Corrado Segre

Un principio di riduzione nello studio delle corrispondenze algebriche

Rend. R. Acc. Naz. Lincei, Vol. **28** (1919), p. 308–312

in: Corrado Segre, Opere, a cura della Unione Matematica Italiana, Volume IV, Edizione Cremonese, Roma, 1963, p. 329–334

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Segre_CW_4_329>

LXXVI.

UN PRINCIPIO DI RIDUZIONE NELLO STUDIO DELLE CORRISPONDENZE ALGEBRICHE

«Atti della Reale Accademia dei Lincei»,
Rendiconti; Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali,
serie quinta, vol. XXVIII, 1919 - 2º semestre, pp. 308-312.

1. Il principio di cui intendo far cenno è già stato usato in qualche caso particolare; e si presenta oltremodo spontaneo.

Per maggior chiarezza esporrò anzitutto alcuni esempî.

Si abbia una corrispondenza (2, 2) fra due campi binari, rappresentata da un'equazione $f(x\,;y)=0$, omogenea e quadratica tanto nella coppia di variabili $x_1\,x_2$, quanto nelle $y_1\,y_2$. Ponendo

$$X_0 = x_1^2\,,\quad X_1 = x_1\,x_2\,,\quad X_2 = x_2^2\,, \tag{1}$$

$$Y_0 = y_1^2\,,\quad Y_1 = y_1\,y_2\,,\quad Y_2 = y_2^2\,, \tag{2}$$

quell'equazione si ridurrà ad un'equazione *bilineare* $F(X\,;Y)=0$ tra le X_i e le Y_k. D'altra parte, assumendo queste due terne di quantità come coordinate di punti su due piani (distinti o no), le (1) e (2) servono a rappresentare i due campi binari sui punti X, Y di due coniche. La $F=0$ pone una reciprocità fra i piani di queste curve. E la data corrispondenza (2, 2) risulta rappresentata da quella che intercede fra quei punti delle due coniche, i quali son reciproci in quella reciprocità.

Così l'ente «corrispondenza (2, 2) fra campi binari» si muta in quest'altro: «reciprocità fra due piani, su cui son fissate due coniche» (1).

(1) Dal nº 6 risulterà anche, nel caso ordinario, la rappresentazione col sistema di due coniche di un piano.

Ciò porta subito a considerare, per esempio, il discriminante della reciprocità. Esso sarà un invariante della corrispondenza (2, 2). Il suo annullarsi significa che la reciprocità degenera in una projettività tra due fasci di rette. Ora questi fasci segano, rispettivamente, sulle due coniche, due involuzioni. La corrispondenza (2, 2) si riduce dunque, se quell'invariante è zero, a una projettività fra due involuzioni dei due campi binari ([2]).

2. Si tratti ora di studiare le corrispondenze trilineari fra due forme di 1ª specie ed una forma S, che possiamo supporre di 1ª, od anche di 2ª, 3ª, ... specie. Se nelle prime due forme le coordinate omogenee sono $x_1\, x_2$ e $y_1\, y_2$, esse compaiono nell'equazione trilineare per mezzo dei monomii

$$(3) \qquad X_1 = x_1\, y_1\,, \quad X_2 = x_2\, y_2\,, \quad X_3 = x_1\, y_2\,, \quad X_4 = x_2\, y_1\,.$$

Perciò l'equazione si riduce a forma *bilineare* nelle X_i e nelle coordinate dell'elemento z di S.

Per le (3), si posson riguardare le X_i come coordinate di un punto su una quadrica fissa Q: quadrica che rappresenta coi suoi punti le coppie di elementi delle prime due forme geometriche (essendo queste forme riferite ai due regoli di Q, ecc.). L'equazione data si è ridotta, nelle variabili X_i, all'equazione di un piano, dipendente linearmente da z: e quindi variabile in un fascio, o in una stella, o in tutto lo spazio. A questo sistema lineare di piani è riferita la forma S. Le terne della trilinearità son figurate da punti di Q, presi con piani passanti per essi del fascio, stella o spazio.

Si riconoscon subito su questa rappresentazione tutte le proprietà note della corrispondenza trilineare tra forme di 1ª specie. Così le coppie neutre delle prime due forme son date dai punti di Q situati sull'asse del fascio di piani; ecc. ecc.

3. Similmente una corrispondenza quadrilineare tra 4 forme di 1ª specie, di elementi $x\ y\ z\ t$, ha un'equazione che, poste le (3) e le analoghe

$$(4) \qquad Y_1 = z_1\, t_1\,, \quad Y_2 = z_2\, t_2\,, \quad Y_3 = z_1\, t_2\,, \quad Y_4 = z_2\, t_1\,,$$

si riduce ad un'equazione *bilineare* fra X e Y. Si ha dunque una reciprocità fra gli spazî delle due quadriche Q, Q', luoghi dei punti

([2]) Cfr. A. CAPELLI, *Sopra la corrispondenza* (2, 2) ecc., Giornale di matem., 17, 1879, p. 69. Alla p. 95 si trova il suddetto invariante.

X, Y; e le quaterne della corrispondenza quadrilineare son rappresentate dalle coppie di punti di Q, Q' reciproci in quella reciprocità.

Questa rappresentazione (con un'altra che ne deriva, analoga a quella del n^0 6) si trova svolta ed applicata in una mia Memoria, in corso di stampa negli Annali di Matematica, *Sulle corrispondenze quadrilineari tra forme di 1^a specie*, ecc. [*].

4. Generalizziamo alquanto la rappresentazione del n^0 1.

Si abbia cioè fra i due campi binari una corrispondenza (m, n) di gradi qualunque. Si tradurrà in un'equazione $f(x\,;y)=0$, che si può porre sotto forma d'una relazione bilineare $F(X\,;Y)=0$ tra le due serie di quantità

$$X_i = x_1^{m-i}\, x_2^{\,i} \qquad (i=0\,,1\,,\dots\,,m), \tag{5}$$

$$Y_k = y_1^{n-k}\, y_2^{k} \qquad (k=0\,,1\,,\dots\,,n). \tag{6}$$

Possiamo considerare queste come le coordinate dei punti di due curve razionali normali, C^m di S_m, C^n di S_n. L'equazione $F=0$ pone, fra i due spazi S_m, S_n una *reciprocità*, nel senso più generale della parola: ossia una corrispondenza, che è una reciprocità ordinaria, se $m=n$; mentre se, ad esempio $m>n$, essa equivale ad un'ordinaria reciprocità fra S_n e la forma fondamentale di specie n costituita dagli spazi che, entro S_m, passano per un $[m-n-1]$.

La corrispondenza (m, n) è rappresentata da quella che ha luogo fra punti X, Y di C^m, C^n, i quali son *reciproci* nella F: cioè tali, anche se $m>n$, che X sta nell'iperpiano di S_m corrispondente ad Y nella reciprocità.

Si abbracciano tutti i casi possibili, anche di reciprocità degeneri, ammettendo l'esistenza in S_m, S_n, rispettivamente, di due spazi *singolari* $[m-r-1]$, $[n-r-1]$, per la reciprocità F: sicchè questa si riduce ad un'ordinaria reciprocità, non degenere, tra le forme fondamentali composte degli spazi passanti per quei due. Allora, projettando da quegli spazi singolari, e segando con due S_r di S_m, S_n, avremo in questi S_r due curve razionali (in generale d'ordini m, n), e fra gli spazi stessi una reciprocità non degenere, la quale servirà a definire fra i punti delle due curve la corrispondenza (m, n).

[*] V. questo volume, pp. 335-371.

5. Il numero r, ora introdotto, si ottiene dalla data corrispondenza nel seguente modo. Posto

$$f(x\,;y) \equiv \Sigma\, a_{ik}\, x_1^i\, x_2^{m-i}\, y_1^k\, y_2^{n-k}\ ,$$

$r+1$ indica il rango, o caratteristica, della matrice $|\,a_{ik}\,|$. Le forme d'ordine m delle x, che in f moltiplicano i singoli monomi nelle y, saranno combinazioni lineari di $r+1$ forme, e non meno; e così pure le analoghe forme d'ordine n delle y. Ciò equivale a dire che f si può rappresentare come somma di $r+1$ prodotti (e non meno) di una forma delle x per una forma delle y:

$$f(x\,;y) \equiv \varphi_0(x)\,\psi_0(y) + \ldots + \varphi_r(x)\,\psi_r(y). \tag{7}$$

La corrispondenza (m, n) associa, ai singoli elementi di un campo binario, ∞^1 gruppi G_m o G_n dell'altro campo: i quali staranno precisamente in un'involuzione ∞^r, g_m^r o g_n^r, e non in una di dimensione minore di r. È questo un significato geometrico del carattere r della corrispondenza.

Se ora assumiamo

$$X_l = \varphi_l(x)\,, \quad Y_l = \psi_l(y) \quad (l = 0, 1, \ldots, r), \tag{8}$$

i punti X, Y descriveranno in due S_r due curve razionali (eventualmente multiple) di ordini m, n (supposto che la f non sia divisibile per una forma delle sole x, nè per una delle y). La nostra corrispondenza $f(x, y) = 0$ sarà, per la (7), rappresentata su quelle curve dalla relazione

$$\Sigma\, X_l\, Y_l = 0\ , \tag{9}$$

che pone fra i due S_r una reciprocità non degenere: come s'era ottenuto alla fine del n^0 4.

6. Ma potremo anche trarre dalle ultime formole un'altra rappresentazione.

Interpretiamo cioè le X_l come coordinate di punto, e le Y_l come coordinate d'iperpiano, in uno stesso S_r, rispetto ad uno stesso sistema di riferimento; sicchè la (9) sarà la condizione d'incidenza del punto X e dell'iperpiano Y. Allora, per le (8), X descrive una curva razionale C^m d'ordine m, *immersa* in S_r; e l'iperpiano Y una ∞^1 razionale d'iperpiani Γ, di classe n, non conica, e però costituita dagl'iperpiani osculatori di una curva razionale immersa in S_r. Su queste due varietà, C e Γ, son rappresentati i due campi binari (x), (y), fra cui si aveva la corrispondenza (m, n). E la corrispondenza stessa diventa quella che intercede fra punti di C^m e iperpiani di Γ^n che si appartengono.

Se la medesima corrispondenza (m, n) viene rappresentata nello stesso modo con un'altra curva-luogo C_1^m e una inviluppo Γ_1^n, di un S_r, esisterà una collineazione fra i due S_r, che muta simultaneamente C e Γ in C_1 e Γ_1. In fatti, essendo il campo binario (x) riferito tanto a C quanto a C_1, e così il campo (y) a Γ e a Γ_1, si ha tra C e C_1 una corrispondenza biunivoca tale (per l'ipotesi) che ai gruppi G_m, segati su C dagli iperpiani di Γ, rispondono i gruppi G_m segati su C_1 dagli iperpiani di Γ_1. Per conseguenza, alla g_m^r di C, che congiunge tutti i primi G_m (n^0 5), corrisponde la G_m^r di C_1 che congiunge i G_m considerati di questa. Ossia: alle sezioni iperpiane di C rispondono le sezioni iperpiane di C_1; la corrispondenza biunivoca fra i punti di C e C_1 è contenuta in una collineazione, la quale evidentemente farà anche corrispondere tra loro Γ e Γ_1.

Da quest'osservazione deriva facilmente che: la geometria projettiva (teoria invariantiva) delle corrispondenze (m, n) fra due campi binari distinti (cioè soggetti a sostituzioni lineari indipendenti) equivale alla geometria projettiva di due curve razionali, l'una d'ordine m, l'altra di classe n, di uno stesso spazio S_r: ove r è quello dei due numeri m, n che non supera l'altro; o, più in generale, $r+1$ indica il rango della matrice dei coefficienti delle corrispondenze; ossia r è la dimensione della serie lineare (involuzione) che congiunge i gruppi di elementi dell'un campo binario corrispondenti ai singoli elementi dell'altro campo [3].

7. Infine passiamo al caso più generale: che si abbia una corrispondenza (o connesso) fra due o più campi, di qualsiansi dimen-

---

(3) La rappresentazione ora considerata (n^0 6), e quest'ultimo teorema, sono stati enunciati — sotto una forma che qui si è completata — da G. Kohn, *Ueber eine geometrische Deutung der Invarianten doppelt binären Formen*, Jahresber. der deutschen. Math. — Vereinigung, 5, 1896, p. 58 (Cfr. anche l'applicazione alle corrispondenze (3, 3) e cubiche sghembe in Math. Ann., LII, 1899, p. 293).

Come verifica dell'ultimo teorema, si può notare che il numero degl'invarianti assoluti indipendenti delle corrispondenze (m, n) di carattere r è uguale a quello degl'invarianti assoluti che ha, entro S_r, il sistema di due curve razionali, una d'ordine m, l'altra di classe n. Ambi i numeri valgono $(r+1)(m+n) - r^2 - 6$.

sioni, rappresentata da un'equazione algebrica

$$f(x_1\, x_2 \dots ;\, y_1\, y_2 \dots ;\, z_1\, z_2 \dots ;\, \dots) = 0 \tag{10}$$

dei gradi $m, n, p \dots$ rispettivamente nei diversi gruppi di coordinate omogenee.

Si potrà allora ricorrere alla varietà, i cui punti han per coordinate i varî monomi di grado m nelle x; e alle analoghe per le $y, z, \dots$ Con ciò la (10) si ridurrà ad un'equazione plurilineare fra i punti di quelle varietà, e quindi ad una corrispondenza plurilineare tra i loro spazi. — Oppure si prenderanno insieme due o più elementi $x, y, \dots$ considerando la varietà dei punti le cui coordinate si esprimono colle forme di grado m nelle x e di grado n nelle $y, \dots$; e similmente la varietà rappresentata in modo analogo coi rimanenti elementi, o con una parte di essi; proseguendo ulteriormente, se ancora rimangono elementi. Si otterrà così dalla (10) una relazione bilineare; od anche plurilineare, ma fra un numero di campi ristretto quanto si vuole. La teoria delle reciprocità, e, in genere, delle corrispondenze plurilineari, troverà applicazioni. *Si verrà a fare una specie di riduzione: delle corrispondenze, di gradi qualunque, fra un certo numero di campi, in corrispondenze* **plurilineari**, *fra un numero di campi minore od uguale a quello.*

Così, in particolare, le corrispondenze plurilineari si ridurranno a corrispondenze plurilineari fra un minor numero di campi, introducendo le note varietà che rappresentano le coppie, terne, ... di punti di due, tre ... spazî.

8. Vi saranno da considerare dei caratteri come la r del n⁰ 5. Si scindano cioè, comunque, gli spazî tra cui si ha la corrispondenza, in due gruppi. I punti di un gruppo siano $x, y \dots$; quelli dell'altro $t, u \dots$ Un carattere del connesso sarà il minimo numero r tale che f si possa scrivere come somma di $r + 1$ prodotti di una forma delle coordinate $x, y \dots$ per una forma delle $t, u, \dots$ Similmente, spezzando i campi in 3, o più gruppi. Il significato geometrico di questi caratteri è analogo a quello indicato al n⁰ 5, pel caso che là si considerava.

Se si fa la riduzione ad un legame *bilineare*, si può anche, come al n⁰ 6 o come nella mia Memoria citata al n⁰ 3, dare a quel legame il significato di *incidenza* fra punti e iperpiani di un S_r. Così si otterranno rappresentazioni della corrispondenza (10) simili a quelle ora citate per le corrispondenze (m, n), e per quelle quadrilineari, fra campi binari.