazione, ben nota (³), i connessi *involutori* di cui al n⁰ 2 si presentano necessariamente in relazione con un connesso generale.

Si abbia cioè un connesso (1) qualunque; e si considerino, di una retta p, presa come 1ª o 2ª retta di una coppia, i due complessi lineari che le corrispondono. Nel fascio determinato da questi il complesso lineare che passa per la p avrà per equazione, in coordinate di retta variabile q:

$$\Sigma \left(c_{rs} - c_{sr}\right) p_r \, q_s = 0.$$

E questa, considerata rispetto alle p e q, ossia come espressione di un connesso, è appunto un'equazione bilineare *alternata* (⁴).

(²) Nella Memoria di C. L. E. Moore and H. B. Phillips, *The Dyadics which occur in a Point Space of three Dimensions* (Proc. Amer. Academy of Arts and Sciences, 53, 1918, pp. 389-438), si trova al n⁰ 14 (pp. 419-425) un rapido cenno dei connessi bilineari di coppie di rette: in particolare di quelli simmetrici e alternati. Ma non vi son risolte le questioni che qui saranno trattate.

(³) V. L. Kronecker, *Über die congruenten Transformationen der bilinearen Formen,* (Monatsber. Akad. Wiss. Berlin, 1874, pp. 397-447 = Werke, I, pp. 421-483); ed anche i lavori geometrici citati in R. Sturm, *Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften,* Bd. 3, Leipzig, 1909, p. 99. Nella Memoria citata in (²) si trova un'allusione a ciò che ora diciamo.

(⁴) Un connesso *simmetrico* si otterrebbe prendendo per ogni retta p il complesso lineare, che, rispetto ai due prima nominati, è coniugato armonico del terzo.

Così, si applichi questa costruzione al caso che la (1) derivi, nel modo indicato come esempio al n^0 1, da una collineazione, o reciprocità. Una retta qualunque p abbia per omologhe in questa corrispondenza e nell'inversa le rette p' e p_1. I due complessi lineari da adoperare saranno quelli speciali che han per direttrici p' e p_1; e da essi si trarrà quello, del loro fascio, che passa per p: dunque il complesso lineare che contiene p, e rispetto a cui p' e p_1 son rette polari. Accoppiando con ogni p le rette del complesso lineare così definito, si otterrà uno dei nostri connessi alternati: e ciò in relazione con un'ordinaria omografia, o reciprocità. (Veggansi i n^i 37, 39).

4. L'equazione di un *connesso bilineare alternato di coppie di rette*

$$\Phi \equiv \Sigma\, a_{rs}\, p_r\, q_s = 0\,; \qquad (\text{ove } a_{rs} + a_{sr} = 0) \tag{2}$$

ossia

$$\Phi \equiv \Sigma\, a_{rs}\,(p_r\, q_s - p_s\, q_r) = 0, \tag{3}$$

ove la somma si estende solo più alle 15 combinazioni semplici degl'indici, mostra che il connesso dipende da 14 costanti.

Diciamo *coniugate* rispetto al connesso Φ due rette p, q, che verifichino quell'equazione. Ogni retta è coniugata di se stessa. Le coniugate di una retta generica p son le rette q di un complesso lineare contenente p. Lo diremo *complesso polare* di p (rispetto a Φ).

La corrispondenza fra le rette e i loro complessi polari è *lineare.*

5. La corrispondenza è anche *biunivoca, senz'eccezioni,* se il determinante, di 6^0 grado, delle a_{rs} non è nullo.

Sia invece il determinante nullo. Poichè esso è gobbo, sarà di rango (o caratteristica) 4, oppure 2. Nel 1^0 caso i 6 complessi lineari

$$\sum_s a_{rs}\, q_s = 0, \qquad (r = 1, \dots, 6) \tag{4}$$

da cui, con combinazione lineare, si formano i polari delle varie rette p dello spazio, saranno combinazioni lineari di 4 di essi; nel 2^0 caso invece saran combinazioni di 2. Ossia: i complessi lineari polari staranno, nel 1^0 caso, in un sistema lineare ∞^3; nel 2^0 caso, in un fascio. Nel 1^0 caso avranno comuni due rette, distinte od infinitamente vicine; od anche un fascio di rette. Saranno *rette singolari*; ossia rette, ognuna delle quali, messa in luogo di q nella

(2) o (3), la rende soddisfatta identicamente: ed è quindi una retta coniugata a *tutte* le rette dello spazio; cioè una retta il cui complesso polare è indeterminato. Nel 2^0 caso son rette singolari tutte le rette della congruenza base del fascio di complessi polari.

Diremo che il connesso Φ, col determinante nullo, è *degenere* o *singolare: di* 1^a o *di* 2^a *specie*, rispettivamente, nel 1^0 e nel 2^0 caso. L'esistenza di una retta singolare ha luogo solo se il connesso è singolare.

Un connesso degenere di 2^a specie si otterrà, senz'altro, fissando un fascio di complessi lineari; ed accoppiando due rette p, q quando sono in uno stesso complesso del fascio. Così, se $f(p)$, $g(p)$ son due forme lineari delle p_r, il connesso sarà:

$$f(p)\,g(q) - g(p)\,f(q) = 0.$$

Se il fascio di complessi ha per direttrici le due rette congiungenti i punti fondamentali delle coordinate A_1 e A_2, A_3 e A_4, si ottiene il connesso:

$$p_{12}\,q_{34} - p_{34}\,q_{12} = 0.$$

6. Diremo che una varietà di rette è *totale* pel connesso Φ, quando due rette, prese comunque in essa, sono sempre coniugate per Φ: ossia, quando la varietà è contenuta nei complessi polari di tutte le sue rette.

Si vede subito che complessi lineari totali e congruenze lineari totali si hanno solo pei connessi singolari. Invece nei connessi generali incontreremo fasci di rette, *regoli* ([5]), piani rigati, stelle di raggi che sono totali (i centri di tali stelle si chiameranno anche *punti totali*).

([5]) Adotto qui, come già in altri recenti lavori, la locuzione *regolo*, usata pure da Autori inglesi e americani, in luogo di «sistema di generatrici di una quadrica», o «schiera rigata». Ciò, non solo per ragion di brevità: che diventa sensibile quando — come appunto in questi miei lavori — quel concetto ha da ritornar più volte; ma anche perchè accade di dover parlare di «*schiere* di quadriche» nello stesso tempo che di «*schiere* rigate», e il doppio significato del vocabolo «*schiera*» produce qualche inconveniente. Inoltre può convenire (quando si segue l'indirizzo della geometria delle rette) d'intendere il «*regolo*» in un senso non perfettamente coincidente con quello di «schiera rigata»; abbracciando cioè, colle ordinarie schiere rigate (comprese quelle spezzate in due fasci di raggi, distinti o coincidenti, ma esclusi i coni quadrici), anche le stelle di raggi e i piani rigati. V. la Memoria citata in ([17]).

Se due rette distinte p, q di un fascio son coniugate, i loro complessi polari contengono ambe le rette, e quindi tutto il fascio (p, q). Ne segue che ogni retta di questo avrà il complesso polare passante per (p, q): ossia due rette qualsiansi del fascio son sempre coniugate: il fascio è totale. In un fascio di rette generico (ossia non totale) non esiston altre coppie di rette coniugate che quelle composte di due rette coincidenti.

Invece che « fascio di rette totale per Φ », diremo anche più brevemente « fascio di rette di Φ ».

7. La corrispondenza lineare (n^0 4) fra le rette e i loro complessi polari fa corrispondere a forme fondamentali di rette altre varietà di rette, intersezioni dei complessi lineari polari di quelle, e quindi costituite dalle rette che son coniugate a tutte le rette di quelle forme.

Senza dilungarci ora sui vari casi a cui questa ovvia osservazione si potrà poi applicare, consideriamo solo quello di un regolo.

Sopra un regolo ordinario R le coppie di rette coniugate rispetto a Φ (e, di regola, distinte) formano in generale (cioè se il regolo non è totale) un'involuzione (cfr. n^0 30).

Le coordinate p_r delle rette di un regolo ordinario R si posson rappresentare come polinomi quadratici $a_r + b_r t + c_r t^2$ di un parametro t. Se queste si sostituiscono nell'equazione (2) di Φ, si vede che i complessi polari delle rette di R stanno in una rete; e, come facilmente si prova, non in un fascio, se Φ non è degenere. Ne segue che alle rette di R son coniugate tutte le rette di un altro regolo R', intersezione di quella rete di complessi.

Ora questi complessi segano R secondo la involuzione delle coppie di rette coniugate rispetto a Φ, che vi è segnata dai complessi polari delle rette di R. Se nella rete prendiamo quel complesso che contiene due rette di R non coniugate, avremo un complesso lineare che, oltre ad R', conterrà anche R. Dunque: *Due regoli coniugati rispetto a Φ stanno sempre in uno stesso complesso lineare* (6).

I complessi tetraedrali delle rette speciali e delle rette polari.

8. Diciamo *retta speciale* pel connesso Φ una retta, il cui complesso polare sia speciale. La direttrice di questo complesso si dirà

(6) Ciò corrisponde al fatto che in S_5 due piani polari rispetto ad un sistema nullo sono incidenti.

retta polare di quella; ed anche *retta polare* per Φ, *associata* alla retta speciale. Due tali rette associate saranno sempre incidenti.

Scrivendo che il complesso delle rette q, soddisfacenti la (2) per una data p, è un complesso speciale, si pone un'equazione quadratica per p. Dunque: *le rette speciali di Φ formano in generale un complesso quadratico* T. Lo stesso fatto si riconosce anche subito, osservando che un fascio di rette contiene in generale due rette i cui complessi polari sono speciali.

Per la corrispondenza lineare che si ha fra le rette e i loro complessi polari, ne deriva che *anche le rette polari per Φ formano un complesso quadratico* U.

Vedremo (n^0 15) che T e U sono, in generale, due complessi tetraedrali relativi allo stesso tetraedro.

9. Se a, b son due rette speciali, e a', b' le loro polari, il dire che a e b' sono incidenti equivale a dire che sono incidenti b e a': perchè ciascuno dei due fatti equivale all'essere a e b rette coniugate rispetto a Φ.

Ne deriva, ad esempio, prendendo a e b' in un piano fissato, che le due coniche-inviluppi di rette, di T e U, situate in uno stesso piano, hanno per associati rispettivamente in U e T i due regoli di una stessa quadrica; e dualmente. Ritorneremo poi (n^0 13) su questa quadrica.

10. Se un piano π è *totale* per Φ (n^0 6), ogni sua retta avrà come complesso lineare polare uno che contiene tutte le rette di π: e che perciò è speciale, colla retta direttrice giacente in π. Dunque ogni retta di π è retta speciale; e (se Φ non è singolare, e quindi la corrispondenza tra rette e complessi polari è biunivoca) ogni retta di π è retta polare. T e U contengono il piano rigato π. In esso la corrispondenza fra rette associate è una collineazione.

Dualmente, i *punti totali* per Φ son centri di stelle contenute in T ed U; ecc.

11. Sia p una retta speciale, p' la sua polare. Supposto che sian distinte, il loro punto comune P e il loro piano comune π si diranno punto e piano *associati* a p. La stella di rette P e il piano rigato π si compongon di rette coniugate della p: ciò caratterizza il legame fra P e p, fra π e p, quando si aggiunga la condizione d'incidenza tra gli elementi stessi.

Dato un piano π (che non sia totale), vediamo che cosa formano su esso le coppie di rette coniugate rispetto a Φ. Una retta generica a di π avrà per coniugate, entro π, le rette di un fascio col centro A su a: nel polo di π rispetto al complesso lineare polare di a. Similmente un'altra retta generica b di π dà un fascio di sue coniugate col centro B su b. La retta $AB \equiv p$ sarà coniugata di se stessa e di a, b: sicchè il suo complesso polare conterrà tutte le rette di π. Dunque p è retta speciale per Φ, e la sua polare p' sta su π; π è il suo piano associato.

La retta speciale associata ad un dato piano π (non totale) si potrà definire come quella che è coniugata a tutte le rette di π; ossia quella su cui s'incontrano le coppie di rette coniugate rispetto a Φ giacenti in π.

Ogni fascio di rette giacente in π e totale per Φ avrà il centro su quella retta.

12. Dualmente, se un punto P non è totale, gli sarà associata una ben determinata retta speciale, coniugata a tutte le rette uscenti da P. Con essa formeran fascio tutte le coppie di rette coniugate passanti per P.

Se un fascio di rette $A\alpha$ è contenuto in Φ, e nè il punto A, nè il piano α non son totali, il fascio contiene le due rette speciali che sono associate rispettivamente ad A e ad α: nè può contenerne altre. Perchè, se nel fascio sta la retta speciale p, associata ad un punto B diverso da A, il complesso polare di p, dovendo contenere la stella di rette B e inoltre quel fascio, sarà speciale, colla retta direttrice (polare di p) nel piano α del fascio: sicchè α sarà il piano associato a p.

13. Un punto P ed un piano π, associati di una stessa retta speciale p, si diranno fra loro *associati*. Sono, ripetiamolo, punto e piano comuni alla retta speciale p ed alla sua polare p'.

La corrispondenza, che indicherò con Ω, fra punto e piano associati è generalmente biunivoca (n[i] 11, 12). Essa si può esprimere in modo notevole, per mezzo dell'uno o l'altro dei complessi T e U.

A questo fine ritorniamo alla quadrica che s'era considerata al n[0] 9. Ivi s'è visto che le rette speciali giacenti in π han per polari le rette di un regolo ϱ'; e le rette di U situate in π son le polari delle rette speciali costituenti un altro regolo σ, sulla stessa quadrica. Fra le rette di σ sarà p; come fra quelle di ϱ' sarà p'. Ossia: le rette di ϱ' sono incidenti a p; e quelle di σ sono incidenti a p'.

Ciò significa che le rette speciali giacenti in π hanno i loro punti associati su p (il che seguiva pure dal n⁰ 11); e similmente le rette polari giacenti in π hanno i loro punti associati su p'.

Se dunque una retta speciale giacente in π varia tendendo a p, il suo punto d'incontro con p, essendo il suo punto associato, tende a diventare il punto associato P di p. P è dunque il punto di contatto di p colla conica di T giacente in π. Similmente si vede che P è il punto di contatto di p' colla conica di U giacente in π.

In altre parole: *Il fascio di rette determinato da una retta speciale* p *e dalla sua polare* p′, *ossia il fascio che ha per sostegni un punto e un piano, fra loro associati, è tangente in* p *e in* p′ *rispettivamente ai due complessi quadratici* T *e* U [7].

Su un dato piano il punto associato sarà uno dei 4 punti d'incontro delle coniche di T e U giacenti nel piano.

14. Fissati due punti distinti A, B, si considerino le coppie di rette a, b, coniugate rispetto a Φ, e passanti rispettivamente per A e B. Per ogni retta a di A le coniugate che passan per B sono nel piano polare di B rispetto al complesso polare di a rispetto a Φ. Se a descrive la stella A, questo complesso varia in generale in una rete projettiva a quella stella; e il piano polare di B rispetto ad esso descrive la stella B, corrispondendo ad a in una reciprocità fra le stelle A e B. Così le coppie a, b son di rette reciproche in questa reciprocità [8].

I punti P d'incontro di tali coppie di rette a, b avranno dunque come luogo una quadrica, passante per A, B: anzi, per la retta AB che è coniugata di se stessa. La quadrica passerà anche evidentemente per tutti i punti totali di Φ.

Dire che le due rette PA e PB son coniugate per Φ è come dire che il loro fascio è contenuto in Φ; e quindi (n⁰ 11) ha il suo centro P sulla retta speciale associata al suo piano (supposto non totale), che è un piano passante per la retta AB. La quadrica è dunque il luogo delle rette speciali associate ai piani passanti per la retta AB. *Le rette speciali associate ai piani di un fascio formano*

(7) Anche da ciò che s'è detto al n⁰ 12 intorno ad un fascio di rette contenuto in Φ, risultava in particolare che, se il fascio è quello di p e p', non conterrà altra retta speciale che p: ossia il fascio è tangente in p a T.

(8) La cosa segue anche subito dall'equazione di Φ in coordinate plückeriane.

una quadrica contenente l'asse del fascio e passante pei punti totali del connesso.

Dualmente: *le rette speciali associate ai punti di una retta formano una quadrica tangente ai piani totali del connesso.*

Al n^0 precedente si era già incontrata la quadrica (il regolo σ) luogo delle rette speciali associate ai punti di una retta, nel caso particolare che questa retta sia una polare (p', retta di U).

15. Possiamo ora riconoscere l'esistenza in generale di punti e piani totali.

Fissate tre rette $l\,m\,n$ di un piano, ma non di un fascio, le quadriche luoghi delle rette speciali associate ai piani per l, per m, per n, avranno in comune la retta speciale associata al piano $l\,m\,n$; e però si taglieranno ulteriormente, in generale, in 4 punti. Uno qualunque P di questi sarà tale che son totali per Φ i tre fasci di rette coi centri in P e i piani passanti rispettivamente per l, m, n. Questi piani non sono in un fascio. Dunque (n^0 12) P sarà un punto totale.

Il connesso Φ ha, in generale, 4 punti totali e 4 piani totali.

Si vede subito (dalla fine del n^0 11) che il piano di tre punti totali non allineati è piano totale.

Così se i 4 punti totali sono distinti e non complanari, i 4 piani totali son quelli che li congiungono a tre a tre.

Il tetraedro così ottenuto si dirà *tetraedro principale* del connesso. I suoi spigoli sono *rette speciali coincidenti colle rette polari associate.*

I complessi T e U, contenendo (n^0 10) 4 stelle di rette (o 4 piani rigati) saranno complessi tetraedrali collo stesso tetraedro singolare.

Rappresentazione canonica. Trattazione analitica.

16. Tratteremo ora analiticamente il caso (*regolare*) che i 4 punti totali del connesso, da noi trovati, sian distinti e non complanari. Prendendoli come punti fondamentali $A_1 \ldots A_4$ delle coordinate tetraedriche, otterremo pel connesso Φ un'equazione particolarmente semplice.

In fatti, due rette p, q uscenti da A_1 posson avere diverse da zero solo le coordinate p_{ik}, q_{ik} che contengono l'indice 1. L'equazione $\Phi = 0$ dev'essere soddisfatta comunque si prendan p, q uscenti da quel punto totale. Ne segue che son nulli i coefficienti dei termini in cui p e q compaiono insieme coll'indice 1. Poichè lo stesso vale per gli altri tre punti fondamentali, ossia per gli indici 2, 3, 4, concludiamo che mancheranno in Φ tutti i prodotti di una p e una q aventi in comune uno dei due indici; sussisteranno solo i termini del tipo $p_{ik}\, q_{lm}$, ove $i\,k\,l\,m$ è una permutazione di 1, 2, 3, 4. Siccome poi la forma Φ dev'essere alternata, concludiamo che si avrà la seguente *forma canonica*:

$$(5)\quad \Phi \equiv a(p_{12}\, q_{34} - p_{34}\, q_{12}) + b(p_{13}\, q_{42} - p_{42}\, q_{13}) + c(p_{14}\, q_{23} - p_{23}\, q_{14}) = 0.$$

Si vede che i connessi aventi uno stesso tetraedro principale formano una rete: che potremo chiamare *rete sizigetica.* Sono degeneri solo quelli per cui uno dei coefficienti a, b, c s'annulla: il che escluderemo, di regola.

17. La (5) mostra anche subito questo fatto essenziale: che *un connesso bilineare alternato di coppie di rette è mutato in sè, in generale, da tutte le* ∞^3 *collineazioni che han per punti uniti i suoi* 4 *punti totali; come pure dalle* ∞^3 *polarità ordinarie che han per tetraedro polare il tetraedro principale.* Così una di quelle collineazioni, $x_i = a_i\, x'_i$, produce, per le rette, la sostituzione: $p_{ik} = a_i\, a_k\, p'_{ik}$; sicchè, ponendo queste nella (5), Φ si altera solo pel fattore $a_1\, a_2\, a_3\, a_4$.

Facciamo un'applicazione di questo fatto. Siano P e π il punto e il piano associati ad una retta speciale p di Φ, ossia gli elementi comuni a questa e alla sua retta polare p'. Le collineazioni considerate muteranno $P\,\pi\,p\,p'$ in elementi, che conserveranno sempre le stesse relazioni col connesso Φ. Ne deriva di nuovo che le rette speciali e le rette polari costituiscono due complessi tetraedrali aventi lo stesso tetraedro singolare. Ma di più avremo ora che: *su una retta* p *speciale per* Φ *(od anche su una retta* p′ *polare per* Φ*) la figura costituita dalle sue intersezioni colle* 4 *facce* α_i *del tetraedro e dal punto* P *associato alla retta è projettiva ad una quintupla fissa di elementi di una forma di* 1ª *specie.* A questa stessa quintupla sarà projettiva quella dei 4 piani pA_i e del piano π associato alla retta speciale p (e così pure per una retta polare): in causa della polarità ordinaria, che muta in sè Φ, e che ha p per retta unita.

18. Sia p una retta *speciale*, p' la sua retta *polare*. Sarà per la (5):

$$(6)\quad \begin{cases} p'_{12} = a p_{12}\,, & p'_{13} = b p_{13}\,, & p'_{14} = c p_{14}\,, \\ p'_{34} = -\, a p_{34}\,, & p'_{42} = -\, b p_{42}\,, & p'_{23} = -\, c p_{23}\,. \end{cases}$$

Scrivendo che le coordinate di p' e p soddisfano la condizione quadratica fra le 6 coordinate di retta, abbiamo dalle (6):

$$a^2 p_{12} p_{34} + b^2 p_{13} p_{42} + c^2 p_{14} p_{23} = 0, \tag{7}$$

$$\frac{p'_{12} p'_{34}}{a^2} + \frac{p'_{13} p'_{42}}{b^2} + \frac{p'_{14} p'_{23}}{c^2} = 0. \tag{8}$$

Queste saranno le equazioni dei due complessi T e U, tetraedrali.

Le formole (6) pongono fra le rette dei due complessi una corrispondenza biunivoca, tale che due rette associate son sempre incidenti [9]. Esse mostrano che questa corrispondenza è, in certo senso, *lineare*: in quanto che fa corrispondere ad un fascio di rette, ad un regolo, ecc. ancora un fascio di rette, un regolo, ecc.

19. Le equazioni (7) e (8) si riducono alla relazione fra le coordinate di rette; ossia scompaiono i due complessi tetraedrali; *tutte* le rette dello spazio hanno dei complessi speciali come polari; solo quando

$$a^2 = b^2 = c^2. \tag{9}$$

In tal caso si verifica che le (6) esprimono il corrispondersi di p e p' nell'omologia armonica che ha per centro un vertice del tetraedro fondamentale e per piano d'omologia la faccia opposta. Effettivamente è chiaro che, se si fissa un'omologia armonica, e si accoppiano due rette quando l'una incontra l'omologa dell'altra nell'omologia, si ottiene un connesso bilineare alternato, pel quale *ogni* retta è speciale.

È questo anche il solo caso in cui la corrispondenza fra rette speciali e loro polari, data dalle (6), è involutoria.

Sono totali per questo connesso, oltre al centro e al piano d'omologia, tutti i punti di questo piano, e tutti i piani passanti pel centro.

20. Un caso più generale si presenta se si chiede che *i due complessi* T, U *coincidano*. In base alle (7) e (8) ciò significa che

(9) Con quelle formole si ritrova subito il fatto (n° 13) che il fascio determinato da due rette associate come p, p' è tangente in p a T e in p' a U.

esiston costanti non nulle λ, μ, ν tali che

$$\lambda a^2 + \frac{\mu}{a^2} + \nu = 0,$$

con le analoghe, che si ottengono mutando a in b e in c. Ossia: due delle tre quantità a^2, b^2, c^2 (non più tutte e tre, come nel n^0 preced.) sono uguali.

In tal caso però i complessi T, U si spezzano.

Sia, ad esempio, $b = c$ [10]. Quei complessi si spezzeranno nei due complessi lineari speciali ($p_{34} = 0, p_{12} = 0$) che hanno per direttrici le rette A_1A_2, A_3A_4.

Le formole (6) provano che una retta speciale e la sua polare son sempre in uno stesso di questi due complessi lineari. Se sono nel 1^0, ossia se incontrano A_1A_2, stanno con essa in uno stesso piano e la incontrano in due punti coniugati armonici rispetto ad A_1 e A_2. Invece se sono incidenti ad A_3A_4, la incontrano nello stesso punto e sono separate armonicamente dai due piani fondamentali α_1 e α_2 passanti per questa retta.

Si può anche caratterizzare questa specie particolare di connesso alternato così: *tutti i punti di una retta* (la A_3A_4) *sono punti totali;* ossia *tutti i piani di una retta* (la A_1A_2) *sono piani totali.*

In un piano generico il punto associato sarà la traccia della retta A_3A_4; mentre per un punto generico il piano associato è quello che lo unisce alla retta A_1A_2.

21. Ritornando al connesso alternato Φ generale, osserviamo che ad esso è collegato in modo essenziale l'altro connesso della stessa rete sizigetica

$$(10) \qquad \Psi \equiv \frac{1}{a}(p_{12}\,q_{34} - p_{34}\,q_{12}) + \frac{1}{b}(p_{13}\,q_{42} - p_{42}\,q_{13}) + \\ + \frac{1}{c}(p_{14}\,q_{23} - p_{23}\,q_{14}) = 0.$$

Passando dall'uno all'altro, le (6) mostrano che la corrispondenza da esse rappresentata si muta nell'inversa. *Le rette speciali dell'un connesso son le rette polari per l'altro, e viceversa.* I due complessi T

---

[10] Se fosse $b = -c$, si avrebbe solo da scambiare, in ciò che diremo, le due rette A_1A_2 e A_3A_4.

e U scambiano le loro funzioni, passando dall'un connesso all'altro: ma due rette di questi complessi associate rispetto all'un connesso sono pure associate rispetto all'altro.

La corrispondenza Ω fra punti e piani associati è la stessa per i due connessi.

22. Il punto P comune ad una retta speciale p e alla sua retta polare p', ossia quello che abbiamo chiamato il punto *associato* a ciascuna delle due rette, avrà coordinate x_i che si ottengono scrivendo le note condizioni d'incidenza fra punto e retta, e applicando le (6). Si trovan subito le seguenti relazioni:

$$(11) \qquad \begin{cases} p_{12} : p_{13} : p_{14} : p_{34} : p_{42} : p_{23} = \\ = (b + c)\, x_1 x_2 : (c + a)\, x_1 x_3 : (a + b)\, x_1 x_4 : \\ : (b - c)\, x_3 x_4 : (c - a)\, x_4 x_2 : (a - b)\, x_2 x_3 . \end{cases}$$

Dualmente il piano π delle rette p, p' (ossia l'*associato* di ognuna) avrà coordinate ξ_i tali che:

$$(12) \qquad \begin{cases} p_{12} : p_{13} : p_{14} : p_{34} : p_{42} : p_{23} = \\ = (b - c)\, \xi_3 \xi_4 : (c - a)\, \xi_4 \xi_2 : (a - b)\, \xi_2 \xi_3 : \\ : (b + c)\, \xi_1 \xi_2 : (c + a)\, \xi_1 \xi_3 : (a + b)\, \xi_1 \xi_4 . \end{cases}$$

Dato un punto P od un piano π, comunque, le (11) e (12) ne determinano la retta speciale associata p.

Il complesso tetraedrale T è da queste formole rappresentato *prospettivamente* sullo spazio di punti e su quello di piani [11].

Sia dato T; e inoltre una sua rappresentazione prospettiva sullo spazio punteggiato: fissata, in base al n^0 17, col segnare su ciascuna sua retta p il punto P che forma colle tracce di tre dei 4 piani

---

[11] Si tratta della rappresentazione ben nota, che si offre, quando T si genera congiungendo i punti omologhi P, P' di una collineazione: la rappresentazione delle rette PP' sui loro punti P. Invero i punti associati alle rette speciali di Φ si posson mettere in relazione, come punti P, con collineazioni che generino in quel modo T, valendosi di una proposizione del n^0 17. Su una retta p di T si sceglierà ad arbitrio il corrispondente punto P': che poi sarà individuato su ogni altra retta di T dalla projettività di cui si parla in quella proposizione.

α_i un birapporto dato. Risulterà con ciò determinato il connesso Φ, pel quale i punti P son quelli associati alle rette speciali p. In fatti, applicando la fine del n^0 17, si otterrà anche, per ogni retta speciale, il suo piano associato: il che, come vedremo (n^0 25), permette di costruire Φ.

Seguito. La corrispondenza birazionale cubica fra punti e piani.

23. Confrontando fra loro le (11) e (12), si hanno relazioni che equivalgono alle seguenti:

$$(13)\qquad \begin{cases} x_1\,\xi_1 : x_2\,\xi_2 : x_3\,\xi_3 : x_4\,\xi_4 = \\ = (b-c)(c-a)(a-b) : (b-c)(c+a)(a+b) : \\ : (b+c)(c-a)(a+b) : (b+c)(c+a)(a-b). \end{cases}$$

La nostra corrispondenza Ω fra punti e piani *associati* rientra dunque fra le *trasformazioni birazionali cubiche di punti in piani* del tipo semplice

$$(14)\qquad \xi_i = \frac{e_i}{x_i},$$

ove le e_i sono 4 costanti date ([12]). La corrispondenza attuale è caratterizzata fra esse da ciò: che queste costanti — che per essa sono i termini del secondo membro della (13) — hanno per somma zero. Scrivere che $\Sigma e_i = 0$ è, per le (14), come dire che si ha sempre: $\Sigma\, x_i\, \xi_i = 0$, ossia che *ogni punto sta nel piano omologo*: si tratta cioè di un *sistema nullo superiore.*

Ora, quando son date 4 costanti e_i di somma nulla, si posson sempre determinare tre quantità a, b, c, tali che quelle e_i sian proporzionali ai 4 termini che stan nel 2^0 membro della (13). In fatti, poichè già questi termini soddisfanno alla condizione di aver per

---

([12]) Che la corrispondenza Ω dovesse riuscire di 3^0 grado, era evidente già da prima. Se cioè un piano π descrive un fascio, la retta speciale associata p, e così la sua polare p', generano (n$^{\text{i}}$ 14 e 22) due quadriche, aventi in comune l'asse del fascio, e passanti inoltre pei 4 punti A_i: onde il punto pp', ossia P, associato di π, descrive una cubica passante per quei 4 punti. E dualmente.

somma zero, basterà che abbian luogo le proporzioni:

$$(b-c)(c+a)(a+b):(b+c)(c-a)(a+b):(b+c)(c+a)(a-b)=$$
$$=e_2:e_3:e_4.$$

Indicando con α, β, γ le somme e_3+e_4, e_4+e_2, e_2+e_3, si posson sostituire a quelle proporzioni queste altre, che si traggono da esse componendo:

$$a(b^2-c^2):b(c^2-a^2):c(a^2-b^2)=\alpha:\beta:\gamma.$$

E queste, a loro volta, equivalgono alle due relazioni

$$\alpha a+\beta b+\gamma c=0,$$

$$\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{\gamma}{c}=0;$$

dalle quali evidentemente si traggono pei rapporti di a, b, c due sistemi di valori: così che se una soluzione s'indica con (a, b, c), l'altra sarà $(1/a, 1/b, 1/c)$.

Concludiamo: *Una trasformazione birazionale cubica Ω di punti in piani*

$$x_i\,\xi_i=e_i\,, \qquad (i=1,\dots,4) \tag{15}$$

con incidenza degli elementi omologhi, ossia tale che $\Sigma\,e_i=0$, si può sempre riguardare come la corrispondenza fra punti e piani associati rispetto a due determinati connessi bilineari alternati di coppie di rette, associati l'un dell'altro. (Cfr. la fine del n^0 21).

24. La corrispondenza birazionale cubica Ω dei punti e piani associati si può definire geometricamente in modo semplicissimo, in base al n^0 17: analogamente a quel che ivi s'è fatto per la corrispondenza fra le rette speciali p e i loro punti associati P.

Si trae infatti dal n^0 17 che, al variare della coppia $P\pi$ di punto e piano associati, la figura composta dal tetraedro principale e da questa coppia rimane sempre projettiva a se stessa ([13]). Per conseguenza anche rimane projettiva a se stessa la figura piana che su π è data da P e dalle tracce delle quattro facce α_i. Si può dunque definire Ω così: *Son dati in un piano, in modo generico, un punto e quattro rette. Su ogni piano π dello spazio si assumerà come suo punto omologo* P *quello che, colle rette segnate su π dai quattro piani α_i, dà una figura collineare alla data figura piana.*

25. Data Ω, volendo costruire i due connessi bilineari alternati, pei quali (n⁰ 23) essa è la corrispondenza dei punti e piani associati, si potrà procedere nel seguente modo.

Su un piano μ, pel punto associato M, passano due coniche appartenenti (come inviluppi di rette) a complessi tetraedrali relativi al tetraedro dato. Sono le due coniche tangenti alle tracce su μ delle 4 facce α_i, e passanti per M. I due complessi tetraedrali, che così restan determinati, son quelli a cui è tangente il fascio di rette $M\mu$; e però (n⁰ 13) l'uno di essi sarà il complesso T delle rette speciali, e l'altro sarà quello U delle rette polari. Si può fissare ad arbitrio l'uno o l'altro dei due complessi come quello delle rette speciali; e così si avranno i due connessi, Φ e Ψ, associati l'un dell'altro secondo il n⁰ 23 citato.

Invero, si conoscerà ora, ad esempio per Φ, oltre che i due complessi T, U, anche il modo come si associano le loro rette: poichè di ogni retta p di T si avranno (pel n⁰ 17) il punto P e il piano π associati; donde poi si trae la retta polare p' (tangente in P alla conica di U che giace in π). Potremo quindi di una retta qualsiasi r trovare il complesso lineare polare rispetto a Φ. Basterà prendere, in un fascio di rette contenente r, le due rette del complesso T: rette speciali, i cui complessi polari avran per direttrici le rette polari associate ad esse. Nel fascio di complessi lineari determinato da questi si scelga quel complesso che passa per r: sarà il complesso polare di questa retta.

([13]) La cosa si estende ad una *qualsiasi* trasformazione birazionale di punti in piani del tipo (15), qualunque sian le costanti e_i: poichè *sempre* una tal trasformazione è mutata in sè da ogni omografia $x_i = a_i x'_i$, $a_i \xi_i = \xi'_i$. Ne deriva che anche la trasformazione generale (15) si può, come varietà ∞^3 di coppie $P\pi$ di punto e piano, definire in modo analogo al complesso tetraedrale. Questo è composto delle rette p, per cui la figura (*Wurf*) $A_1 A_2 A_3 A_4 p$ è projettiva ad una fissa. La varietà delle coppie $P\pi$ si compone, similmente, di quelle per cui la figura $A_1 A_2 A_3 A_4 P \pi$ si mantiene projettiva ad una fissa.

26. *Dati ad arbitrio due complessi tetraedrali distinti* T, U, *relativi allo stesso tetraedro, esiston sempre* 4 *connessi bilineari alternati* Φ *di coppie di rette, per ognun dei quali* T *è il complesso delle rette speciali e* U *quello delle rette polari.*

In fatti, se si prende un piano qualunque π, su esso il punto associato rispetto a Φ, cioè il trasformato nella Ω, sarà uno P dei 4 punti d'intersezione delle due coniche di T e U giacenti in π. Scelto P in uno dei 4 modi, la trasformazione Ω è individuata (n⁰ 24); e conoscendo già quale delle due coniche è inviluppo di rette speciali, resta individuato Φ (n⁰ preced.). Sono dunque 4 i connessi Φ.

Analiticamente, l'ipotesi è che sian dati due complessi tetraedrali

$$l\, p_{12} p_{34} + m\, p_{13} p_{42} + n\, p_{14} p_{23} = 0$$
$$l'\, p_{12} p_{34} + m'\, p_{13} p_{42} + n'\, p_{14} p_{23} = 0,$$

e si tratta di determinare a, b, c in modo che i complessi (7) e (8) coincidano rispettivamente con questi. Cioè devon anzitutto esistere delle ϱ, σ tali che

$$a^2 = \varrho\, l + \sigma, \quad b^2 = \varrho\, m + \sigma, \quad c^2 = \varrho\, n + \sigma,$$

il che equivale a scrivere:

$$(m - n)\, a^2 + (n - l)\, b^2 + (l - m)\, c^2 = 0\ ;$$

e poi similmente deve essere:

$$\frac{m' - n'}{a^2} + \frac{n' - l'}{b^2} + \frac{l' - m'}{c^2} = 0.$$

Da queste due equazioni si trae (se l, m, n son diseguali)

$$a^2 : b^2 : c^2 = \frac{m' - n'}{m - n} : \frac{n' - l'}{n - l} : \frac{l' - m'}{l - m}.$$

Si hanno dunque 4 soluzioni (a, b, c), diverse fra loro solo pei segni.

Sui regoli totali di un connesso.

27. Abbiam detto (n⁰ 6) *totale* un regolo pel connesso Φ, se tutte le sue coppie di rette son coniugate per Φ. Un tal regolo starà dunque nei complessi polari di tutte le sue rette.

Per due rette a, b non passa alcun regolo totale, se esse non son coniugate rispetto a Φ. Se invece esse son coniugate, i loro complessi polari si tagliano in una congruenza lineare (passante per a e b) di rette coniugate ad entrambe; sicchè ogni regolo contenuto in questa congruenza e passante per a e b (regoli di un *fascio*) sarà un regolo totale.

I regoli totali sono, in generale, ∞^6. *Se per due rette passa un regolo totale, ne passano* ∞^1 *che formano un fascio.*

28. Un regolo qualunque R contiene in generale 4 rette p del complesso quadratico T, ossia 4 rette speciali per Φ. Se R è regolo totale, i complessi speciali, polari di quelle rette rispetto a Φ, devon contenere R: sicchè le loro direttrici, ossia le rette p' del complesso U, associate a quelle p, staranno nel regolo R' incidente ad R.

Se passiamo al connesso Ψ associato a Φ, rispetto ad esso le 4 rette p' avranno per complessi polari quelli speciali le cui direttrici son le 4 rette p (n^0 21): onde le p' hanno per coniugate rispetto a Ψ tutte le rette di R'. Ne deriva che R' è regolo totale per Ψ. Ossia: *ai regoli totali di un connesso sono incidenti i regoli totali del connesso associato.*

29. Se il connesso Φ è regolare, ossia ammette la rappresentazione canonica (5), sono regoli totali suoi, e di tutta la rete sizigetica, i regoli totali comuni ai tre connessi:

$$p_{12}\,q_{34} - p_{34}\,q_{12} = 0\,, \quad p_{13}\,q_{42} - p_{42}\,q_{13} = 0\,, \quad p_{14}\,q_{23} - p_{23}\,q_{14} = 0\,.$$

È totale pel 1^0 di questi (v. la fine del n^0 5) ogni regolo che stia in un complesso del fascio costituito dai complessi lineari, rispetto a cui son polari le rette fondamentali A_1A_2, A_3A_4. Similmente pel 2^0 e 3^0 di quei connessi. Così i regoli totali che consideriamo sono gli ∞^3, ognun dei quali è intersezione di tre complessi lineari, aventi rispettivamente per polari le tre coppie di spigoli opposti del tetraedro principale. I sistemi nulli relativi a tali tre complessi sono a due a due involutori, ossia permutabili; il loro prodotto è la polarità rispetto alla quadrica che contiene il regolo comune ai tre complessi. Ne risulta che in questa polarità ogni spigolo del tetraedro ha per polare lo spigolo opposto: il tetraedro è polare rispetto alla quadrica.

Viceversa si vede subito che un regolo di una quadrica, la quale abbia il tetraedro principale per tetraedro polare, sta in un complesso lineare di ciascuno dei tre fasci.

Dunque: *Sono particolari regoli totali (e precisamente quelli che son comuni ai connessi della rete sizigetica) i regoli delle* ∞^3 *quadriche aventi per tetraedro polare il tetraedro principale.*

Ogni retta p sta in uno di questi regoli totali. I complessi polari di p rispetto ai connessi della rete sizigetica passano per questo regolo.

30. Possiamo ora determinare quale sia il complesso di regoli, costituito dai regoli totali di tutti gli ∞^2 connessi sizigetici.

Le coordinate delle rette di un dato regolo si posson esprimere come forme quadratiche di due parametri. Se le rette p, q del regolo rispondono ai valori $(u_1 u_2)$, $(v_1 v_2)$ di quei parametri, sostituendo quelle espressioni nella forma bilineare alternata $\Phi(p, q)$, che rappresenta un connesso, questa, dovendo annullarsi se $(u_1 u_2)$ coincide con $(v_1 v_2)$, riuscirà divisibile per $u_1 v_2 - u_2 v_1$; e, fatta la divisione, si ridurrà ad una forma bilineare $\varphi(u, v)$ delle u e v. Annullandola, si rappresenta, con questi parametri, l'involuzione che entro al regolo è costituita dalle coppie di rette coniugate rispetto a Φ.

Dire che la φ s'annulla *identicamente* equivarrà a dire che due rette *qualunque* del regolo son sempre coniugate, ossia che il regolo è totale.

Supponiamo ora che la detta sostituzione delle p e q in funzione delle u e v si faccia nella forma canonica di Φ:

$$\Phi(p, q) \equiv a(p_{12} q_{34} - p_{34} q_{12}) + b(p_{13} q_{42} - p_{42} q_{13}) + \\ + c(p_{14} q_{23} - p_{23} q_{14});$$

e, fatta la divisione per $u_1 v_2 - u_2 v_1$, rimanga:

$$\varphi(u, v) \equiv a\,\alpha(u, v) + b\,\beta(u, v) + c\,\gamma(u, v).$$

L'equazione $\alpha = 0$ rappresenterà (per ciò che s'è detto, applicato al connesso singolare $p_{12} q_{34} - p_{34} q_{12} = 0$) l'involuzione delle coppie di rette del regolo, situate rispettivamente nei complessi lineari del fascio che ha per direttrici le rette A_1A_2, A_3A_4. E così la $\beta = 0$ e la $\gamma = 0$ rappresenteranno le involuzioni segate sul regolo dai fasci di complessi lineari che han per direttrici A_1A_3, A_4A_2, e A_1A_4, A_2A_3. Dire che $\varphi(u, v) \equiv 0$, ossia che il regolo è totale per Φ, sarà come dire che si ha l'identità

$$a\,\alpha(u, v) + b\,\beta(u, v) + c\,\gamma(u, v) \equiv 0;$$

cioè che le tre involuzioni α, β, γ sono in un fascio, ossia hanno una coppia comune (il che costituisce una condizione semplice pel regolo). Ma una coppia comune alle involuzioni è, pel n^0 precedente, una coppia di generatrici di uno degli ∞^3 regoli che ivi avevamo considerato. Si tratta dunque di questo : che il nostro regolo ha comune una coppia di rette con uno di quegli ∞^3 regoli. In altre parole :

I regoli totali dei connessi bilineari alternati di una rete sizigetica costituiscono il complesso ∞^8 dei regoli giacenti su quelle quadriche, ognuna delle quali soddisfa alla condizione di segare secondo un quadrilatero una delle ∞^3 quadriche che hanno come tetraedro polare il tetraedro principale dei connessi.

31. Troveremo poi (n^0 36) l'equazione di quel complesso ∞^8 di regoli.

Ma prima di ricercare la rappresentazione analitica dei regoli totali di un connesso, converrà svolgere una considerazione più generale.

Sia l una *retta speciale per Φ coincidente colla propria retta polare*; come sono (n^0 15) i 6 spigoli del tetraedro principale. Se due rette p, q incidenti ad l son coniugate rispetto a Φ, ogni retta del fascio (lp) sarà coniugata ad ogni retta del fascio (lq): perchè è coniugata tanto a l quanto a q. In particolare ogni fascio di rette contenente l sarà un fascio totale per Φ.

Così, se ci limitiamo per ora a considerare le rette incidenti ad l (se cioè *seghiamo* il connesso Φ col complesso lineare speciale che ha l per direttrice), l'aggruppamento che Φ determina tra queste rette consiste in un *aggruppamento dei fasci di rette contenenti l.*

Diciamo $M\mu$, $N\nu$ due tali fasci di rette: ossia M e N i loro centri, su l; μ e ν i loro piani, passanti per l. Se si vuole che i due fasci sian coniugati fra loro rispetto a Φ, s'impone alle punteggiate descritte da M e N, ed ai fasci di piani descritti da μ e ν, una corrispondenza *quadrilineare.* In fatti si riconosce subito che, dati tre di quei 4 elementi, il quarto è individuato ([14]). La corrispondenza presenta questa particolarità : che ogni punto di l, contato

([14]) Anzi, si può vedere direttamente che, dati due dei 4 elementi, gli altri due si corrispondono in una projettività. Se son dati, ad esempio, M e μ, basta considerare il complesso polare, rispetto a Φ, di una retta del fascio $M\mu$. Se invece son dati M e N, oppure M e ν, si fissino (in modo generico) due fasci di rette, aventi per uno dei due sostegni, rispettivamente, M e N, oppure M e ν; e si considerino le rette coniugate rispetto a Φ, di cui l'una è nell'uno e l'altra nell'altro fascio.

due volte, con ogni piano per l, contato due volte, dànno sempre una quaterna di elementi corrispondenti. Inoltre essa è involutoria, nel senso che la coppia $M\,\mu$ si può scambiare colla coppia $N\,\nu$, senza che la quaterna cessi di appartenere alla quadrilinearità.

32. Da ciò si può trarre una definizione geometrica molto semplice della corrispondenza (15). Ma senza ricorrere ad altro, possiamo ottenere questa espressione servendoci dell'equazione canonica del connesso Φ. Come retta l assumiamo lo spigolo $A_1 A_2$ del tetraedro fondamentale. Una retta p lo incontri nel punto $M(1, r, 0, 0)$ e sia congiunta ad esso dal piano $\mu(0, 0, 1, \varrho)$; sicchè le sue coordinate p_{ik} saranno i determinanti di 2^0 ordine estratti dalla matrice

$$\left|\begin{matrix} 1 & r & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & \varrho & -1 \end{matrix}\right|.$$

Similmente la retta q incontri l nel punto $N(1, r', 0, 0)$ e stia nel piano ν $(0, 0, 1, \varrho')$; di modo che le sue coordinate q_{ik} sian date dalla matrice analoga alla precedente. Sostituendo queste p_{ik}, q_{ik} nell'equazione canonica di Φ, si ha come condizione perchè le rette p, q sian coniugate rispetto a Φ:

$$b(\varrho r' - r\varrho') + c(r\varrho - r'\varrho') = 0. \tag{16}$$

Ciò conferma che il legame fra le rette p e q si estende ai fasci che le congiungono alla l; e precisamente è una corrispondenza quadrilineare fra i punti M, N e i piani μ, ν determinati rispettivamente dai parametri r, r', ϱ, ϱ'.

Introduciamo il birapporto $(A_1 A_2 MN) = r/r'$ e l'analogo $(\alpha_3 \alpha_4 \mu\nu)$, ossia $\overline{A_1 A_2}(A_4 A_3 \mu\,\nu)$, che sarà $= \varrho/\varrho'$. L'equazione (16) si potrà scrivere:

$$\frac{\dfrac{\varrho}{\varrho'} - 1}{\dfrac{\varrho}{\varrho'} + 1} : \frac{\dfrac{r}{r'} - 1}{\dfrac{r}{r'} + 1} = \frac{b - c}{b + c}, \tag{17}$$

---

(15) V. i n^i 25 e 26 della mia Memoria: *Sulle corrispondenze quadrilineari tra forme di* 1^a *specie e su alcune loro rappresentazioni spaziali,* in corso di stampa nel vol. 29 degli Annali di Matematica, [V. questo vol., pp. 335-371].

o, più concisamente:

$$\frac{\tau}{t} = \frac{b - c}{b + c}, \tag{18}$$

se indichiamo con τ e t, rispettivamente, quelle funzioni dei birapporti ϱ/ϱ', r/r', che compaiono nel 1° membro della (17).

La (18) presenta nella forma più semplice il legame tra gli elementi $M N \mu \nu$. In essa t è un invariante della quaterna $A_1 A_2 M N$, e τ l'analogo invariante della quaterna $\alpha_3 \alpha_4 \mu \nu$.

33. Si abbia ora un regolo R, e si voglia esprimere che le due rette di R incidenti alla A_1A_2 son coniugate pel connesso Φ. Indicando con M, N i punti d'incontro di quelle rette con A_1A_2, e con μ, ν i piani che le congiungono a questo spigolo; e ponendo inoltre, come poc'anzi:

$$t = \frac{(A_1 A_2 M N) - 1}{(A_1 A_2 M N) + 1}, \tag{19}$$

$$\tau = \frac{(\alpha_3 \alpha_4 \mu \nu) - 1}{(\alpha_3 \alpha_4 \mu \nu) + 1}, \tag{20}$$

quel fatto sarà espresso da:

$$\left(\frac{\tau}{t}\right)_{12,\,34} = \frac{b - c}{b + c};$$

ove gl'indici che ora apponiamo al 1° membro servono a significare che t e τ si riferiscono allo spigolo $A_1A_2 (\equiv \alpha_3 \alpha_4)$; e che *l'ordine* in cui si prendono i vertici e le facce di questo spigolo [16] è quello che appare nelle (19), (20).

Scriviamo, con questa, le 5 formole analoghe, per dire che son coniugate rispetto a Φ le due rette del regolo R incidenti ad ognuno dei 6 spigoli del tetraedro. Avremo:

$$\left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\tau}{t}\right)_{12,\,34} = \frac{b - c}{b + c}, \qquad \left(\frac{\tau}{t}\right)_{34,\,12} = \frac{b + c}{b - c}, \\ &\left(\frac{\tau}{t}\right)_{13,\,42} = \frac{c - a}{c + a}, \qquad \left(\frac{\tau}{t}\right)_{42,\,13} = \frac{c + a}{c - a}, \\ &\left(\frac{\tau}{t}\right)_{14,\,23} = \frac{a - b}{a + b}, \qquad \left(\frac{\tau}{t}\right)_{23,\,14} = \frac{a + b}{a - b}. \end{aligned}\right. \tag{21}$$

---

[16] Quest'ordine è essenziale. Così:

$$\left(\frac{\tau}{t}\right)_{21,\,34} = -\left(\frac{\tau}{t}\right)_{12,\,34}$$

Ora il verificarsi di queste, ossia il fatto che sian coppie di rette coniugate rispetto a Φ le 6 coppie di rette del regolo R incidenti rispettivamente ai 6 spigoli del tetraedro principale, significa che R è un regolo totale per Φ (sempre che siano ben determinati i punti e i piani che occorrono nei primi membri di quelle formole: vale a dire i punti e i piani comuni agli spigoli del tetraedro e a rette di R). In fatti, se R non fosse regolo totale, quelle 6 coppie di rette coniugate dovrebbero appartenere ad un'involuzione di rette del regolo. Quindi una faccia del tetraedro non potrebbe segare R secondo una conica irriducibile: poichè su questa conica l'involuzione del regolo segnerebbe un'involuzione, di cui fan parte le coppie di punti che stanno sui tre spigoli giacenti in quella faccia; mentre queste tre rette non forman fascio. Dovrebbe dunque ogni faccia del tetraedro esser tangente alla quadrica di R; e dualmente questa quadrica dovrebbe passare pei 4 vertici del tetraedro. Tutto ciò esige che la quadrica passi per due spigoli opposti del tetraedro: sicchè non sarebbero più ben determinati i punti e i piani che occorrono nelle (21).

34. Le 6 equazioni (21) esprimono dunque le condizioni perchè il regolo R sia totale pel connesso Φ. Possiamo scriverle in altro modo, introducendo adesso le *coordinate del regolo* ([17]).

Sia cioè $\Sigma a_{ik}\, x_i\, x_k = 0$ l'equazione della quadrica di R, come luogo di punti ([18]); Δ il suo discriminante; A_{ik} il complemento algebrico di a_{ik} in Δ. Sullo spigolo $A_1 A_2$ i punti M, N d'incontro colla quadrica son dati da $x_3 = x_4 = 0$ e dall'equazione $a_{11}\, x_1^2 + 2\, a_{12}\, x_1\, x_2 + a_{22}\, x_2^2 = 0$; sicchè il birapporto che essi determinano con A_1, A_2 sarà:

$$(A_1\, A_2\, M\, N) = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}\, a_{22}}}{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}\, a_{22}}},$$

([17]) V. la Memoria: *Sulla geometria delle schiere rigate, o regoli, e in particolare sui complessi lineari di tali enti*, Ann. mat., (3) 27, 1918, pp. 151-181 [V. questo vol., pp. 264-294]. In essa è apparso opportuno assumere per coordinate omogenee (sovrabbondanti) di un regolo le 20 quantità A_{ik}, $a_{ik}\sqrt{\Delta}$: ove i simboli hanno i significati che ora definiremo, e pel radicale quadratico si assume un determinato valore (il valore opposto corrispondendo all'altro regolo della stessa quadrica).

([18]) Non avendo più da usare le a_{rs} pei coefficienti dell'equazione del connesso, non vi sarà equivoco col significato che ora diamo a quelle lettere.

onde, per la (19):

$$t = \frac{\sqrt{a_{12}^2 - a_{11}\, a_{22}}}{a_{12}}.$$

Analogamente i piani tangenti alla quadrica passanti per $A_1 A_2$ son dati da $A_{33}\, \xi_3^2 + 2\, A_{34}\, \xi_3\, \xi_4 + A_{44}\, \xi_4^2 = 0$, e il birapporto che essi determinano con α_3, α_4 sarà:

$$(\alpha_3\, \alpha_4\, \mu\, \nu) = \frac{A_{34} + \sqrt{A_{34}^2 - A_{33}\, A_{44}}}{A_{34} - \sqrt{A_{34}^2 - A_{33}\, A_{44}}},$$

sicchè, per la (20):

$$\tau = \frac{\sqrt{A_{34}^2 - A_{33}\, A_{44}}}{A_{34}} = \frac{\sqrt{\Delta}\, \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}\, a_{22}}}{A_{34}}.$$

In conseguenza risulta:

$$\left(\frac{\tau}{t}\right)_{12,\, 34} = \frac{a_{12}\sqrt{\Delta}}{A_{34}}. \tag{22}$$

Qui $\sqrt{\Delta}$ sarebbe suscettibile di due valori. Ma il valore del 1⁰ membro sarà univocamente determinato, e quindi anche il segno di quel radicale quadratico, se, fissato il regolo R della quadrica, intendiamo, come al n⁰ 33, che i piani μ, ν siano rispettivamente quelli che contengono le generatrici di R passanti pei punti M, N. Allora, a seconda che l'uno o l'altro dei due punti d'incontro della quadrica con lo spigolo $A_1 A_2$ si assume come M o N, t, dato dalla (19), è capace di due valori, fra loro opposti. Ma simultaneamente τ, dato da (20), prenderà l'uno o l'altro di due valori opposti: e così il rapporto τ/t risulta bene individuato.

Analogamente alla (22) potremo scrivere, per lo spigolo $A_i A_k$, indicando con $i\, k\, l\, m$ una permutazione dei 4 indici:

$$\left(\frac{\tau}{t}\right)_{ik,\, lm} = \frac{a_{ik}\sqrt{\Delta}}{A_{lm}}, \tag{23}$$

ove il 1⁰ membro avrà sempre un determinato valore; e quindi, *per ogni scelta* che si faccia di quella permutazione, anche $\sqrt{\Delta}$ sarà individuato.

Dico che, *se si pongono nella* (23) *per* i k l m *le permutazioni pari, si otterranno equazioni in cui* $\sqrt{\Delta}$ *avrà sempre lo stesso valore* (quello dunque che esso ha nella (22)); mentre alle permutazioni dispari corrisponderà l'altro valore di quel radicale.

In fatti, osserviamo (cfr. anche la ([16])) che uno scambio dei primi due indici, oppure degli ultimi due, muta il valore del 1^0 membro della (23) nell'opposto; e quindi fa lo stesso cambiamento nella quantità

$$[ik,\, lm] = \frac{A_{lm}}{a_{ik}} \left(\frac{\tau}{t}\right)_{ik,lm} = \sqrt{\Delta}\,. \tag{24}$$

Ora ciò avviene anche per lo scambio dei due indici intermedi. Se no, dovrebbe essere, in particolare:

$$[12,\,34] = [13,\,24], \quad [13,\,42] = [14,\,32], \quad [14,23] = [12,\,43],$$

mentre, per l'osservazione precedente:

$$[13,\,24] = -[13,\,42], \quad [14,\,32] = -[14,\,23], \quad [12,\,43] = -[12,\,34]\,.$$

Ne seguirebbe dunque $[12,\,34] = -[12,\,34]$; assurdo in generale.

Poichè si passa da una ad un'altra permutazione pari degl'indici mediante un numero pari di scambi di due indici successivi, resta dunque dimostrato che la quantità $[ik,\, lm]$, ossia $\sqrt{\Delta}$, ha lo stesso valore per tutte quelle permutazioni.

Di passaggio abbiamo così ottenuto, con le 6 formole compendiate nella (23) (ove *iklm* è una permutazione pari ([19]), e $\sqrt{\Delta}$ ha un valore ben determinato), una significazione geometrica per una parte dei rapporti fra le coordinate omogenee A_{ik}, $a_{ik}\sqrt{\Delta}$ di un regolo.

35. Dopo ciò, ritornando al n^0 33, potremo, grazie alle (23), trasformare le 6 condizioni (21) perchè un regolo sia totale pel connesso Φ in queste altre, in cui $\sqrt{\Delta}$ ha sempre uno stesso valore:

$$\left\{\begin{aligned}
a_{12}\sqrt{\Delta} &= \frac{b-c}{b+c} A_{34}\,, & a_{34}\sqrt{\Delta} &= \frac{b+c}{b-c} A_{12}\,,\\
a_{13}\sqrt{\Delta} &= \frac{c-a}{c+a} A_{42}\,, & a_{42}\sqrt{\Delta} &= \frac{c+a}{c-a} A_{13}\,,\\
a_{14}\sqrt{\Delta} &= \frac{a-b}{a+b} A_{23}\,, & a_{23}\sqrt{\Delta} &= \frac{a+b}{a-b} A_{14}\,.
\end{aligned}\right. \tag{25}$$

([19]) Abbiamo detto « 6 formole » e non 12, perchè due permutazioni come *iklm* e *kiml* danno, sostanzialmente, una stessa formola (23).

Queste sono equazioni lineari nelle coordinate di regolo: sono le equazioni di 6 *complessi lineari di regoli*, che si segano nel sistema ∞^6 dei regoli totali di Φ.

Se si mutano a, b, c nei loro reciproci, queste equazioni rimangono inalterate, purchè si cambi il segno a $\sqrt{\Delta}$. Ciò prova di nuovo (v. n° 28) che i regoli totali del connesso associato a Φ sono i regoli incidenti ai regoli totali di Φ.

36. Eliminando a, b, c tra le equazioni (25), otteniamo l'insieme dei regoli totali di tutti i connessi della rete sizigetica.

L'eliminazione si fa subito, moltiplicando membro a membro due equazioni di una stessa linea. Ma le tre equazioni che così si ottengono

$$a_{12}\sqrt{\Delta}\cdot a_{34}\sqrt{\Delta} = A_{12}A_{34}, \qquad a_{13}\sqrt{\Delta}\cdot a_{42}\sqrt{\Delta} = A_{13}A_{42}, \quad \text{ecc.},$$

sono fra loro identiche; perchè identicamente

$$A_{12}A_{34} - A_{13}A_{42} \equiv (a_{12}a_{34} - a_{13}a_{42})\,\Delta, \quad \text{ecc.}$$

Effettivamente dal n° 30 sappiamo che i regoli totali degli ∞^2 connessi sizigetici sono ∞^8; e quindi devon verificare una sola equazione. Come abbiam visto ivi, quei regoli stanno sulle quadriche, che si posson caratterizzare dicendo che segano secondo un quadrilatero una delle ∞^3 quadriche di cui è tetraedro polare il tetraedro principale. Il complesso di quelle quadriche si potrà dunque rappresentare coll'equazione:

$$a_{12}\,a_{34}\,\Delta = A_{12}A_{34}, \tag{26}$$

od altra analoga, che è equivalente.

Su alcune generazioni dei connèssi bilineari alternati.

37. *La generazione di un connesso alternato per mezzo di una omografia spaziale, di cui già s'è detto in principio* (n° 3), *produce un connesso alternato Φ generale.*

In fatti sia $x'_i = a_i x_i$ l'omografia. Essa e la sua inversa trasformano una retta qualunque p, di coordinate p_{ik}, nelle rette p' e p_1 di coordinate $a_i a_k p_{ik}$, $p_{ik}/(a_i a_k)$. Assunte p', p_1 come direttrici di due complessi lineari speciali, il complesso lineare del loro fascio, che passa per p, ha, nelle coordinate variabili q, per equazione:

$$\Sigma\, a_i a_k p_{ik} p_{lm} \cdot \Sigma \frac{1}{a_i a_k} p_{ik} q_{lm} = \Sigma \frac{1}{a_i a_k} p_{ik} p_{lm} \cdot \Sigma\, a_i\, a_k\, p_{ik}\, q_{lm}\,,$$

ove le somme, a 6 termini, si estendono alle solite sei permutazioni pari *iklm* degl'indici 1, 2, 3, 4. Moltiplicando per $a_1\, a_2\, a_3\, a_4$, e dividendo per $\Sigma a_i\, a_k\, p_{ik} p_{lm}$, rimane:

$$\Sigma a_l\, a_m\, p_{ik}\, q_{lm} = \Sigma\, a_i\, a_k\, p_{ik}\, q_{lm}\,.$$

Ossia, riunendo i termini in $p_{ik}\, q_{lm}$ con quelli in $p_{lm}\, q_{ik}$, scrivendo così una somma a tre soli termini:

$$\Sigma\,(a_i\, a_k - a_l\, a_m)\,(p_{ik}\, q_{lm} - p_{lm}\, q_{ik}) = 0. \tag{27}$$

Questa è dunque, nelle p e q, l'equazione del connesso costruito secondo il citato n⁰ 3, partendo dalla omografia $x_i' = a_i x_i$. Ora la (27) coincide coll'equazione canonica (5) di Φ, se

$$\frac{a_1 a_2 - a_3 a_4}{a} = \frac{a_1 a_3 - a_4 a_2}{b} = \frac{a_1 a_4 - a_2 a_3}{c}\,. \tag{28}$$

Dato Φ, cioè a, b, c, si posson sempre determinare in ∞^1 modi a_1, a_2, a_3, a_4, e quindi l'omografia, così da soddisfare queste condizioni.

38. Un connesso *singolare*, per esempio con $a = 0$, si otterrà quando $a_1 a_2 = a_3 a_4$: il che caratterizza quelle particolari omografie $x_i' = a_i x_i$ che mutano in sè ciascun complesso lineare avente $A_1 A_2$, $A_3 A_4$ come rette polari.

D'altra parte il connesso *generale* si potrà ottenere, scegliendo tra le ∞^1 omografie che servono a generarlo una di quelle degeneri: per esempio con $a_4 = 0$. Allora le (28) determinano i rapporti di a_1, a_2, a_3. L'omografia spaziale degenera in un'omografia tra una stella O e un piano ω. Le due rette p' e p_1, omologhe di una retta p generica dello spazio, sono l'omologa in O della traccia di p su ω, e l'omologa in ω del piano Op.

39. Con una reciprocità spaziale generale, rappresentata dalla equazione bilineare

$$\alpha y_1 x_2 + \beta y_2 x_1 + \gamma y_3 x_4 + \delta y_4 x_3 = 0, \tag{29}$$

facendo un calcolo analogo a quello fatto testè (n^0 37) per un'omografia, si trova il connesso bilineare alternato

$$(30) \qquad (\alpha\gamma - \beta\delta)(p_{13}\, q_{42} - p_{42}\, q_{13}) + (\beta\gamma - \alpha\delta)(p_{14}\, q_{23} - p_{23}\, q_{14}) = 0,$$

ossia un connesso *singolare*: non più quello generale. Accade cioè che, se di ogni retta p si prendon le omologhe p' e p_1 in una reciprocità e nell'inversa, il complesso lineare, che ha p' e p_1 per rette polari, e che contiene p, passa costantemente per due rette fisse: le diagonali del quadrilatero costituito dalle rette unite della reciprocità.

40. Una semplice costruzione del connesso Φ generale è suggerita dall'equazione canonica (5), che porta a considerare la rete sizigetica di connessi.

Si tratta di fissare il complesso polare di una retta assegnata p rispetto a Φ. Se si fa variare Φ entro la rete sizigetica, la (5) prova che quel complesso varia pure in una rete, projettivamente alla terna (a, b, c). Alle 4 terne $(1, \pm 1, \pm 1)$ rispondono 4 connessi particolari, considerati al n^0 19; pei quali i complessi polari di p sono i complessi lineari speciali aventi per direttrici le rette p_1, p_2, p_3, p_4 (di uno stesso regolo), corrispondenti a p nelle omologie armoniche che han per centri e per piani d'omologia le coppie (A_i, α_i) di elementi del tetraedro principale.

Possiamo considerare in un piano ausiliario i punti di coordinate omogenee (a, b, c); in particolare i quattro punti $(1, \pm 1, \pm 1)$. A questo piano risulta riferita projettivamente la rete sizigetica di connessi; ed anche la rete dei complessi polari di p. Quest'ultima poi è projettiva al sistema dei poli di un piano qualunque μ rispetto ai vari complessi. Fra essi, i poli del piano rispetto ai 4 complessi speciali che han per direttrici p_1, p_2, p_3, p_4, son le tracce di queste rette su μ.

Da tutto ciò tragghiamo la seguente costruzione.

Sia dato un tetraedro; e inoltre una figura di 5 punti in un piano (generici). Si costruisce un connesso bilineare alternato di coppie di rette, e precisamente di ogni retta p *si otterranno le sue coniugate giacenti in un piano qualsiasi* μ, *in questo modo. Si prendan le 4 tracce su* μ *delle rette che corrispondono a* p *nelle 4 omologie armoniche definite dai vertici del tetraedro colle facce opposte; e si segni su* μ *il punto* M, *che con quei 4 punti forma una figura collineare alla data figura piana di 5 punti. Le rette coniugate di* p *giacenti in* μ *saran quelle che passano per* M.

Sui connessi degeneri di 1ª specie.

41. Al n^0 5 avevamo fatto un cenno dei connessi singolari, o degeneri, di 1ª e di 2ª specie. Quelli di 2ª specie si son potuti determinare senz'altro. Resta che ci tratteniamo alquanto sui connessi singolari di 1ª specie.

Un tal connesso Φ ammette (n^0 5) due rette *singolari*, distinte o coincidenti, od anche un fascio di tali rette.

Ogni fascio di rette contenente una retta singolare è un fascio totale per Φ.

Siano m e n due distinte rette singolari, sghembe o no. Ogni regolo che le contiene sarà totale: perchè il complesso polare di ogni sua retta conterrà, oltre a questa, anche m ed n, e quindi tutto il regolo.

Se p e q son due rette coniugate rispetto a Φ, non situate in un regolo con m e n, la congruenza lineare passante per m e n, individuata da p e q, sarà totale per Φ. In fatti il complesso polare di p, o di q, contiene le 4 rette, e quindi tutta la congruenza: onde una retta qualunque di questa avrà il complesso polare passante ancora per m, n, p, q, cioè per la congruenza.

Di qui deriva che l'aggruppamento delle rette definito dal connesso Φ si può avere ricercando le congruenze totali passanti per m e n: rette coniugate per Φ saranno poi le rette che stanno in una stessa di quelle congruenze totali.

Il ragionamento precedente si applica anche se p e q sono incidenti. In conseguenza avremo che: ogni fascio di rette contenuto in Φ sta in una delle congruenze totali passanti per m e n.

42. Trattiamo prima il caso che m e n siano incidenti: vale a dire che Φ *ammetta un fascio di rette singolari.*

Siano O il centro, ω il piano di questo fascio. Le congruenze lineari totali, da determinare, avranno una direttrice s passante per O, ed una t giacente in ω. Dovremo dunque ricercare in che modo son legate s e t.

Fissata t, si conduca per essa un piano α diverso da ω. La traccia su α di una s è il centro per un fascio di rette di α; il quale, appartenendo alla congruenza totale (s, t), sarà un fascio totale per Φ. Viceversa se in α si prende un fascio di rette contenuto in Φ, esso sarà (fine del n^0 precedente) in una delle nostre congruenze: onde il suo centro sarà su una s relativa alla t fissata.

Ora i centri dei fasci totali per Φ giacenti in α han per luogo (n^0 11) una retta a: la retta speciale associata ad α. Dunque s sarà una qualunque retta del fascio che da O projetta a.

Le rette s e t di O e di ω son dunque legate, per modo che, data t, la s descrive un fascio; e dualmente, data s, la t descrive un fascio. Sono dunque s e t rette *reciproche* ([20]) in un'omografia tra la stella O e il piano ω.

Un connesso con un fascio di rette singolari Oω *definisce fra la stella* O *e il piano* ω *un'omografia; nella quale son reciproche due rette, quando sono incidenti a una stessa coppia di rette coniugate del connesso. Le rette del fascio* Oω *sono autoreciproche per l'omografia.*

L'ultima parte di quest'enunciato appare subito, se si prendon due rette coniugate del connesso, le quali siano incidenti ad una retta del fascio $O\omega$: in questa verranno a coincidere le s e t.

Viceversa, *data fra una stella* O *e un piano* ω, *i cui sostegni si appartengano, un'omografia, per la quale le rette comuni siano autoreciproche; resta determinato un connesso bilineare alternato, che accoppia due rette* p, q, *sempre quando le rette incidenti ad entrambe, rispettivamente della stella* O *e del piano* ω, *son reciproche per l'omografia.* In fatti, data p, le rette s di O e t di ω ad essa incidenti, che son reciproche per l'omografia, costituiscono due fasci projettivi, pei quali è retta unita la retta del fascio $O\omega$ che è comune ad essi. Onde le rette q, incidenti a tali s e t, generano un complesso lineare, passante per p. Questo complesso conterrà sempre, come subito si vede, il fascio di rette $O\omega$; il quale dunque si comporrà di rette singolari pel connesso.

Meritano una speciale considerazione la retta g della stella O, che nell'omografia corrisponde al punto O del sistema piano ω; e la retta h di ω, che nell'omografia corrisponde al piano ω della stella O. Si riconosce subito che ogni retta della stella è, rispetto al connesso, coniugata di ogni retta incidente a g: vale a dire ogni retta di O ha per complesso polare il complesso lineare speciale di cui g è direttrice; e dualmente per h. La h è luogo di punti totali pel connesso, g è inviluppo di piani totali.

43. Da ultimo esaminiamo quei *connessi degeneri di* 1^a *specie* Φ, *che hanno due sole rette singolari* m, n, *distinte e sghembe fra loro.*

([20]) Cioè rette tali che: s è nel piano della stella O, che corrisponde, per l'omografia, alla retta t di ω; ossia t passa pel punto di ω, che è omologo della s di O.

Si tratterà ancora, secondo il n⁰ 41, di determinarne le congruenze lineari totali passanti per m, n.

Indichiamo con M, M' due punti di m, e con N, N' due punti di n. Avremo da stabilire la natura dell'aggruppamento costituito da tutte le quaterne $M M' N N'$, tali che le rette $MN, M'N'$ sian le direttrici di una congruenza lineare totale.

A questo fine osserviamo che la condizione imposta a quelle quaterne di punti equivale (v. n⁰ 41) a quest'altra: che le rette MN', $M'N$ sian coniugate pel connesso Φ.

Ne deriva anzitutto che, dati 3 dei 4 punti, per esempio $M M' N$, il rimanente N' è individuato: come intersezione di n con quel piano, che contiene il fascio di raggi uscente da M del complesso lineare polare della retta $M'N$ rispetto a Φ. Adunque l'aggruppamento è una *quadrilinearità.*

Di più, si osservi che se M viene a coincidere con M', quel fascio di raggi che ora abbiam considerato diventa il fascio delle rette m e $M'N$: onde il suo piano sega n in N: N' cade in N. L'aggruppamento quadrilineare presenta dunque queste due particolarità: che sono sue quaterne tutte quelle composte di due punti coincidenti di m con due punti coincidenti di n; e che una sua quaterna rimane tale, scambiando fra loro i due punti di m e anche i due punti di n.

Da queste proprietà si deduce [21] che la corrispondenza quadrilineare ammette *in generale* due punti singolari A_1, A_2 in m; ognun dei quali, contato due volte come elemento di m, costituisce una coppia *neutra*; vale a dire dà con due elementi *qualunque* di n una quaterna della corrispondenza. E similmente, scambiate m e n, per due punti A_3, A_4 di n. E l'equazione della quadrilinearità prende la semplice forma

$$\frac{(A_1\, A_2\, M\, M') - 1}{(A_1\, A_2\, M\, M') + 1} = k\, \frac{(A_3\, A_4\, N\, N') - 1}{(A_3\, A_4\, N\, N') + 1}\,. \tag{31}$$

---

(21) Applicando, analogamente a quel che si accennava al n⁰ 32 per la quadrilinearità del n⁰ 31, i risultati citati colà nella (15). Si potrebbe anche ricorrere alla rappresentazione nota delle rette della congruenza lineare, che ha m, n come direttrici, sui punti di una quadrica. Il coniugio rispetto a Φ si trasporta nel coniugio dei punti della quadrica rispetto ad un sistema nullo; e si ritrova così la rappresentazione della nostra quadrilinearità, quale appunto è data nei n 25 e 26 della Memoria citata in (15).

44. I punti A_1, A_2, A_3, A_4, pel modo come si sono ottenuti, si riconoscono subito come punti totali per Φ: perchè (v. n° 12), ad esempio, nella stella A_1 son fasci di Φ tutti i fasci che contengon la retta singolare m (n° 41); e in più il fascio delle rette che da A_1 projettano i punti di n.

Ora l'esistenza, in generale, di 4 punti totali, s'era stabilita al n° 15 in modo che valeva anche pei connessi singolari. Anzi, assunti quei punti come fondamentali, il n° 16 ci dà anche l'equazione canonica di Φ: la quale, pel fatto che le rette A_1A_2 e A_3A_4 sono singolari (cioè col complesso polare indeterminato), non può contenere le p e q cogl'indici 12 o 34; e si riduce quindi a

$$\Phi \equiv b\,(p_{13}\,q_{42} - p_{42}\,q_{13}) + c\,(p_{14}\,q_{23} - p_{23}\,q_{14}) = 0. \tag{32}$$

Con questa si ottiene di nuovo la (31).

In fatti i punti della quaterna considerata al n° precedente abbian le coordinate $M(1, r, 0, 0)$, $M'(1, r', 0, 0)$, $N(0, 0, 1, \varrho)$, $N'(0, 0, 1, \varrho')$. Formiamo con queste le coordinate delle rette MN' e $M'N$, e poniamole al posto delle p_{ik}, q_{ik} nella (32). Viene:

$$b\,(r\varrho' - \varrho r') + c\,(r'\varrho' - r\varrho) = 0,$$

cioè precisamente la (16) del n° 32. Potremo dunque scriverla nella forma (17) di là; ossia, visto il significato attuale dei simboli,

$$\frac{(A_1\,A_2\,M\,M') - 1}{(A_1\,A_2\,M\,M') + 1} = \frac{b+c}{b-c}\,\frac{(A_3\,A_4\,N\,N') - 1}{(A_3\,A_4\,N\,N') + 1}, \tag{33}$$

che è nuovamente la (31).

Quest'equazione mette in evidenza la natura speciale dell'aggruppamento quadrilineare dei punti $M\,M'\,N\,N'$ di m e n. Dando il birapporto $(A_1\,A_2\,M\,M')$, si fissa anche l'altro $(A_3\,A_4\,N\,N')$, e viceversa. E se l'uno di essi vale $+1$, oppure -1, lo stesso sarà dell'altro. Dunque la quadrilinearità si ha, fissando tra le omografie della retta m aventi per punti uniti A_1 e A_2, e le omografie della n aventi A_3 e A_4 come punti uniti, una corrispondenza projettiva, nella quale all'identità corrisponda l'identità, all'involuzione l'involuzione [22].

---

[22] Cfr. loc. cit. in [15].

Il connesso singolare accoppia due rette, ogni volta che le trasversali comuni ad esse e alle rette fisse m, n segnano su queste rispettivamente delle coppie di punti MM', NN' legate nel detto modo.

Dalle ∞^3 coppie di direttrici MM', NN' delle congruenze totali considerate di Φ si traggono, congiungendone inversamente i punti d'appoggio su m, n, ∞^3 coppie di rette MN', $M'N$. Queste saran le coppie di direttrici per le analoghe congruenze lineari totali di un altro connesso singolare di 1ª specie, che si ottiene dalla (32) scambiando fra loro b e c.

45. Il caso di $b = \pm c$, che già avevamo considerato in generale al n⁰ 20, presenta una notevole semplicità nell'ipotesi attuale che il connesso sia singolare ($a = 0$).

Sia, ad esempio, $b = c$; sicchè, come in quel n⁰ 20, $n\,(\equiv A_3A_4)$ sarà luogo di punti totali, e i piani per $m\,(\equiv A_1A_2)$ saran piani totali.

L'equazione (33) della quadrilinearità si spezza nelle due:

$$(A_1\,A_2\,M\,M') = -1, \tag{34}$$

$$(A_3\,A_4\,N\,N') = 1. \tag{35}$$

La (35) si riferisce a quelle coppie di direttrici MN, $M'N'$, che s'appoggiano a n nello stesso punto N, ossia, stanno in uno stesso piano con m. La congruenza lineare, che le ha per direttrici, si spezza in una stella di centro N e un piano rigato (mN). Dunque non solo son coniugate per Φ due rette qualunque passanti per un punto di n, o due rette qualunque di un piano per m; ma anche son coniugate una retta incidente ad m con una retta incidente a n, ogni volta che il punto di queste ultime due sta nel piano delle prime due.

L'altra soluzione (34) dà quelle coppie di rette, che incontrano m in punti coniugati di una determinata involuzione (i cui punti doppi sono A_1 e A_2); comunque poi incontrino la n. Siccome le congruenze date dalla soluzione (35) hanno un fascio di direttrici col centro in n e il piano per m, ammettono esse pure una coppia di direttrici che incontra m in una coppia di punti di quell'involuzione. Basta dunque, per avere Φ, considerare le coppie di direttrici che verificano la (34).

Il connesso si può dunque definire semplicemente in questo modo. *Son date due rette sghembe* m, n *e sulla* m *un'involuzione. Son* *rette coniugate pel connesso (singolare, con* n *luogo di punti totali e* m *inviluppo di piani totali) due rette, ogni volta che le due trasversali comuni ad esse e a* m, n *segnano su* m *due punti coniugati nella data involuzione.*

Che in questo modo si definisca un connesso bilineare alternato (pel quale m, n son rette singolari) si vede subito geometricamente. Data una retta p, le sue coniugate q devono appoggiarsi su due rette del regolo incidente a $p\ m\ n$, le quali incontrino m in due punti coniugati dell'involuzione. Due tali rette, entro a quel regolo, formeranno a loro volta una coppia di una determinata involuzione; e le q, dovendo incontrare rette omologhe di questa, costituiranno un complesso lineare (contenente $p\ m\ n$).

Torino, Novembre 1919.