Corrado Segre

Sulle corrispondenze quadrilineari tra forme di 1.a specie e su alcune loro rappresentazioni spaziali

Annali Mat. pura ed applicata, Vol. **29** (1920), p. 105–140

in: Corrado Segre, Opere, a cura della Unione Matematica Italiana, Volume IV, Edizione Cremonese, Roma, 1963, p. 335–371

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Segre_CW_4_335>

LXXVII.

SULLE CORRISPONDENZE QUADRILINEARI TRA FORME DI 1ª SPECIE E SU ALCUNE LORO RAPPRESENTAZIONI SPAZIALI

« Annali di matematica pura ed applicata »,
serie III, tomo XXIX, 1920, pp. 105-140.

Le corrispondenze quadrilineari tra forme di 1ª specie furon già considerate ripetutamente. Mi limiterò a ricordare, perchè solo ad esse dovremo riferirci, una Nota di C. LE PAIGE (1) e la Memoria di R. DE PAOLIS sulle corrispondenze plurilineari in generale (2). Nessuno però, ch'io sappia, ha rilevato le particolarità che può presentare una corrispondenza quadrilineare, pel fatto che le omografie tra due dei quattro campi binari, da essa associate alle varie coppie di elementi degli altri due campi, possono esser legate linearmente fra loro, cioè stare in una rete fissa, od in un fascio, ecc. Si ha in ciò un primo criterio razionale di classificazione per le quadrilinearità. D'altra parte uno strumento nuovo, se non sbaglio, del presente lavoro, consiste nel riferire i campi fra cui si han le corrispondenze quadrilineari ai sistemi di generatrici di due quadriche, distinte o sovrapposte (3). Ne derivano dei notevoli legami fra quelle corrispondenze e le quadriche. Basti, come esempio, citare il fatto che, con solo una riserva di generalità, lo studio delle quadrilinearità viene

---

(1) *Sur la forme quadrilinéaire,* Atti Acc. Torino, 17, 1881-82, p. 299.

(2) *Le corrispondenze projettive nelle forme geometriche fondamentali di 1ª specie,* Mem. Acc. Torino, (2) 42, 1892, p. 495.

(3) Si tratta di un concetto generale, che può servire sempre nello studio delle corrispondenze plurilineari, od anche di ordini qualunque, fra più campi razionali. Veggasi una mia Nota di prossima pubblicazione nei Rend. della R. Accad. dei Lincei [V. questo volume, pp. **329-334**].

ad equivalere a quello del sistema di due quadriche. Ciò fornisce un metodo elegante, sì per studiare le corrispondenze quadrilineari, che per classificarle. Ma non intendo qui dare esplicitamente una classificazione completa, che sarebbe cosa troppo lunga e minuziosa. Certo è che essa si può dire contenuta implicitamente in quel che verrà esposto.

Prime nozioni sulle quadrilinearità.

1. Una *corrispondenza quadrilineare*, o, più brevemente, una *quadrilinearità*, tra 4 campi razionali ∞^1 (per esempio, forme fondamentali di 1ª specie), ossia fra 4 campi binari $C_1\ C_2\ C_3\ C_4$, è definita da un'equazione algebrica

$$(1) \qquad f(x;\ y;\ z;\ u) = 0$$

lineare in ciascuna delle coordinate non omogenee $x\ y\ z\ u$ degli elementi appartenenti rispettivamente ai 4 campi; o lineare ed omogenea rispetto ad ognuna delle coppie $x_1\ x_2$, $y_1\ y_2$, $z_1\ z_2$, $u_1\ u_2$ di coordinate omogenee degli elementi stessi.

Essa raggruppa gli elementi dei 4 campi in ∞^3 *quaterne*.

Dati tre elementi *generici*, rispettivamente in tre campi, è individuato dalla (1) l'elemento residuo della quaterna che contiene i primi tre. — Così, fissati due elementi *generici* rispettivamente in due campi, la (1) determina una corrispondenza bilineare, ossia una projettività fra i due campi rimanenti: la quale accoppia due elementi di questi che, coi due elementi che s'eran fissati, forman quaterna della quadrilinearità. Indicheremo con $\mathcal{P}_{ik}$ le projettività che così nascono fra i campi C_i, C_k: *projettività residue* delle coppie di elementi degli altri due campi (4). — Infine, se si dà un elemento *generico* in uno dei 4 campi, si hanno come suoi resti, per la (1), le terne di una corrispondenza trilineare, o trilinearità, fra i tre campi rimanenti.

2. La locuzione *generici* che abbiamo scritto in corsivo negli ultimi enunciati, allude al caso eccezionale che la terna di elementi,

(4) Non faremo distinzione tra $\mathcal{P}_{ik}$ e $\mathcal{P}_{ki}$: considereremo cioè una sola corrispondenza fra gli elementi dell'insieme $C_i + C_k$.

o la coppia, o l'elemento singolo, dei dati campi, che ivi si supponeva di fissare nella quadrilinearità, rendano la (1) soddisfatta *identicamente*: qualunque sia l'elemento, o la coppia, o la terna, che si assumono come resti.

In tal caso eccezionale si suol dire che la terna fissata, o la coppia, o il singolo elemento, sono *neutri* per la quadrilinearità. Il De Paolis li diceva *apolari*: perchè svanisce quella corrispondenza tra i residui elementi, che egli chiamava *polare* dei dati.

Terne neutre esiston sempre, per tre qualunque dei 4 campi (v. il n^0 3). Esse si presentano anche in quest'altro modo. Se gli elementi x y z di C_1 C_2 C_3 formano terna neutra, la projettività $\mathcal{P}_{34}$ dei resti di x y ha z come elemento *singolare* in C_3; ossia z è tale che il suo omologo in C_4, per quella projettività, è indeterminato. Di passaggio, ne deriva che la coppia $x\,y$ di C_1 C_2 forma terna neutra anche con un elemento u di C_4 (l'altro elemento singolare della $\mathcal{P}_{34}$: la quale sarà *degenere*, o *singolare*; cioè rappresentata da una forma bilineare prodotto di due forme lineari).

3. Sia, mettendo in evidenza gli elementi z, u:

$$f \equiv Az_1u_1 + Bz_2u_1 + Cz_1u_2 + Dz_2u_2\,, \tag{2}$$

ove A B C D saran forme bilineari di x_1 x_2, y_1 y_2. Una terna x y z sarà neutra se

$$Az_1 + Bz_2 = 0\,, \qquad Cz_1 + Dz_2 = 0, \tag{3}$$

donde:

$$AD - BC = 0. \tag{4}$$

Quest'equazione rappresenta una corrispondenza (2, 2) fra gli elementi x, y dei campi C_1, C_2: la quale accoppia due di essi nel caso della fine del n^0 2, ossia quando la loro $\mathcal{P}_{34}$ residua è degenere.

Le ∞^1 terne neutre di C_1 C_2 C_3, ad esempio, contengono le coppie di elementi di due qualunque di questi due campi, associati in una corrispondenza (2, 2).

Fra i 4 campi dati, combinandoli a due a due, abbiamo così 6 corrispondenze (2, 2). Quelle relative a C_1, C_2, e a C_1, C_3 sono riferite tra loro biunivocamente, associando coppie $x\,y$ e $x\,z$ che stiano in una stessa terna neutra $x\,y\,z$ di C_1 C_2 C_3. Applicando quest'osservazione ripetutamente, si vede che le 6 corrispondenze (2, 2) saranno in generale enti ellittici collo stesso invariante assoluto [5].

4. Dire che una coppia $x\ y$ di elementi di $C_1\ C_2$ è neutra (n^0 2) equivarrà a dire che ogni coppia $z\ u$ di $C_3\ C_4$ forma quaterna di f colla $x\ y$, ossia che *tutte le projettività* $\mathcal{P}_{12}$ *han comune la coppia* $x\ y$. Posta la (2), la coppia $x\ y$ dovrà annullare A, B, C, D. Non esiste dunque in generale una tal coppia. (Se vi son *due* coppie neutre, le $\mathcal{P}_{12}$ formano fascio).

Similmente non esiste in generale un elemento neutro. La sua esistenza, per esempio in C_1, significherebbe che f si può scrivere come prodotto di una forma lineare di $x_1\ x_2$ per una forma trilineare nelle altre coppie di variabili. Escluderemo nel seguito questo caso, come anche quello che f sia il prodotto di due forme bilineari: *supporremo cioè che la quadrilinearità sia irriducibile.*

Quadrilinearità, per le quali le omografie residue stanno in reti, od in fasci.

5. Poniamo ora

$$f \equiv \Sigma\, a_{iklm}\, x_i\, y_k\, z_l\, u_m\,, \tag{5}$$

ove ognuno degl'indici prenda i valori 1, 2; sicchè i termini della somma sono 16.

Le omografie $\mathcal{P}_{12}$, provenienti dal fissare z, u, sono combinazioni lineari delle quattro

$$\Sigma a_{ik11}\, x_i\, y_k = 0,\quad \Sigma a_{ik12}\, x_i\, y_k = 0,\quad \Sigma\, a_{ik21}\, x_i\, y_k = 0,\quad \Sigma a_{ik22}\, x_i\, y_k = 0. \tag{6}$$

In conseguenza esse stanno in una rete quando queste quattro sono in una rete; vale a dire quando è nullo il determinante (invariante della f)

$$L = \begin{vmatrix} a_{1111} & a_{1211} & a_{2111} & a_{2211} \\ a_{1112} & a_{1212} & a_{2112} & a_{2212} \\ a_{1121} & a_{1221} & a_{2121} & a_{2221} \\ a_{1122} & a_{1222} & a_{2122} & a_{2222} \end{vmatrix}.$$

---

[5] Cfr. Le Paige cit. in [1], § I.

Similmente le $\mathcal{P}_{12}$ saranno in un fascio, se son nulli tutti i minori del 3^0 ordine di L; e coincideranno se son nulli tutti quelli di 2^0 ordine.

Ora, quando le $\mathcal{P}_{12}$ presentano i detti fatti, le $\mathcal{P}_{34}$ presenteranno la stessa particolarità: perchè, scambiando i campi $C_1\, C_2$ con $C_3\, C_4$, il determinante L non muta, altrimenti che per lo scambiarsi delle linee orizzontali colle colonne. Ossia: *è la stessa cosa dire che sono in una rete le* $\mathcal{P}_{12}$, *o le* $\mathcal{P}_{34}$; *che sono in un fascio le* $\mathcal{P}_{12}$, *o le* $\mathcal{P}_{34}$; *che coincidono le* $\mathcal{P}_{12}$, *o le* $\mathcal{P}_{34}$.

6. Lo stesso fatto risulta anche subito così.

L'ipotesi che le $\mathcal{P}_{12}$ siano in una rete equivale a dire che le forme primi membri delle (6) son combinazioni lineari (a coefficienti costanti) di tre forme φ, ψ, χ bilineari nelle $x\,y$. Poichè la f (5) si ha da quelle (6) moltiplicandole pei 4 prodotti $z_l u_m$ e sommando, ne viene che in questo caso è:

$$f \equiv \varphi\,(xy)\,\alpha\,(zu) + \psi\,(xy)\,\beta\,(zu) + \chi\,(xy)\,\gamma\,(zu). \tag{7}$$

E similmente, se le $\mathcal{P}_{12}$ sono in un fascio, si potrà porre:

$$f \equiv \varphi\,(xy)\,\alpha\,(zu) + \psi\,(xy)\,\beta\,(zu)\,; \tag{8}$$

e se le $\mathcal{P}_{12}$ coincidono:

$$f \equiv \varphi\,(xy)\,\alpha\,(zu). \tag{9}$$

Ora le (7), (8), (9) mostrano appunto che le $\mathcal{P}_{34}$ presentano sempre la stessa particolarità che le $\mathcal{P}_{12}$.

Nel 3^0 caso, corrispondente alla (9), si vede che la quadrilinearità si spezza nelle due projettività $\varphi = 0$, $\alpha = 0$, che saranno la $\mathcal{P}_{12}$ e la $\mathcal{P}_{34}$; ma, come s'è già detto alla fine del n^0 4, questo caso verrà escluso.

Nel 2^0 caso, in cui le $\mathcal{P}_{12}$, e così le $\mathcal{P}_{34}$, forman due fasci, la (8) mostra che questi fasci si posson rappresentare così:

$$\begin{cases} \lambda\,\varphi\,(xy) + \mu\,\psi\,(xy) = 0 \\ \lambda\,\beta\,(zu) - \mu\,\alpha\,(zu) = 0 \end{cases} \tag{10}$$

e che il porre $f = 0$ viene a dire che la $\mathcal{P}_{12}$ contenente la coppia $x\,y$ di elementi omologhi, e la $\mathcal{P}_{34}$ rispetto a cui sono omologhi z e u, si corrispondono in un riferimento projettivo dei due fasci. Ossia:

la quadrilinearità si ottiene da due fasci di omografie fra $C_1\,C_2$ *e fra* $C_3\,C_4$, *riferiti fra loro projettivamente, raggruppando insieme le coppie di elementi omologhi di omografie che si corrispondono in quel riferimento projettivo.*

7. Analoghi al determinante (invariante) L sono questi altri, i quali si riferiscono invece rispettivamente alle $\mathcal{P}_{13}$ o $\mathcal{P}_{24}$, e alle $\mathcal{P}_{14}$ o $\mathcal{P}_{23}$:

$$M = \begin{vmatrix} a_{1111} & a_{2111} & a_{1121} & a_{2121} \\ a_{1112} & a_{2112} & a_{1122} & a_{2122} \\ a_{1211} & a_{2211} & a_{1221} & a_{2221} \\ a_{1212} & a_{2212} & a_{1222} & a_{2222} \end{vmatrix}$$

$$N = \begin{vmatrix} a_{1111} & a_{1112} & a_{2111} & a_{2112} \\ a_{1121} & a_{1122} & a_{2121} & a_{2122} \\ a_{1211} & a_{1212} & a_{2211} & a_{2212} \\ a_{1221} & a_{1222} & a_{2221} & a_{2222} \end{vmatrix}.$$

Ora si ha la relazione, identica:

$$L + M + N = 0. \tag{11}$$

Se dunque si annullano due dei tre determinanti, s'annullerà pure il terzo. Ne segue questo teorema:

Se le $\mathcal{P}_{12}$ *sono in una rete, e così pure le* $\mathcal{P}_{13}$, *saranno in una rete anche le* $\mathcal{P}_{14}$, *e per conseguenza* (n° 5) *saranno in reti tutti i* 6 *sistemi di projettività* $\mathcal{P}_{ik}$.

Seguito. Ricorso alle projettività armoniche alle $\mathcal{P}_{ik}$.

8. Ricorrendo al concetto delle projettività binarie *armoniche* (o *coniugate*, od *apolari*) (6), potremo ritrovare i risultati precedenti, e completarli.

---

(6) Si veda su ciò (anche per quel che occorrerà in seguito), ad esempio: C. SEGRE, *Note sur les homographies binaires et leurs faisceaux*, Journal für Math., 100, 1887, p. 317 [V. questo volume, pp. 63-77]; oppure TH. REYE, *Die Geometrie der Lage*, 4e Auflage, 3e Abtheilung, Leipzig, 1910, p. 189 e segi.

Il fatto che le $\mathcal{P}_{12}$ stiano in una rete equivale, com'è noto, all'essere quelle projettività *armoniche* ad una projettività fissa $\mathcal{R}$ tra C_1 e C_2. Se questa è degenere, le $\mathcal{P}_{12}$ hanno comune una coppia di elementi, composta degli elementi singolari di $\mathcal{R}$ (coppia neutra per f).

Siano $a_1\, b_1$ due elementi distinti di C_1, e $a_2\, b_2$ rispettivamente i loro omologhi in C_2, per $\mathcal{R}$. Ogni projettività fra $C_1\, C_2$ che sia armonica ad $\mathcal{R}$ e contenga la coppia $a_1\, b_2$, conterrà pure di conseguenza la coppia $b_1\, a_2$. Applichiamo ciò all'ipotesi che le $\mathcal{P}_{12}$ sian tutte armoniche ad $\mathcal{R}$. Avremo che tutte quelle fra esse che contengono una data coppia *generica* $a_1\, b_2$ di elementi ne contengon di conseguenza *un'altra* $b_1\, a_2$. Quelle $\mathcal{P}_{12}$ son le residue delle coppie di elementi di $C_3\, C_4$ omologhi nella $\mathcal{P}_{34}$ residua di $a_1\, b_2$. Abbiamo dunque che questa $\mathcal{P}_{34}$ è pure residua di $b_1\, a_2$.

D'altronde, quando due coppie di elementi di $C_1\, C_2$, non coincidenti completamente, hanno la stessa $\mathcal{P}_{34}$ residua, le $\mathcal{P}_{34}$ stanno necessariamente in una rete, e per conseguenza anche le $\mathcal{P}_{12}$. Si assumano in fatti quelle due coppie di elementi come elementi fondamentali delle coordinate su $C_1\, C_2$; o, se in uno di questi campi i due elementi dati coincidessero, si prenda quest'elemento come uno dei due elementi fondamentali di quel campo. Come le $\mathcal{P}_{12}$ erano al n^0 5 combinazioni lineari delle (6), così le $\mathcal{P}_{34}$ son combinazioni lineari di 4 projettività, residue delle coppie formate cogli elementi fondamentali di $C_1\, C_2$, combinati fra loro in tutti i 4 modi possibili. Per l'ipotesi due di queste 4 projettività coincidono; onde le dette combinazioni lineari stanno in una rete.

Dunque: *Condizione necessaria e sufficiente perchè le $\mathcal{P}_{12}$ stiano in una rete (o, ciò che è lo stesso, le $\mathcal{P}_{34}$), è che esistano due coppie distinte (almeno parzialmente) di elementi di* $C_1\, C_2$ *che abbiano la stessa $\mathcal{P}_{34}$ residua* (7).

9. *Se le $\mathcal{P}_{12}$ sono armoniche ad una projettività $\mathcal{R}$ fra* C_1 *e* C_2, *e le $\mathcal{P}_{23}$ sono armoniche ad una $\mathcal{S}$ fra* C_2 *e* C_3, *saranno le $\mathcal{P}_{13}$ armoniche alla projettività prodotto di $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$: sempre che questo prodotto sia determinato.*

Supponiamo da prima, per semplicità, che $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ non sian degeneri. Diciamo $a_1\, a_2$, $b_1\, b_2$ due coppie qualunque di elementi omologhi per $\mathcal{R}$; e siano poi a_3 e b_3 gli omologhi di a_2 e b_2 per $\mathcal{S}$:

---

(7) Non si esclude che questa $\mathcal{P}_{34}$ possa esser degenere.

cosicchè il prodotto $\mathcal{R}\mathcal{S}$ muterà a_1 e b_1 in a_3 e b_3. Si tratterà di dimostrare (n^0 8) che: avendo $a_1\, b_2$ e $b_1\, a_2$ la stessa $\mathcal{P}_{34}$ residua, e così $a_2\, b_3$ e $b_2\, a_3$ la stessa $\mathcal{P}_{14}$ residua, dovranno di conseguenza $a_1\, b_3$ e $b_1\, a_3$ avere la stessa $\mathcal{P}_{24}$ residua.

Fissiamo su C_4 un elemento qualunque u, che poi si farà variare; e consideriamo la trilinearità $\mathcal{T}$ fra $C_1\, C_2\, C_3$ che raggruppa i resti di u rispetto alla data quadrilinearità. La considerazione dell'omologo di u su C_1, C_2, C_3 nelle $\mathcal{P}_{14}$, $\mathcal{P}_{24}$, $\mathcal{P}_{34}$ testè nominate riduce ciò che ivi s'è asserito alla seguente proposizione da dimostrare, per la trilinearità $\mathcal{T}$:

Se $a_1\, b_2$ e $b_1\, a_2$ forman terne di $\mathcal{T}$ con uno stesso elemento n_3 di C_3, e così $a_2\, b_3$ e $b_2\, a_3$ forman terne con uno stesso elemento m_1 di C_1, anche $a_1\, b_3$ e $b_1\, a_3$ avranno lo stesso resto su C_2 rispetto a $\mathcal{T}$.

Ora questo teorema per le trilinearità si verifica facilmente. Una dimostrazione semplice consiste nel trasformare $C_1\, C_2\, C_3$ in tre punteggiate complanari, su cui la $\mathcal{T}$ è segata dalle rette del piano; il che sempre si può fare (8). Dopo ciò il teorema equivale a quello di PASCAL per l'esagono $a_1\, n_3\, b_1\, a_3\, m_1\, b_3$ avente i vertici alternativamente sulle rette C_1 e C_3; la C_2 è la retta di PASCAL.

10. Consideriamo ora il caso che una almeno delle due projettività $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ sia degenere: per esempio la $\mathcal{R}$. Diciamo e_1, f_2 i suoi elementi singolari, rispettivamente su C_1, C_2. Il prodotto $\mathcal{R}\mathcal{S}$ sarà ancora determinato, a meno che $\mathcal{S}$ abbia, essa pure, f_2 per elemento singolare su C_2. Escluso questo caso (nel quale ogni elemento di C_1 avrebbe nel prodotto $\mathcal{R}\mathcal{S}$ l'omologo indeterminato), sarà $\mathcal{R}\mathcal{S}$ la projettività degenere fra C_1 e C_3 che ha per elementi singolari e_1 e l'omologo f_3 di f_2 su C_3 rispetto a $\mathcal{S}$.

L'ipotesi che le $\mathcal{P}_{12}$ siano armoniche ad $\mathcal{R}$ significa ora che $e_1\, f_2$ è una coppia neutra della quadrilinearità; e ciò che si vuol dimostrare è che anche $e_1\, f_3$ sarà una coppia neutra. Ora, se u è un elemento qualunque di C_4, $e_1\, f_2\, u$ formeranno quaterna della quadrilinearità con ogni elemento di C_3: ossia la $\mathcal{P}_{23}$ residua di $e_1\, u$ ha f_2 come elemento singolare, ed è perciò degenere. Ma $\mathcal{S}$ è armonica a tutte le $\mathcal{P}_{23}$; in particolare dunque conterrà come coppia di elementi omologhi i due elementi singolari di quella $\mathcal{P}_{23}$ degenere. E poichè

---

(8) Cfr. ad es. la dimostrazione (del fatto duale) a p. 381-385 della Mem. di F. LONDON, *Zur Theorie der trilinearen Verwandtschaft dreier einstufiger Grundgebilde*, Math. Ann., XLIV, 1894, p. 375.

abbiam chiamato f_3 l'omologo per $\mathcal{S}$ di f_2, sarà dunque f_3 il 2^0 elemento singolare della detta $\mathcal{P}_{23}$, residua di $e_1\, u$. Ossia: $e_1 f_3 u$ forman quaterna con ogni elemento di C_2. E, poichè u è arbitrario su C_4, $e_1 f_3$ sarà una coppia neutra della quadrilinearità: come s'era detto.

Così il teorema del n^0 9 è pienamente stabilito. Il solo caso da escludersi è, come avvertimmo, quello in cui $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ hanno uno stesso elemento singolare su C_2. Allora le $\mathcal{P}_{13}$ saranno ancora (pel n^0 7) armoniche ad una projettività fissa; ma questa non si potrà più definire come il prodotto di $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$.

Determinazione di tutti i casi possibili.

11. Il risultato ottenuto ci permetterà di determinare quali sono tutti i casi possibili, rispetto all'essere le $\mathcal{P}_{ik}$ in reti o in fasci.

Supponiamo che, ad esempio, le $\mathcal{P}_{12}$ formino un fascio, mentre le $\mathcal{P}_{23}$ stiano in una rete.

Saranno le $\mathcal{P}_{12}$ armoniche alle projettività $\mathcal{R}$, fra C_1 e C_2, di un altro fascio; e le $\mathcal{P}_{23}$ armoniche ad una projettività $\mathcal{S}$ tra C_2 e C_3.

Le $\mathcal{R}$ non saran tutte degeneri; se no, essendo in un fascio, avrebbero comune l'elemento singolare su C_1, o su C_2; e le $\mathcal{P}_{12}$ avrebbero, esse pure, quell'elemento come singolare; il che è escluso (fine del n^0 4).

Se nemmeno la $\mathcal{S}$ non è degenere, i prodotti di ogni $\mathcal{R}$ (non degenere) per $\mathcal{S}$ saran projettività tutte distinte fra loro (e non degeneri). Pel teorema del n^0 9 le $\mathcal{P}_{13}$ saranno armoniche a tutte queste projettività; e però formeranno un fascio, e non saranno in generale degeneri. I prodotti $\mathcal{R}\mathcal{S}$ formeranno a loro volta un fascio.

Se quindi applichiamo di nuovo il teorema del n^0 9, scambiando fra loro gli indici 1 e 2; e considerando, invece della $\mathcal{S}$ del n^0 9, ciascuna delle infinite projettività non degeneri a cui sono armoniche le $\mathcal{P}_{13}$; concluderemo che le $\mathcal{P}_{23}$ sono armoniche *ad infinite* projettività (non solo alla $\mathcal{S}$); e di conseguenza stanno anch'esse in un fascio, non soltanto in una rete. La $\mathcal{S}$ da cui siam partiti è variabile nel fascio armonico a quello.

12. Prima di proceder oltre converrà, sempre restando nell'ipotesi del n^0 precedente, precisare ulteriormente il risultato ottenuto.

Ciascuno dei due fasci di projettività $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{S}$ si compone di projettività con due coppie comuni, distinte o coincidenti, di elementi omologhi. Pel fatto che i prodotti $\mathcal{R}\mathcal{S}$ devono anch'essi costituire un fascio, accadrà che i due elementi che le coppie comuni alle $\mathcal{R}$ hanno su C_2 coincideranno coi due elementi di C_2 appartenenti alle coppie comuni alle $\mathcal{S}$.

In fatti se un elemento a_2 di C_2, omologo per tutte le $\mathcal{R}$ di uno stesso elemento a_1 di C_1, avesse come omologo su C_3 rispetto ad una $\mathcal{S}$ un elemento a_3 *variabile colla* $\mathcal{S}$, i prodotti $\mathcal{R}\mathcal{S}$ delle diverse $\mathcal{R}$ per questa $\mathcal{S}$ avrebbero in comune la coppia $a_1\,a_3$ di elementi omologhi. E poichè le $\mathcal{R}\mathcal{S}$ formano un fascio, la coppia $a_1\,a_3$ sarebbe una coppia base del fascio: il che è assurdo, poichè a_3 è variabile, e si tratta di un fascio non degenere.

Adunque, se indichiamo con $a_1\,a_2$ e $b_1\,b_2$ le coppie, distinte o coincidenti, comuni alle $\mathcal{R}$, si potranno rappresentare con $a_2\,a_3$, $b_2\,b_3$ le coppie basi delle $\mathcal{S}$; sicchè le coppie comuni alle $\mathcal{R}\mathcal{S}$ saranno $a_1\,a_3$, $b_1\,b_3$.

I fasci delle $\mathcal{P}_{12}$, $\mathcal{P}_{23}$, $\mathcal{P}_{13}$, essendo armonici rispettivamente ai fasci delle $\mathcal{R}$, delle $\mathcal{S}$, delle $\mathcal{R}\mathcal{S}$, avranno per coppie basi:

$$a_1\,b_2\,,\ b_1\,a_2\,;\quad a_2\,b_3\,,\ b_2\,a_3\,;\quad a_1\,b_3\,,\ b_1\,a_3\,.$$

Le due coppie basi di ognuno saranno, o sempre distinte, o sempre coincidenti.

Scambiando l'indice 3, o 2, coll'indice 4, si dedurrà che esistono in C_4 due elementi $a_4\,b_4$ tali che i fasci delle $\mathcal{P}_{14}$, $\mathcal{P}_{24}$, $\mathcal{P}_{34}$ avran per coppie basi:

$$a_1\,b_4\,,\ b_1\,a_4\,;\quad a_2\,b_4\,,\ b_2\,a_4\,;\quad a_3\,b_4\,,\ b_3\,a_4\,.$$

13. Ritornando al n^0 11, supponiamo ora che la projettività $\mathcal{S}$ ivi considerata sia degenere, cogli elementi singolari $m_2\,m_3$ rispettivamente su C_2, C_3. Il prodotto di una delle $\mathcal{R}$ per $\mathcal{S}$ sarà ancora, per una $\mathcal{R}$ generica, ben determinato; poichè, come s'è detto (n^0 11), la $\mathcal{R}$ generica non è degenere. Questo prodotto sarà la projettività degenere fra C_1 e C_3 che ha su C_3 per elemento singolare m_3 e su C_1 per elemento singolare l'omologo m_1 di m_2 nell'inversa della $\mathcal{R}$ considerata.

Se m_1 non fosse fisso, al variare della $\mathcal{R}$, quel prodotto $\mathcal{R}\mathcal{S}$ sarebbe variabile, avendo fisso l'elemento singolare m_3. Le $\mathcal{P}_{13}$, essendo armoniche a tutte le projettività prodotti $\mathcal{R}\mathcal{S}$, avrebbero anch'esse comune quest'elemento singolare: contro l'ipotesi che la corrispondenza quadrilineare sia irriducibile (n^0 4).

Dunque m_1 è fisso: ossia una delle due coppie (distinte o coincidenti) comuni alle projettività $\mathcal{R}$ contiene l'elemento singolare m_2 di $\mathcal{S}$.

Il fascio delle $\mathcal{P}_{12}$ ha per coppie di elementi base le coppie basi del fascio ad esso armonico delle $\mathcal{R}$, *invertite.* Le $\mathcal{P}_{23}$ poi contengon tutte la coppia $m_2\, m_3$. Cosicchè il caso attuale è quello in cui la coppia unica comune alle $\mathcal{P}_{23}$ ha su C_2 lo stesso elemento che ha ivi una delle due coppie (distinte o no) comuni alle $\mathcal{P}_{12}$. E si vede che anche le $\mathcal{P}_{13}$ conterranno una stessa coppia, composta dell'elemento di C_1 che fa parte dell'altra coppia base delle $\mathcal{P}_{12}$, e dell'elemento di C_3 che è nella coppia comune alle $\mathcal{P}_{23}$.

14. Ora possiamo concludere:

Per quadrilinearità irriducibili, i casi che si posson presentare riguardo allo stare le projettività $\mathcal{P}_{ik}$ in reti (9), *o in fasci, sono i seguenti:*

1.° *Solo due dei 6 sistemi di projettività sono in reti, per esempio solo le $\mathcal{P}_{12}$ e le $\mathcal{P}_{34}$.*

2.° *Sono in reti tutti i 6 sistemi di projettività.*

3.° *Le $\mathcal{P}_{12}$, ad esempio, formano un fascio; le $\mathcal{P}_{23}$ e le $\mathcal{P}_{13}$ sono in reti, in quanto che le $\mathcal{P}_{23}$ hanno una coppia comune, e così le $\mathcal{P}_{13}$* (10). Delle due coppie, distinte o no, che son base per le $\mathcal{P}_{12}$, una ha l'elemento che sta su C_1 in comune colla coppia base delle $\mathcal{P}_{13}$; l'altra ha comune l'elemento di C_2 colla coppia base delle $\mathcal{P}_{23}$. Le due coppie base rispettivamente delle $\mathcal{P}_{13}$ e delle $\mathcal{P}_{23}$ han lo stesso elemento su C_3.

4.° *Tutti i 6 sistemi di $\mathcal{P}_{ik}$ son fasci.* Le coppie di elementi, base di questi fasci, son così disposte. Se $a_1\, b_2$, $b_1\, a_2$ son le due coppie (distinte o coincidenti) base per le $\mathcal{P}_{12}$, si potranno indicare con $a_i\, b_k$ e $b_i\, a_k$ le coppie base per le $\mathcal{P}_{ik}$, per tutte le sei combinazioni ik degli indici 1, 2, 3, 4.

5.° Come caso particolare del precedente, coincidono a_i e b_i per ogni i. Nei 4 campi C_i stanno rispettivamente 4 elementi a_i tali che a due a due costituiscono coppie neutre per la quadrilinearità.

15. La rappresentazione analitica conferma questi risultati, e può fornire equazioni canoniche per le quadrilinearità dei vari casi.

---

(9) Per brevità qui, dicendo che stanno *in reti*, intendiamo: « in reti ben determinate, e non in fasci ».

(10) Quindi anche le $\mathcal{P}_{34}$ formeranno un fascio, le $\mathcal{P}_{14}$, $\mathcal{P}_{24}$ staranno in reti, dotate di coppia base, ecc.

Mi limiterò al 4⁰ e 5⁰ caso. Nel 4⁰, se si prendono in C_i come elementi fondamentali delle coordinate rispettivamente a_i e b_i, il fatto che ogni coppia $a_i\, b_k$ con i e k diversi è neutra dà che nella (5) (n⁰ 5) i coefficienti a con due indici disuguali son tutti nulli; sicchè quell'equazione si riduce alla forma semplicissima [11]

$$x_1\, y_1\, z_1\, u_1 + x_2\, y_2\, z_2\, u_2 = 0\,. \tag{12}$$

Secondo l'osservazione finale del n⁰ 6, questa corrispondenza quadrilineare si potrà ottenere con due fasci di projettività fra C_1 C_2 e fra C_3 C_4, riferiti tra loro projettivamente, *introducendo la particolarità* che alle due projettività degeneri dell'un fascio rispondan nell'altro fascio le projettività degeneri.

Nel 5⁰ caso siano $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $z_1 = 0$, $u_1 = 0$ i 4 elementi che a due a due forman coppia neutra. Mancheranno nella (5) i termini con due indici (almeno) $= 2$. Resta dunque un'equazione della forma

$$a_1\, x_2\, y_1\, z_1\, u_1 + a_2\, x_1\, y_2\, z_1\, u_1 + a_3\, x_1\, y_1\, z_2\, u_1 +$$

$$+ a_4\, x_1\, y_1\, z_1\, u_2 + a_0\, x_1\, y_1\, z_1\, u_1 = 0$$

o, se si vuole, in coordinate non omogenee

$$a_1\, x + a_2\, y + a_3\, z + a_4\, u + a_0 = 0. \tag{13}$$

Su essa si vede subito che le $\mathcal{P}_{ik}$ formano 6 fasci colle due coppie base coincidenti (rispettivamente nelle 6 coppie neutre).

Rappresentazione delle quadrilinearità su due quadriche fisse, per mezzo delle reciprocità spaziali.

16. Fissiamo due quadriche non degeneri Q, Q'; e, riferendole a due convenienti sistemi di coordinate omogenee, che indicheremo con

$$X_{11}\, X_{12}\, X_{21}\, X_{22}\,, \text{ e } X'_{11}\, X'_{12}\, X'_{21}\, X'_{22}\,,$$

rappresentiamole parametricamente con

$$X_{ik} = x_i\, y_k\,, \quad X'_{lm} = z_l\, u_m \quad (i, k, l, m = 1, 2) \tag{14}$$

---

[11] Cfr. Le Paige cit. in [1], § III.

(Ci accadrà poi anche in seguito di scrivere X_1 X_2 X_3 X_4 invece di X_{11} X_{12} X_{21} X_{22}; ecc.). Saranno x_1 x_2 coordinate omogenee nel campo binario costituito dalle generatrici di un 1^0 *regolo* (o schiera rigata) di Q; y_1 y_2 analogamente pel 2^0 regolo: le X_{ik} saran le coordinate del punto X di Q per cui passan le generatrici x e y dei due regoli. Similmente z_1 z_2 e u_1 u_2 saran le coordinate interne ai due regoli di Q'; e precisamente quelle delle generatrici passanti pel punto X'.

Assumendo quei 4 regoli, rispettivamente, come i 4 campi C_1 C_2 C_3 C_4, la quadrilinearità

$$f \equiv \Sigma\, a_{iklm}\, x_i\, y_k\, z_l\, u_m = 0\,, \tag{15}$$

grazie alle (14), equivarrà alla relazione

$$\Phi \equiv \Sigma\, a_{iklm}\, X_{ik}\, X'_{lm} = 0\,; \tag{16}$$

la quale dice che X, X' son punti reciproci in una determinata reciprocità Φ fra gli spazi di Q, Q'. I 16 coefficienti della quadrilinearità sono gli stessi che i 16 coefficienti della reciprocità. *Le quadrilinearità tra 4 campi binari vengon così riferite linearmente alle reciprocità fra 2 spazi ordinari.*

17. Ciò che è risultato immediatamente per via algebrica, trasformando l'una nell'altra le (15) e (16) per mezzo delle (14), si può anche riconoscere per via geometrica.

Data cioè una reciprocità Φ tra gli spazi di Q, Q', raggruppiamo due generatrici x e y dei due regoli C_1 C_2 di Q e due generatrici z e u dei due regoli C_3 C_4 di Q', quando il punto xy e il punto zu sono reciproci in Φ. Si riconosce subito che, date due qualunque di quelle 4 rette, le altre due si corrispondono in una determinata projettività. Così, date z e u, e quindi il loro punto comune, il piano corrispondente a questo in Φ sega Q secondo una conica, su cui s'incontrano le generatrici x, y dei due regoli C_1 C_2 di Q, omologhe in una projettività $\mathcal{P}_{12}$ (12). Se invece diamo, ad esempio, y e u rispettivamente nei regoli C_2 e C_4 di Q e di Q', le coppie di punti di queste rette che son reciproci nella Φ formano due punteggiate

(12) Per la rappresentazione delle projettività binarie sulle sezioni piane di una quadrica, v. C. STÉPHANOS, *Mémoire sur la représentation des homographies binaires*, etc., Math. Ann., XXII, 1883, p. 299.

projettive: e i regoli C_1 e C_3, riferiti a queste punteggiate per sezione, risultano così legati da una projettività $\mathcal{P}_{13}$.

Ne deriva (De Paolis (2) n^0 51) che l'aggruppamento delle generatrici dei 4 regoli in quaterne è una quadrilinearità.

Viceversa, se si dà una corrispondenza quadrilineare fra i 4 regoli di Q, Q'; e si associano due punti di Q, Q' quando le generatrici passanti per essi forman quaterna in quella, saranno tali punti coppie di punti reciproci in una reciprocità. Dato cioè uno di essi, per esempio zu, l'altro dovrà stare su una conica di Q, generata dai due regoli di questa, riferiti in una determinata projettività $\mathcal{P}_{12}$, residua di quella coppia $z\ u$; ecc. ecc.

18. Sebbene nel seguito non ne facciamo uso, possiamo qui accennare come questa rappresentazione spaziale metta in evidenza il fatto che *una corrispondenza quadrilineare tra* 4 *forme di* 1^a *specie equivale, in certo senso, ad un legame bilineare fra le projettività che si posson porre tra due di quelle forme e le projettività tra le altre due.* Basta in fatti, per avere quel legame bilineare, considerare i punti X del 1^0 spazio come imagini delle projettività fra i regoli C_1, C_2 di Q (associando cioè due rette di questi quando sono in un piano con X), e i punti X' del 2^0 spazio come imagini delle projettività fra i regoli C_3, C_4 di Q'; indi associare due tali projettività, quando i loro punti imagini X, X' sono reciproci in Φ. Se X, X' sono su Q, Q', le corrispondenti projettività, essendo degeneri, si posson sostituire colle loro coppie di elementi singolari x e y, z e u; e nascono le quaterne di elementi della corrispondenza quadrilineare. Si vede subito che il legame bilineare tra le projettività $\mathcal{M}$ di C_1 e C_2, $\mathcal{N}$ di C_3 e C_4, si può enunciare così: $\mathcal{N}$ è armonica a quella projettività $\mathcal{N}'$ fra C_3 e C_4 che associa due elementi la cui $\mathcal{P}_{12}$ residua nella quadrilinearità è armonica a $\mathcal{M}$. Oppure nel modo analogo, scambiando C_1 e C_2 con C_3 e C_4, la $\mathcal{M}$ con $\mathcal{N}$. Se, simbolicamente, si rappresenta la quadrilinearità con $\alpha_x\,\beta_y\,\gamma_z\,\delta_u = 0$ (ove solo i prodotti $\alpha_i\,\beta_k\,\gamma_l\,\delta_m$ hanno senso), e la $\mathcal{M}$ con $a_x\,b_y = 0$, la $\mathcal{N}$ con $c_z\,d_u = 0$ (avendo senso solo i prodotti $a_i\,b_k$, $c_l\,d_m$); quel legame bilineare fra le $\mathcal{M}$ e le $\mathcal{N}$ si esprime così:

$$(\alpha\, a)\,(\beta\, b)\,(\gamma\, c)\,(\delta\, d) = 0.$$

Invece di esso si può considerare l'una o l'altra di due corrispondenze, generalmente biunivoche, lineari, fra le projettività di C_1 e C_2, C_3 e C_4: una delle quali si ha facendo corrispondere a ciascuna

$\mathcal{M}$ quella projettività $\mathcal{N}'$ di C_3 e C_4, prima nominata, che è armonica a tutte le $\mathcal{N}$ legate alla $\mathcal{M}$ nel modo detto; e l'altra in maniera analoga.

19. Ritornando al n⁰ 17, osserviamo che la reciprocità Φ può essere *degenere* (o *singolare*) semplicemente, o doppiamente, o triplamente: ossia ridursi rispettivamente a una reciprocità fra due stelle S, S', o ad una projettività fra due fasci s, s' di piani, o infine spezzarsi nella condizione che o X, o X' stiano in due piani determinati σ, σ'. Ciò corrisponde rispettivamente: all'essere nullo il determinante L (n^0 5) della Φ; o all'annullarsi dei suoi minori di 3^0 ordine; o di quelli di 2^0 ordine.

Ora questi fatti algebrici rispondevano, per la quadrilinearità (n^0 5), all'essere le $\mathcal{P}_{12}$ o le $\mathcal{P}_{34}$ projettività di una rete, o di un fascio, o tutte coincidenti. E si vede bene la ragione geometrica di questa corrispondenza. Perchè, se la reciprocità è semplicemente, o doppiamente degenere, a punti generici $X' \equiv zu$ di Q' rispondono per Φ piani della stella S, o del fascio s del 1^0 spazio; e si sa che le coniche segate su Q dai piani di una stella, o di un fascio, determinano fra le generatrici x, y dei due regoli le projettività $\mathcal{P}_{12}$ di una rete, oppure di un fascio. Ecc.

E l'osservazione finale del n^0 5 trova ora un'altra prova in ciò, che se una reciprocità Φ ha nel 1^0 spazio un punto singolare, od una retta, o piano, di punti singolari, la stessa singolarità essa deve avere nel 2^0 spazio.

20. Una terna $x\,y\,z$ di generatrici è neutra per la quadrilinearità f, se il punto xy di Q ha come piano omologo nella reciprocità Φ un piano passante per z, e quindi tangente a Q'. Se Φ non è degenere, i piani tangenti a Q' son gli omologhi, per Φ, dei punti di una quadrica Q_1 del 1^0 spazio. I punti xy ora considerati saran quelli della quartica comune a Q e Q_1 ([13]). La corrispondenza $(2, 2)$ del n^0 3 fra elementi di C_1 C_2 è rappresentata da questa quartica.

Una coppia $x\,y$ di generatrici dei due regoli di Q sarà neutra per f, quando il loro punto d'incontro abbia rispetto a Φ un piano omologo indeterminato: ossia solo quando Φ è degenere e un suo

([13]) Se Q_1 coincidesse con Q, ossia se Q e Q' fossero omologhe nella Φ, si avrebbero due projettività fisse, rispettivamente tra i regoli di queste quadriche; e la corrispondenza quadrilineare si spezzerebbe nell'insieme di queste due projettività.

punto singolare del 1^0 spazio è nel punto xy di Q. Invece una coppia neutra $x\ z$ di generatrici rispettivamente di Q e di Q' sarà tale che ogni punto di x e ogni punto di z son reciproci nella Φ: vale a dire sarà una coppia di rette corrispondenti per la Φ.

21. Una reciprocità Φ degenere è caratterizzata da ciò: che si posson trovare due punti distinti di uno spazio, aventi lo stesso piano per omologo nell'altro spazio. Basta prendere in fatti due punti allineati con un punto singolare. Ne deriva di nuovo la proposizione finale del n^0 8.

Inoltre, se S è punto singolare per Φ nel 1^0 spazio, le $\mathcal{P}_{12}$ saran rappresentate dalle sezioni fatte su Q con piani passanti per S. La projettività fra C_1 e C_2, che al principio del n^0 8 s'indicava con $\mathcal{R}$, armonica a tutte le $\mathcal{P}_{12}$, sarà rappresentata dalla conica sezione di Q col piano polare di S rispetto alla stessa Q. E si vede di nuovo che, se le rette $a_1\ b_1$ del regolo C_1 incontrano su quella conica le rette $a_2\ b_2$ di C_2, saranno i punti a_1b_2 e b_1a_2 allineati con S; ossia le coppie di elementi a_1 e b_2, b_1 e a_2, di C_1 e C_2 avranno la stessa $\mathcal{P}_{34}$ residua.

Anche la classificazione che s'è conclusa al n^0 14 si rappresenta bene col metodo ora introdotto. I casi 1^0 e 2^0 vengon da sè (il 2^0 si ritroverà al n^0 23). Il 3^0 caso si ha, ad esempio, se Φ degenera in una projettività tra due fasci di piani s, s', per la quale siano omologhi un piano del 1^0 fascio tangente a Q e un piano del 2^0 fascio tangente a Q'. Il 4^0 e il 5^0 caso si hanno se entrambi i piani del 1^0 fascio tangenti a Q (distinti o coincidenti) han per omologhi i due piani del 2^0 tangenti a Q'.

Rappresentazione delle quadrilinearità aventi le $\mathcal{P}_{12}$ legate linearmente, per mezzo di due coniche e di una reciprocità fra i loro piani.

22. Quando si rappresenta una quadrilinearità su Q, Q' per mezzo di una reciprocità Φ come nel cap. precedente, se avviene che le $\mathcal{P}_{12}$ (o $\mathcal{P}_{34}$) stiano in una rete, cioè che Φ sia degenere, la rappresentazione si può semplificare, sostituendo a Q, Q' i coni circoscritti ad esse dai punti singolari S, S' di Φ.

I 4 campi binari che rappresentavamo coi 4 regoli di Q, Q' vengono allora dati da quei due coni quadrici, come inviluppi di piani: contando ogni piano due volte, ossia come elemento di due dei 4 campi binari.

Se inoltre seghiamo le due stelle S, S' con due piani, otteniamo la seguente rappresentazione della nostra particolare quadrilinearità:

Su due piani son fissate due coniche irriducibili γ, γ', da riguardarsi come inviluppi. Si consideri γ come la sovrapposizione di due coniche (inviluppi) C_1, C_2, e γ' come la sovrapposizione di due C_3, C_4. Le quadrilinearità colle $\mathcal{P}_{12}$ (o $\mathcal{P}_{34}$) in una rete si posson rappresentare con quadrilinearità fra le coniche C_1 C_2 C_3 C_4, aventi questa particolarità: che due tangenti di γ' riguardate come elementi rispettivamente di C_3 e C_4, oppure le medesime riguardate come elementi rispettivamente di C_4 e C_3, hanno sempre la stessa projettività $\mathcal{P}_{12}$ residua fra gli elementi di γ: non vi è da far distinzione di *ordine* fra C_3 e C_4; e così fra C_1 e C_2. La projettività a cui sono armoniche le $\mathcal{P}_{12}$ è l'identità: vale a dire le $\mathcal{P}_{12}$ sono *involuzioni*; e così le $\mathcal{P}_{34}$.

Le quadrilinearità di tal natura tra le due coniche proverranno dalle reciprocità tra i loro piani: in quanto che, se le tangenti a_1 a_2 e a_3 a_4, rispettivamente di γ e γ', formano una quaterna della quadrilinearità, il punto $a_1 a_2$ e il punto $a_3 a_4$ saran reciproci in una determinata reciprocità piana φ. Viceversa, associando 4 tangenti a_1 a_2 a_3 a_4 quando i punti $a_1 a_2$ e $a_3 a_4$ son reciproci in una data reciprocità φ, si verrà a porre una quadrilinearità tra C_1 C_2 C_3 C_4.

Le corrispondenze quadrilineari che in questo modo si posson rappresentare su due coniche sono anche caratterizzate così. Esse sono fra due campi sovrapposti C_1 C_2, e fra altri due campi sovrapposti C_3 C_4; simmetriche, o involutorie, rispetto ai primi due, come pure rispetto agli altri due. La forma quadrilineare f (irriducibile) è una combinazione lineare dei 9 prodotti delle tre espressioni $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x_1 y_2 + x_2 y_1$ per le tre $z_1 u_1$, $z_2 u_2$, $z_1 u_2 + z_2 u_1$.

23. Se si esclude che le $\mathcal{P}_{12}$ (o le $\mathcal{P}_{34}$) formino fascio, la reciprocità piana φ non sarà degenere. Essa muterà la conica-inviluppo $C_1 \equiv C_2$ in una conica-luogo $D_1 \equiv D_2$ del 2^0 piano. E la quadrilinearità, che ne deriva, fra $D_1\, D_2\, C_3\, C_4$, o, più brevemente, fra $D (\equiv D_1 \equiv D_2)$ e $\Gamma (\equiv C_3 \equiv C_4)$, si potrà definire così: *Forman quaterna della quadrilinearità due punti di* D *e due tangenti di Γ, se la retta dei due punti e il punto d'incontro delle due tangenti sono incidenti.*

Domandiamo ora quando è che questa quadrilinearità sarà tale che le $\mathcal{P}_{13}$ (come già le $\mathcal{P}_{12}$ e le $\mathcal{P}_{34}$) stiano in una rete (e così di conseguenza tutte le $\mathcal{P}_{ik}$ stiano in reti, qualunque siano ik).

Occorre e basta (n^0 8) che, presi ad arbitrio un punto S su D e una tangente s di Γ, esistano altri due elementi S' di D e s' di Γ, tali che la projettività residua di $S s$ sia la stessa che quella di $S's'$. La projettività residua di $S s$ è la corrispondenza fra i punti P di D e le tangenti p di Γ, tali che la retta SP passi pel punto sp: ossia tali che il fascio di centro S descritto da SP abbia per sezione la punteggiata che segna su s la tangente mobile p di Γ. Dire che questa projettività non muta sostituendo S' e s' a S e s viene a dire: *i due fasci projettivi di centri* S, S$'$ *generatori della conica* D *han per sezioni sulle rette* s, s$'$ *due punteggiate projettive che generano* Γ *come inviluppo.*

È questa la particolarità che presentano le coniche D e Γ, quando la quadrilinearità che abbiam definito fra esse ha tutte le projettività residue giacenti in reti. E si vede che: basta che esistan due fasci projettivi generatori di D e due punteggiate generatrici di Γ, che sian rispettivamente prospettivi, perchè di tali forme ne esistano ∞^2: potendosi prendere ad arbitrio il centro S di un fascio sulla D, e una tangente di Γ come sostegno s di una punteggiata.

24. Le due coniche D e Γ saranno in una relazione ben nota. In fatti, colle notazioni già usate, poniamo che P si prenda precisamente in uno M dei due punti d'intersezione di s' con D. La retta SP, che diventa SM, taglierà s nel punto che è omologo di M, quando M si consideri come punto della punteggiata s' projettiva ad s: sicchè SM sarà tangente a Γ. Così, se N è l'altra intersezione di s' con D, sarà SN tangente a Γ. Esiste dunque un triangolo SMN iscritto in D e circoscritto a Γ.

Viceversa, si abbia un triangolo ABC iscritto in D e coi lati abc (rispettivamente opposti a quei vertici) tangenti a Γ. La quadrilinearità fra D e Γ, definita come s'è detto sul principio del n^0 23, sarà tale che per essa ABc, aBc saranno evidentemente due terne neutre; ossia la projettività residua di Bc è quella degenere che ha per elementi singolari $A\,a$. E questa stessa projettività degenere sarà, analogamente, quella residua della coppia Cb. Onde, pel teorema del n^0 8, le $\mathcal{P}_{13}$ staranno in una rete; e si avrà il caso attuale.

Questo caso è dunque caratterizzato dalla esistenza di uno e quindi infiniti triangoli iscritti in D *e circoscritti a* Γ [14].

---

[14] La corrispondenza projettiva, che avrà luogo (tra i punti S e le tangenti s', ossia) tra i vertici e i lati opposti di quei triangoli è — come risulta dal n^0 23 — la projettività armonica a tutte le $\mathcal{P}_{13}$.

Se ora si vuole ritornare al modo più generale del n^0 22 di ottenere la corrispondenza quadrilineare fra le due coniche $C_1 \equiv C_2$, $C_3 \equiv C_4$, mediante una reciprocità piana Φ, basterà applicare il risultato ora ottenuto per concludere: *Tutte le* $\mathcal{P}_{13}$ *di quella quadrilinearità staranno in una rete, quando le due coniche e la reciprocità tra i loro piani saranno così legate, che esistano due triangoli circoscritti rispettivamente alle due coniche, i quali si corrispondano in quella reciprocità* (15). Di tali coppie di triangoli ne esisteranno ∞^1 se ve n'è una.

Quadrilinearità rappresentate su due quadriche sovrapposte.

25. In un altro modo possiamo rappresentare opportunamente le quadrilinearità fra 4 campi binari, che a coppie sian sovrapposti: e ciò senza introdurre (come invece s'era fatto nel Cap.° prec.^{e}) condizioni speciali per la corrispondenza.

Basterà che nei n^i 16 e seg^i si assumano le due quadriche Q e Q' sovrapposte. Così i campi C_1, C_3, ad esempio, saranno uno stesso regolo di Q; e C_2, C_4 saranno l'altro regolo.

Se x e z son due generatrici del 1^0 regolo, e y, u due generatrici del 2^0 regolo, sì che $x\,y\,z\,u$ sia una quaterna della quadrilinearità f, il punto xy ed il punto zu di Q saran reciproci per la reciprocità Φ.

Con questa rappresentazione si risolveranno facilmente alcuni problemi sulle quadrilinearità tra *due* campi.

Così dai due noti casi in cui la reciprocità Φ è involutoria: polarità ordinarie, e sistemi nulli, si trae:

Le quadrilinearità fra due campi doppi $C_1 (\equiv C_3)$, $C_2 (\equiv C_4)$, che hanno carattere parzialmente involutorio, nel senso che se gli elementi $x\,z$ di C_1 e $y\,u$ di C_2 forman quaterna, sempre anche formin quaterna le stesse due coppie invertite, $z\,x$ e $u\,y$ (16), costituiscono due diversi sistemi: uno ∞^9 dato da una forma quadrilineare che non muta per gli scambi simultanei di x e z, di y e u; l'altro ∞^5 dato da una forma quadrilineare che muta segno per tali scambi.

---

(15) Poichè, nell'enunciare questa relazione, non vi è da distinguere fra le due coniche sovrapposte C_1 e C_2, avremo che: posta l'ipotesi di tutto questo Cap.^{0} che le $\mathcal{P}_{12}$ stiano in una rete, se avviene che anche le $\mathcal{P}_{13}$ siano in una rete, lo stesso accadrà delle $\mathcal{P}_{23}$; e così delle $\mathcal{P}_{14}$, ecc. Si ritrova cioè il teorema del n^0 7. E anche quello del n^0 9 diventa evidente, in base alla (14).

(16) Il carattere involutorio richiesto al n^0 22 (v. la fine) era più restrittivo.

E poichè le reciprocità nulle si presentano anche come quelle in cui ogni punto è reciproco di se stesso, così si è condotti a chiedere fra le quadrilinearità dei campi C_1 ($\equiv C_3$), C_2 ($\equiv C_4$), quelle che contengon tutte le quaterne composte di due elementi coincidenti di C_1 e di due elementi coincidenti di C_2. Si avranno allora tutte le ∞^6 reciprocità per le quali Q è luogo di punti uniti (reciproci di se stessi). Esse formano il sistema lineare che congiunge la polarità rispetto a Q al sistema lineare ∞^5 delle reciprocità nulle. E similmente le quadrilinearità richieste formano il sistema lineare ∞^6 che unisce il sistema ∞^5 poc'anzi nominato colla quadrilinearità riducibile $(x - z)(y - u) = 0$, che si spezza nelle due identità entro a C_1 e a C_2.

26. Fermiamoci un momento sulle quadrilinearità del detto sistema ∞^5; e consideriamo una di esse come definita sulla quadrica Q da un sistema nullo. Vorrà dire che associamo le generatrici xz del regolo C_1 e yu del regolo C_2, quando la retta dei punti xy, zu sta in un dato complesso lineare di rette.

È chiaro che una retta a di C_1, che stia nel complesso lineare, quando si consideri come la sovrapposizione di due rette xz, formerà quaterna con due rette *qualunque* yu del regolo C_2: ossia due rette sovrapposte in a formeranno coppia neutra di C_1 e C_3. Ora in generale il regolo C_1 conterrà due rette del complesso lineare; e così anche C_2. Perciò vi saranno in generale due coppie neutre di C_1 e C_3, composte di elementi coincidenti; e così per C_2 e C_4. In altri termini: le projettività $\mathcal{P}_{13}$ formano un fascio di projettività cogli stessi due elementi uniti, e così pure le $\mathcal{P}_{24}$.

In generale, quando la quadrilinearità presenta questo fatto, le due rette unite di ciascuno dei due regoli essendo tali che, su ognuna, due punti qualunque son sempre reciproci per Φ, questa reciprocità ha le 4 rette come rette unite. Si prendan queste rette di Q come spigoli del tetraedro di riferimento, rispetto al quale Q è rappresentata (n⁰ 16) dalle formole:

$$X_1 = xy, \quad X_2 = x, \quad X_3 = y, \quad X_4 = 1. \tag{17}$$

La reciprocità Φ sarà allora:

$$aX_1X_4' + bX_2X_3' + cX_3X_2' + dX_4X_1' = 0. \tag{18}$$

E la quadrilinearità che essa definisce fra i due regoli, ponendo oltre alle (17) le analoghe

$$X_1' = zu, \quad X_2' = z, \quad X_3' = u, \quad X_4' = 1,$$

si avrà sostituendo nella (18):

$$(19) \qquad axy + bxu + cyz + dzu = 0.$$

Posto $z = \varrho x$, $u = \sigma y$, questa si può scrivere

$$(20) \qquad a + b\sigma + c\varrho + d\varrho\sigma = 0;$$

ed esprime un riferimento projettivo tra i due fasci di omografie ad elementi uniti fissi $z = \varrho x$, $u = \sigma y$, entro ai due regoli $C_1 C_2$ (d'accordo colla fine del n^0 6).

La Φ, data da (18), si riduce ad un sistema nullo se $a + d = 0$, $b + c = 0$. Si osservi poi che i valori $\varrho = \pm 1$, $\sigma = \pm 1$, danno rispettivamente nei due fasci di omografie le identità e le involuzioni; e che quelle relazioni tra i coefficienti della (20) fanno corrispondere tra loro questi valori di ϱ e σ. Dunque:

Una quadrilinearità definita su una quadrica da un sistema nullo si può generare così: Su due campi binari C_1 C_2 *si hanno, rispettivamente, due fasci di omografie con elementi uniti fissi. Si ponga tra questi fasci una corrispondenza bilineare, o projettività, tale che siano omologhe nei due fasci le identità (come particolari omografie dei fasci); ed anche le involuzioni rispettive dei due fasci. Dopo ciò, aggruppando sempre due coppie di elementi corrispondenti di due omografie omologhe, si otterranno le quaterne della quadrilinearità* (17).

Con calcoli simili a quelli accennati si estende il risultato al caso che coincidano, in un regolo, od in entrambi, le due rette unite considerate. Si terrà presente che, in ognuno dei due fasci di omografie, se accade che i due elementi uniti fissi coincidano, l'involuzione del fascio sarà parabolica, cioè sarà l'unica omografia degenere del fascio.

Infine osserviamo che, se nel campo binario C_1, al posto del birapporto caratteristico ϱ dei due elementi uniti fissi con due ele-

---

(17) Se la corrispondenza bilineare posta tra i due fasci di omografie fosse tale che all'identità e all'involuzione dell'un fascio fossero omologhe nell'altro rispettivamente l'involuzione e l'identità, verrebbe una quadrilinearità definita su Q da una polarità ordinaria, invece che da un sistema nullo. (Nella (20) si avrebbe $a = d$, $b = c$).

menti corrispondenti nella omografia, introduciamo la funzione $(1+\varrho)/(1-\varrho)$ (che può convenire di sostituire al birapporto ϱ di una quaterna d'elementi, ogni volta che sono associati in qualche modo i primi due elementi e quindi gli altri due); e similmente nel campo C_2 al posto del birapporto σ; la corrispondenza bilineare (20), nel caso attuale di $a+d=b+c=0$, si potrà scrivere:

$$\frac{1+\varrho}{1-\varrho}=k\,\frac{1+\sigma}{1-\sigma} \tag{21}$$

ove k è una costante [18].

Equivalenza projettiva delle quadrilinearità binarie ai sistemi di due quadriche.

27. *Considereremo d'or innanzi solo quadrilinearità tali che l'invariante* L *del* n^0 5 *non si annulli, ossia che le* $\mathcal{P}_{12}$ *(o* $\mathcal{P}_{34}$*) non stiano in una rete.* Ciò è come dire che la *reciprocità spaziale* Φ dei n^i 16 e seg^i *non è degenere.*

Potremo allora rendere più immediata la rappresentazione delle corrispondenze quadrilineari per mezzo di due quadriche (distinte o sovrapposte) Q, Q' e della reciprocità Φ, sostituendo Q' colla quadrica Q_1, di cui essa è l'omologa per mezzo di Φ. In fatti il dire, come prima (n^0 17), che un punto xy di Q e uno zu di Q' son reciproci per Φ, equivarrà a dire che quel punto xy di Q sta nel piano, tangente a Q_1, che congiunge le generatrici di Q_1 omologhe di z e u. Così (chiamando ancora z e u queste rette di Q_1) avremo la seguente rappresentazione della quadrilinearità:

Quattro campi binari son rappresentati rispettivamente sui due regoli $C_1\,C_2$ *di una quadrica* Q *e sui due regoli* $C_3\,C_4$ *di un'altra quadrica* Q_1. *Forman quaterna della quadrilinearità* 4 *rette* x y z u *di* $C_1\,C_2\,C_3\,C_4$, *quando il punto* xy *sta nel piano* zu.

Data una quadrilinearità qualunque (colla sola riserva posta al principio di questo n^0), la si potrà sempre rappresentare in questo modo: basterà ricorrere anzitutto al procedimento del n^0 16, e poi

---

(18) Nel caso $a=d$, $b=c$ della nota precedente verrebbe invece

$$\frac{1+\varrho}{1-\varrho}\,\frac{1+\sigma}{1-\sigma}=k.$$

sostituire alla quadrica Q' la Q_1 come ora s'è detto. Ma anche direttamente, una volta fissata Q, si otterrà la Q_1. In fatti un piano zu tangente a Q_1 sega Q secondo la conica luogo dei punti di incontro delle rette xy di $C_1 C_2$ che forman quaterna colle zu: ossia secondo la conica che è imagine su Q della projettività $\mathcal{P}_{12}$ residua di zu. Viene dunque Q_1 come *inviluppata dai piani delle coniche che sono imagini su* Q *per le* ∞^2 $\mathcal{P}_{12}$ *della nostra quadrilinearità.*

Viceversa, date due quadriche Q, Q_1, si porrà una corrispondenza quadrilineare fra i loro regoli, associando due generatrici xy di Q e due zu di Q_1, quando il punto xy sta nel piano zu.

28. Su questa rappresentazione delle quadrilinearità si ritrovan facilmente alcune proprietà di queste. Così le $\mathcal{P}_{12}$ degeneri proverranno dai piani tangenti comuni alle due quadriche Q, Q_1; e le $\mathcal{P}_{34}$ degeneri dai punti della quartica intersezione di Q, Q_1. Le rette dei due regoli di Q, che s'incontrano su questa quartica, si corrispondono nella corrispondenza $(2, 2)$ di cui s'è accennato al n^0 3. Due tali rette insieme con una generatrice di Q_1 concorrente con esse danno una delle ∞^1 terne neutre; ecc. ecc.

Il tetraedro polare che (in generale) è comune a Q, Q_1 ci darà nuovi fatti per la quadrilinearità.

Anzitutto fissiamo la nostra attenzione su due spigoli opposti di quel tetraedro. Essi sono le diagonali di due quadrilateri giacenti rispettivamente in Q e in Q_1. Diciamo a_1a_2, b_1b_2, e c_1c_2, d_1d_2 le coppie di lati opposti di questi quadrilateri, appartenenti rispettivamente ai regoli C_1, C_2 di Q, e C_3, C_4 di Q_1: sicchè i quadrilateri stessi, ordinati, saranno $a_1b_1a_2b_2$ e $c_1d_1c_2d_2$. Due vertici opposti del 1^0 stanno (su una diagonale e quindi) su due facce opposte del 2^0; e poi gli altri due vertici del 1^0 sulle altre due facce del 2^0. Possiamo, eventualmente con uno scambio di a_1 e a_2, supporre che i vertici opposti a_1b_1, a_2b_2 stiano precisamente sulle facce c_1d_2, c_2d_1. Ricordando allora che l'essere il punto comune a due rette di $C_1 C_2$ situato nel piano di due rette di $C_3 C_4$ significa che le 4 rette forman quaterna della quadrilinearità f, concludiamo che son quaterne di f quelle che si ottengon prendendo a_1b_1, o a_2b_2, con c_1d_2, o con c_2d_1; ed anche (dall'altra diagonale comune) a_1b_2, oppure a_2b_1, con c_1d_1, o con c_2d_2: insomma le quaterne $a_ib_kc_ld_m$, ove siano in numero dispari gl'indici uguali (a 1 od a 2).

Assumiamo allora nei quattro campi binari rispettivamente a_1a_2, b_1b_2, c_1c_2, d_1d_2 come elementi fondamentali delle coordinate. Vorrà dire che l'equazione (5) di f (n^0 5) è soddisfatta ponendo nulle una x, una y, una z, una u, con un numero dispari d'indici uguali; ossia che son nulli i coefficienti a_{iklm} con un numero dispari d'indici uguali. Dunque: *In generale si può ridurre l'equazione* (5) *di una quadrilinearità a contenere solo i termini con tutti gl'indici uguali e quelli con due indici* 1 *e due indici* 2; *in altre parole, in coordinate non omogenee si può ridurre l'equazione a contenere solo il termine in* xyzu, *quelli coi prodotti delle* 4 *coordinate a due a due, e un termine costante* (19).

Se nella considerazione dei due quadrilateri avessimo supposto che i vertici a_1b_1, a_2b_2 stessero sulle facce c_1d_1, c_2d_2, saremmo giunti nello stesso modo a questo risultato: che l'equazione (5) della quadrilinearità si può ridurre a contenere solo i termini con un numero *dispari* (cioè uno o tre) d'indici uguali; o, in coordinate non omogenee, a contenere solo i termini in x, y, z, u e nei prodotti di queste a tre a tre. Questa equazione canonica equivale perfettamente alla precedente: si passa dall'una all'altra scambiando, ad esempio, fra loro le coordinate omogenee x_1x_2; o mutando la non omogenea x in $1/x$.

Se nell'equazione canonica generale

$$axy + a'zu + bxz + b'yu + cxu + c'yz + dxyzu + d' = 0 \tag{22}$$

(i cui coefficienti sian $\neq 0$) si pongono le $xyzu$ uguali a delle nuove variabili moltiplicate rispettivamente pei fattori $r\sqrt{a'b'c'}$, $r\sqrt{a'bc}$, $r\sqrt{ab'c}$, $r\sqrt{abc'}$, ove $r^4 \cdot daa'bb'cc' = d'$, l'equazione stessa prende la forma più semplice

$$\alpha(xy + zu) + \beta(xz + yu) + \gamma(xu + yz) + \delta(xyzu + 1) = 0. \tag{23}$$

Qui i rapporti dei 4 coefficienti $\alpha\beta\gamma\delta$ daranno i tre invarianti assoluti essenziali della quadrilinearità: cfr. la (24).

Calcolando gl'invarianti $L\,M\,N$ per la (22) e per la (23), si trova:

$$\begin{cases} L = (dd' - aa')(bb' - cc') = (\delta^2 - \alpha^2)(\beta^2 - \gamma^2) \\ M = (dd' - bb')(cc' - aa') = (\delta^2 - \beta^2)(\gamma^2 - \alpha^2) \\ N = (dd' - cc')(aa' - bb') = (\delta^2 - \gamma^2)(\alpha^2 - \beta^2) \end{cases} \tag{24}$$

(19) Quest'equazione canonica è ottenuta dal LE PAIGE (a p. 304) col computo delle costanti. Da questo non appare, come invece risulta col metodo seguìto nel testo, che essa può cessar di valere in casi speciali.

29. Pel seguito ci farà comodo avere l'equazione canonica della quadrilinearità in relazione con quelle delle due quadriche Q, Q_1. Ritroveremo così il risultato di dianzi.

Scriviamo le due quadriche in forma canonica così ($X_1 \ldots$ indicando le 4 coordinate omogenee di punti):

$$Q \equiv \Sigma\, a_h^2 X_h^2\,, \quad Q_1 \equiv \Sigma\, b_h^2 X_h^2\,. \tag{25}$$

Si potrà allora rappresentare parametricamente Q, ponendo, ad esempio (con $i = \sqrt{-1}$),

$$\left\{\begin{array}{ll} a_1 X_1 = xy + 1, & a_2 X_2 = i\,(xy - 1), \\ a_3 X_3 = i\,(x + y), & a_4 X_4 = x - y. \end{array}\right. \tag{26}$$

I parametri x, y son coordinate projettive entro i due regoli di Q. Similmente, se Q_1, quale è data da (25), si rappresenta come inviluppo di piani ξ, si potrà porre, analogamente alle (26), per questi piani di Q_1:

$$\left\{\begin{array}{ll} \xi_1 = b_1\,(zu + 1), & \xi_2 = ib_2\,(zu - 1), \\ \xi_3 = ib_3\,(z + u), & \xi_4 = b_4\,(z - u), \end{array}\right. \tag{27}$$

ove z, u son parametri projettivi per le rette dei due regoli di Q_1.

La quadrilinearità, che noi consideriamo fra i regoli di Q, Q_1, nasce se obblighiamo il punto $X \equiv xy$ di Q a stare nel piano $\xi \equiv zu$ di Q_1; ossia se poniamo $\Sigma\, X_h\, \xi_h = 0$; o sostituendo le (26) e (27), e scrivendo ϱ_h invece che b_h/a_h:

$$\left\{\begin{array}{l} (\varrho_1 - \varrho_2)(xyzu + 1) + (\varrho_1 + \varrho_2)(xy + zu) + \\ + (\varrho_4 - \varrho_3)(xz + yu) - (\varrho_3 + \varrho_4)(xu + yz) = 0. \end{array}\right. \tag{28}$$

Ritroviamo la forma canonica (23).

30. L'equazione (22), o (23), non si altera se mutiamo il segno simultaneamente a $x\,y\,z\,u$. Essa proveniva da una delle tre coppie di spigoli opposti del tetraedro polare di Q e Q_1. Dunque:

Una quadrilinearità fra i campi $C_1 C_2 C_3 C_4$ *determina, in generale, in tre modi diversi, quattro involuzioni, rispettivamente entro quei* 4 *campi: le quali involuzioni mutano in sè la quadrilinearità, ossia trasformano* 4 *elementi qualunque associati in questa in* 4 *elementi pure associati.*

Queste involuzioni sono generate, entro ai regoli di Q, Q_1, dalle involuzioni spaziali che hanno per assi le tre coppie di spigoli opposti del tetraedro. Ne deriva che *le tre involuzioni che si hanno in ciascuno dei 4 campi sono a due a due armoniche.*

Invece delle dette involuzioni biassiali si considerino nello spazio le omologie armoniche definite dai vertici e facce opposte del tetraedro polare. Una di esse trasforma l'un nell'altro (non più in se stessi) i due regoli $C_1\, C_2$ di Q, e così pure quelli $C_3\, C_4$ di Q_1; e ancora muta quaterne di generatrici $x\,y\,z\,u$ in cui il punto xy sta nel piano zu in simili quaterne. Ne deduciamo:

Data una quadrilinearità fra i campi $\mathrm{C}_1 \ldots \mathrm{C}_4$, *esiste in generale, e ciò in 4 modi diversi, un'omografia tra due di questi, per esempio tra* C_1 *e* C_2, *e una fra gli altri due,* C_3 *e* C_4, *le quali mutano ogni quaterna della quadrilinearità in una quaterna* [analoga] ([20]).

Le 4 omografie che così si hanno, ad esempio, fra C_1 e C_2, sono a due a due armoniche: avendo come prodotti rispettivamente le involuzioni dianzi considerate su C_1 e su C_2.

Rappresentando di nuovo i 4 campi binari sui regoli di Q, Q_1, sicchè le omografie considerate tra C_1 e C_2, e tra C_3 e C_4 rispondano alle suddette omologie armoniche, si ha che invece le analoghe omografie tra C_1 e C_3 e tra C_2 e C_4, che mutano in sè la quadrilinearità, sono prodotte da 4 delle 8 polarità ordinarie, rispetto a cui si corrispondono le due quadriche Q e Q_1; e così le 4 omografie tra C_1 e C_4, e tra C_2 e C_3, dalle altre 4 di quelle polarità. Il prodotto di due polarità di una stessa quaterna è la collineazione involutoria che ha per assi due spigoli opposti del tetraedro. In conseguenza i prodotti di due omografie di una stessa quaterna son sempre le stesse tre involuzioni, che già si son considerate su ciascun campo binario ([21]).

([20]) S'intende qui, analogamente a ciò che s'era fatto nella nota ([4]), che un'omografia tra due campi distinti C_1 e C_2 si applica in pari tempo a trasformare gli elementi di C_1 in quelli di C_2, e gli elementi di C_2 in quelli di C_1: ossia si abbracciano l'omografia e la sua inversa in un'unica corrispondenza (involutoria) per l'insieme dei due campi.

([21]) Quelle tre involuzioni, e quindi anche le loro tre coppie di elementi doppi, a due a due armoniche, avranno una speciale importanza per la quadrilinearità.

Ad esempio, suppongasi che le $\mathscr{F}_{12}$ debbano stare in *una* rete, cioè essere armoniche ad *una* projettività fissa $\mathscr{R}$. Due involuzioni associate, rispettivamente di C_1 e di C_2, muteranno $\mathscr{R}$ in se stessa. Sicchè, se P_1 è un punto doppio della 1ª involuzione, $\mathscr{R}$ lo trasformerà in un punto P_2 di C_2 che dovrà essere mutato

31. L'esistenza di omografie fra due dei 4 campi binari, e fra gli altri due, tali da mutare in sè la quadrilinearità, prova che *ogni fatto projettivo relativo alla corrispondenza quadrilineare riman vero se si scambiano due dei* 4 *campi binari rispettivamente cogli altri due* [22]; *sempre che le projettività residue fra i primi due campi, e quindi fra gli altri due, non stiano in una rete.* Così se il sistema delle projettività residue $\mathcal{P}_{12}$, senza essere in una rete ($L \neq 0$), presenta qualche altra particolarità, la stessa particolarità si presenterà nel sistema delle $\mathcal{P}_{34}$.

Si può obbiettare che le considerazioni del n⁰ prec.ᵉ ammettevano l'esistenza di un tetraedro polare comune a Q, Q_1: mentre in casi particolari un tal tetraedro può mancare. Ma anche in quei casi si sa [23] che esiste sempre almeno una reciprocità che scambia fra loro quelle due quadriche. Ed essa produce fra i quattro regoli (cioè fra C_1 e C_3, C_2 e C_4; oppure fra C_1 e C_4, C_2 e C_3) le omografie che dimostrano quanto ora abbiamo asserito.

32. In base alla rappresentazione del n⁰ 27 e seg.ⁱ delle quadrilinearità, si può dire che *la geometria projettiva delle forme binarie quadrilineari, o quadrilinearità (ad invariante* L *non nullo), equivale alla geometria projettiva del sistema di due quadriche (non degeneri).* Intendiamo in questo enunciato che i 4 campi binari delle quadrilinearità sian soggetti a sostituzioni lineari *indipendenti.*

Si abbiano 4 campi binari rappresentati rispettivamente dai regoli C_1C_2, C_3C_4 di due quadriche Q, Q_1; e 4 campi binari rappresentati rispettivamente dai regoli D_1D_2, D_3D_4 di due quadriche R, R_1. Fra $C_1C_2C_3C_4$ si consideri la quadrilinearità f determinata nel modo di cui ci stiamo occupando (n⁰ 27); e tra $D_1D_2D_3D_4$ la quadrilinearità g definita analogamente.

Se una collineazione muta Q, Q_1 in R, R_1, essa subordina 4 omografie tra i loro regoli, per esempio tra C_1 e D_1, C_2 e D_2, C_3 e D_3, C_4 e D_4, le quali mutano evidentemente f in g.

---

in sè dalla 2ª involuzione; ossia sarà punto doppio di questa. Si vede così che $\mathfrak{R}$ sarà determinata (in un numero finito di modi) dal fatto che deve far corrispondere alle 3 coppie di elementi doppi delle involuzioni di C_1 le 3 coppie di elementi doppi delle involuzioni di C_2.

(22) In un ordine che può *non* essere arbitrario: come risulterà tosto.

(23) C. SEGRE, *Teorema sulle relazioni tra una coppia di forme bilineari e la coppia delle loro forme reciproche,* Giornale di matem., 22, 1884, p. 29, veggasi il principio della p. 32 [V. queste « Opere », III, pp. 229-233, a p. 232].

Viceversa si abbiano 4 omografie binarie tra C_1D_1, C_2D_2, C_3D_3, C_4D_4, le quali mutino f in g. Le prime due definiranno una collineazione spaziale che muta Q (di cui C_1C_2 sono i regoli) in R (di regoli D_1D_2). Per ipotesi, se $x\,y\,z\,u$ sono elementi di $C_1C_2C_3C_4$ che formin quaterna di f, i loro omologhi $x'y'z'u'$ in $D_1D_2D_3D_4$ formeranno una quaterna di g. Teniamo fissi zu, e quindi $z'u'$; e lasciamo variare gli altri elementi. Avremo che nella collineazione considerata i punti xy di Q situati nel piano di due generatrici fissate di Q_1, han per omologhi i punti $x'y'$ di R siti nel piano di due determinate generatrici di R_1. Onde in quella collineazione ai piani tangenti di Q_1 rispondono i piani tangenti di R_1. La coppia di quadriche QQ_1 risulta collineare alla coppia di quadriche RR_1.

Questo teorema ([24]) ci assicura che ogni particolarità projettiva di posizione delle due quadriche Q, Q_1 si rispecchierà in una particolarità projettiva della quadrilinearità f; e viceversa. Accenneremo tosto alcune di queste particolarità.

Deduzione di alcuni casi speciali di quadrilinearità.

33. Se le due quadriche Q, Q_1 son tali che esista un tetraedro iscritto in Q e circoscritto a Q_1, dicendo x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3, x_4y_4 le coppie di generatrici dei due regoli di Q che passan pei vertici del tetraedro, e z_1u_1, z_2u_2, z_3u_3, z_4u_4 le coppie di rette dei due regoli di Q_1 che stanno nelle facce rispettivamente opposte a quei vertici, avremo che son quaterne della quadrilinearità tutte le quaterne di elementi $x_i\,y_i\,z_k\,u_k$ con $i \neq k$. Quindi un noto teorema relativo alle due quadriche ci dà quest'altro per le quadrilinearità:

Se una quadrilinearità è tale che esistan 4 coppie di elementi rispettivamente di due campi $\mathrm{x}_1\,\mathrm{y}_1$, $\mathrm{x}_2\,\mathrm{y}_2$, $\mathrm{x}_3\,\mathrm{y}_3$, $\mathrm{x}_4\,\mathrm{y}_4$, *e 4 coppie di elementi degli altri due campi* $\mathrm{z}_1\,\mathrm{u}_1$, $\mathrm{z}_2\,\mathrm{u}_2$, $\mathrm{z}_3\,\mathrm{u}_3$, $\mathrm{z}_4\,\mathrm{u}_4$, *tali che sian quaterne della corrispondenza tutte le* $\mathrm{x}_\mathrm{i}\,\mathrm{y}_\mathrm{i}\,\mathrm{z}_\mathrm{k}\,\mathrm{u}_\mathrm{k}$ *con* $\mathrm{i} \neq \mathrm{k}$, *allora esisteranno infinite tali configurazioni di elementi.* Perchè ciò accada deve annullarsi un invariante di f.

Analogamente dal teorema sull'esistenza di tetraedri polari rispetto a Q e circoscritti a Q_1, considerando che i piani tangenti a Q_1 segnano su Q le coniche imagini delle projettività $\mathcal{P}_{12}$, si trae:

([24]) Si accorda con esso il fatto che gl'invarianti assoluti indipendenti di una quadrilinearità (poichè le costanti di questa sono 15, e quelle delle 4 sostituzioni lineari sono 12) sono 3 (cfr. n⁰ 28): quanti appunto son quelli del sistema di due quadriche.

Data una corrispondenza quadrilineare, nel sistema delle projettività residue delle coppie di elementi di due campi non esistono in generale 4 projettività che siano a due a due armoniche. Ma se esiste una tal quaterna di projettività (per il che dovrà annullarsi un certo invariante della corrispondenza) *ne esisteranno infinite.* (E lo stesso fatto accadrà per le projettività residue degli altri due campi).

34. Le particolarità nella intersezione di Q, Q_1 ci conducono ad altri casi speciali di corrispondenze quadrilineari.

Se Q, Q_1 si toccano in un punto, le 4 generatrici uscenti da questo sono, per la quadrilinearità, così fatte che a tre a tre danno terne neutre. Viceversa se $x\,y\,z\,u$ son rette dei 4 regoli tali che a tre a tre danno una terna neutra, ciò significherà che il punto xy e ogni piano per z sono incidenti; ossia il punto xy sta su z; e similmente starà su u. Dualmente le 4 rette stanno in uno stesso piano. Dunque Q e Q_1 si toccano.

Se Q, Q_1 hanno una retta comune, se per esempio coincidono la retta x di C_1 e la z di C_3, ogni punto xy sta in ogni piano zu: la coppia xz è neutra. Viceversa se due rette x, z di C_1, C_3 costituiscono una coppia neutra, esse dovranno sovrapporsi [25].

35. Se Q, Q_1 si tagliano in due coniche, ad intersezioni distinte, sicchè le due quadriche saranno bitangenti, avremo nella quadrilinearità due diverse quaterne, tali, come al n^0 prec.^{e}, che gli elementi di ognuna combinati a tre a tre dànno terne neutre. Se gli elementi delle due quaterne si prendon come fondamentali per le coordinate rispettivamente nei 4 campi, dovrà f annullarsi identicamente quando si annullano tre coordinate $xyzu$ collo stesso indice; sicchè le a_{iklm} con tre o quattro indici uguali saran nulle. Restano in f solo i termini con due indici 1 e due indici 2. O, se si fa uso di coordinate non omogenee, f si riduce a contenere solo i 6 prodotti di queste 4 coordinate combinate a due a due.

Effettivamente l'equazione (28) quando si supponga $\varrho_1 = \varrho_2$, sicchè Q, Q_1 si segano in due coniche, si riduce a

$$(29)\qquad 2\varrho_1\,(xy + zu) + (\varrho_4 - \varrho_3)\,(xz + yu) - (\varrho_3 + \varrho_4)\,(xu + yz) = 0.$$

---

[25] Il fatto che, se i regoli C_1C_3 han comuni *due* rette, anche gli altri due regoli C_2C_4 avran comuni due rette, corrisponde all'altro: che se le $\mathcal{P}_{13}$ forman fascio, anche le $\mathcal{P}_{24}$ forman fascio.

Questo caso si può anche caratterizzare così: che, senza che esistan coppie neutre, la corrispondenza (2, 2) fra $C_1 C_2$, di cui al n^0 3, si spezza in due projettività. In fatti quella corrispondenza è data (n^0 28) dalla quartica comune a Q, Q_1: la quale dunque si spezzerà in due coniche; ecc. ecc.

Un caso più speciale si ha quando Q, Q_1 si tagliano in un quadrilatero. Se due lati opposti di questo si considerano come comuni ai regoli $C_1 C_3$ e gli altri due ai regoli $C_2 C_4$, si avrà una quadrilinearità con due coppie neutre su $C_1 C_3$, e con due coppie neutre su $C_2 C_4$. Se si tratta di coppie distinte, e le si prendono come elementi di riferimento nei 4 campi, la f si riduce a contenere solo i termini in $x_1 y_1 z_2 u_2$, $x_1 y_2 z_2 u_1$, $x_2 y_1 z_1 u_2$, $x_2 y_2 z_1 u_1$; o, in coordinate non omogenee, a

$$(30) \qquad axy + a'zu + cxu + c'yz = 0.$$

Sarebbe il caso che nell'equazione (29) di prima sia $\varrho_3 = \varrho_4$.

Merita pure rilievo l'altro caso speciale che Q e Q_1 si tocchino lungo una conica; si può allora porre nella (28) $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3$, sicchè diventa:

$$(31) \qquad 2\varrho_1 (xy + zu) + (\varrho_4 - \varrho_1)(xz + yu) - (\varrho_1 + \varrho_4)(xu + yz) = 0,$$

equazione che equivale alla:

$$(32) \qquad \alpha (xy + zu) + \beta (xz + yu) + \gamma (xu + yz) = 0,$$

quando sia

$$\alpha + \beta + \gamma = 0.$$

Alle proprietà speciali di questa corrispondenza quadrilineare, che derivano subito dalle cose precedenti, si può aggiungere quest'altra. *Esistono ∞^3 quaterne di omografie, interne rispettivamente ai 4 campi, tali che sempre 4 omografie di una quaterna mutano la quadrilinearità in se stessa. Si può prendere ad arbitrio un'omografia in un campo, e restan determinate le tre degli altri tre campi.* Ciò risulta fissando ad arbitrio un'omografia fra i punti della conica di contatto di Q, Q_1; riferendo i regoli di queste prospettivamente a quella conica, ne vengon 4 omografie entro a quei regoli; e si riconosce subito che la collineazione spaziale determinata dalle omografie dei due regoli di Q muterà pure in sè ciascuno dei regoli di Q_1, subordinandovi le date omografie.

Le quadriche nella relazione rilevata da G. Kohn.

36. Cerchiamo qualche proprietà di due quadriche Q, Q_1, tali che la corrispondenza quadrilineare, ottenuta al modo dei n.[i] 27 e seg.[i], abbia, fra un regolo C_1 di Q e uno C_3 di Q_1, le projettività residue $\mathcal{P}_{13}$ in una rete (26).

Ragioneremo in modo analogo al n^0 23, e otterremo un risultato simile.

Diciamo y e u due rette qualunque di C_2, C_4. La residua projettività $\mathcal{P}_{13}$ fra rette di C_1, C_3 nasce considerando come omologhe due rette x, z di questi regoli, sempre quando il punto xy è nel piano zu. Ossia: riferita prospettivamente la punteggiata y al fascio di piani u, si riferisce poi il regolo C_1 prospettivamente alla y, e il regolo C_3 al fascio di piani u. Ora l'essere le $\mathcal{P}_{13}$ in una rete equivale (n^0 8) a dire che per ogni coppia arbitraria yu di rette di C_2, C_4 ve n'è sempre un'altra $y'u'$ che ha la stessa P_{13} residua. Dunque: se riferiamo prospettivamente anche la punteggiata y' al fascio di piani u'; e poi il regolo C_1, non solo alla punteggiata y, ma anche alla y'; ne risulta un riferimento prospettivo di C_3 *simultaneamente* ai due fasci di piani u, u'. In altre parole, riguardando i due regoli C_1, C_3 come generati: C_1 da due punteggiate projettive y, y', e C_3 da due fasci projettivi di piani u, u', si ha che la punteggiata y è sezione del fascio u, e la y' è sezione del fascio u'. *Le quadriche* Q, Q$_1$ *son tali che esistono (in ∞^2 modi) due fasci projettivi di piani generatori di* Q$_1$, *i quali son prospettivi rispettivamente a due punteggiate projettive generatrici di* Q (27).

Risulta dal nostro ragionamento che basta che in un modo si possan generare le due quadriche come s'è detto, perchè ciò si possa fare in ∞^2 modi: potendosi prendere ad arbitrio in C_2 e C_4 le rette y e u, sostegni di una punteggiata, e di un fascio di piani, pro-

---

(26) Non vi è luogo a supporre che le $\mathcal{P}_{12}$ o $\mathcal{P}_{34}$ siano in una rete: perchè ciò si è dovuto escludere al n^0 27. In conseguenza l'ipotesi che le $\mathcal{P}_{13}$ (e quindi anche le $\mathcal{P}_{24}$) stiano in una rete, toglie (n^0 7) che lo stesso fatto accada per le $\mathcal{P}_{14}$ o per le $\mathcal{P}_{23}$.

(27) Questo risultato e l'altro, simile, del n^0 23, portano, per analogia, a domandare se, date due quadriche Q, Q_1, si possa sempre, o no, generare, simultaneamente, Q con due stelle reciproche e Q_1 (come inviluppo) con due piani reciproci sezioni di quelle stelle. Si trova facilmente che la cosa è sempre possibile, in generale: ossia, a differenza del caso dei fasci e punteggiate projettive, non si ha qui una particolarità di posizione delle due quadriche.

spettivi. Le rette y' e u' sostegni delle altre due forme saranno tali che y ha per corrispondente u' e y' ha per corrispondente u in una ben determinata projettività: quella a cui saranno armoniche tutte le $\mathcal{P}_{24}$.

Poichè è lo stesso dire che sono in una rete le $\mathcal{P}_{13}$, o le $\mathcal{P}_{24}$, si potran prendere i sostegni delle due punteggiate projettive in C_1, anzi che in C_2, e nello stesso tempo i sostegni dei due fasci di piani in C_3, anzi che in C_4.

37. G. KOHN (28) aveva già considerato espressamente il caso di due quadriche, generabili rispettivamente con due fasci projettivi di piani, e con due punteggiate projettive, sezioni di quei fasci; ed aveva dimostrato che se ciò è possibile, sarà in ∞^2 modi.

Egli aggiunge la seguente osservazione. Indichiamo ancora, come al n⁰ prec.ᵉ, con y, y' le due punteggiate, e con u, u' i due fasci di piani; diciamo poi A', B' i punti d'incontro di y' con Q_1, ed A, B i loro omologhi su y. I piani uA', $u'A'$ dei due fasci sasanno pure omologhi, perchè projettano uno stesso punto A' di Q_1; e d'altra parte $u'A'$ deve avere per omologo il piano uA: sicchè questo piano contiene anche A'. Dunque la retta AA', che è generatrice di Q, incontra u in un punto E; e similmente BB' incontrerà u in un punto F. Il quadrilatero semplice $EA'B'F$ avrà i suoi 4 vertici, evidentemente, sulla quartica comune a Q, Q_1; e avrà un lato ($EF \equiv u$) in Q_1, gli altri tre (EAA', $A'B' = y'$, FBB') giacenti in Q. *Le quadriche* Q, Q_1 *di* KOHN *sono caratterizzate dall'esistenza di un quadrilatero semplice iscritto nella quartica comune, con tre lati in* Q *e il* 4⁰ *lato in* Q_1. Dall'esistenza di un tal quadrilatero si deduce che ne esistono ∞^1 (e che ha luogo anche il fatto duale, scambiando le due quadriche). Anzi, per l'osservazione finale del n⁰ prec.ᵉ, vi saranno due specie di tali quadrilateri: gli uni con due lati opposti nel regolo C_1, uno in C_2 e uno in C_4; gli altri con due lati opposti in C_2, uno in C_1 e uno in C_3 (29).

38. Cerchiamo la condizione algebrica che caratterizza due quadriche Q, Q_1 nella relazione considerata.

---

(28) *Über eine besondere Lagenbeziehung von zwei Oberflächen zweiter Ordnung*, Monatshefte für Math. u. Phys., 11, 1900, p. 102.

(29) Colla rappresentazione ellittica dei punti della quartica si ritrovan subito questi fatti.

Supposto anzitutto che le quadriche siano, in forma canonica,

$$Q \equiv \Sigma\, a_{hh}\, X_h^2\,, \quad Q_1 \equiv \Sigma\, b_{hh}\, X_h^2\,, \tag{33}$$

e posto $b_{hh} = \varrho_h^2\, a_{hh}$ (cfr. n⁰ 29), l'equazione della quadrilinearità si potrà scrivere nella forma (28). Calcolando per questa gl'invarianti L, M, N, in base alla 2ª parte delle formole (24), si trova:

$$L = 16\, \varrho_1\, \varrho_2\, \varrho_3\, \varrho_4$$

$$M = -(\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \varrho_4)(\varrho_1 + \varrho_2 - \varrho_3 - \varrho_4)$$
$$(\varrho_1 - \varrho_2 + \varrho_3 - \varrho_4)(\varrho_1 - \varrho_2 - \varrho_3 + \varrho_4)$$

$$N = -(-\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \varrho_4)(\varrho_1 - \varrho_2 + \varrho_3 + \varrho_4)$$
$$(\varrho_1 + \varrho_2 - \varrho_3 + \varrho_4)(\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 - \varrho_4).$$

Per conseguenza la condizione affinchè le $\mathcal{P}_{13}$ o le $\mathcal{P}_{14}$ stiano in una rete, ossia Q e Q_1 sian quadriche di KOHN, che è data dall'annullare M o N, si potrà scrivere così:

$$\sqrt{\frac{b_{11}}{a_{11}}} + \sqrt{\frac{b_{22}}{a_{22}}} + \sqrt{\frac{b_{33}}{a_{33}}} + \sqrt{\frac{b_{44}}{a_{44}}} = 0\,, \tag{34}$$

ove i segni dei radicali non sono determinati.

Prendendo questi segni in tutti i modi possibili, si hanno 8 equazioni distinte; che moltiplicate insieme, danno:

$$\left[\Sigma\left(\frac{b_{hh}}{a_{hh}}\right)^2 - 2\,\Sigma\,\frac{b_{hh}}{a_{hh}}\,\frac{b_{kk}}{a_{kk}}\right]^2 = 64\,\frac{b_{11}}{a_{11}}\,\frac{b_{22}}{a_{22}}\,\frac{b_{33}}{a_{33}}\,\frac{b_{44}}{a_{44}}\,, \tag{35}$$

ove la 2ª somma si riferisce alle 6 combinazioni binarie degl'indici.

Ora supponiamo che le equazioni di Q e Q_1 come luoghi si abbiano sotto forma generale; e indichiamo di nuovo con Q e Q_1 queste forme generali. Si sa che nella forma canonica (33) i rapporti b_{hh}/a_{hh} risultan le radici dell'equazione in σ del discriminante di $\sigma Q - Q_1$. Diciamo Δ e Δ' i discriminanti di Q e Q_1, e poi $J_1\ J_2\ J_3$ i noti invarianti simultanei di Q, Q_1 rispettivamente di 1⁰, 2⁰, 3⁰ grado rispetto ai coefficienti di Q, e di 3⁰, 2⁰, 1⁰ grado rispetto a quelli di Q_1; sicchè la detta equazione discriminante di $\sigma Q - Q_1$ sia

$$\Delta\,\sigma^4 - J_3\,\sigma^3 + J_2\,\sigma^2 - J_1\,\sigma + \Delta' = 0\,.$$

Sarà dunque:

$$\Sigma \frac{b_{hh}}{a_{hh}} = \frac{J_3}{\Delta}, \quad \Sigma \frac{b_{hh}\, b_{kk}}{a_{hh}\, a_{kk}} = \frac{J_2}{\Delta}, \quad \Sigma \left(\frac{b_{hh}}{a_{hh}}\right)^2 = \frac{J_3^2 - 2\,\Delta\, J_2}{\Delta^2}$$

$$\frac{b_{11}}{a_{11}} \frac{b_{22}}{a_{22}} \frac{b_{33}}{a_{33}} \frac{b_{44}}{a_{44}} = \frac{\Delta'}{\Delta},$$

e la condizione (35) diverrà:

$$\left(\frac{J_3^2 - 4\,\Delta\, J_2}{\Delta^2}\right)^2 - 64\, \frac{\Delta'}{\Delta} = 0$$

ossia

$$(J_3^2 - 4\,\Delta\, J_2)^2 - 64\, \Delta^3\, \Delta' = 0. \tag{36}$$

È questa, sotto forma invariantiva, la condizione cercata ([30]).

39. Se le due quadriche si segano in un quadrilatero, si può supporre $\varrho_1 = \varrho_2$, $\varrho_3 = \varrho_4$; e risulta $M = 0$: ossia le due quadriche sono *sempre* nella relazione di Kohn (Cfr. n⁰ 35).

Se le due quadriche si toccano lungo una conica, si può porre $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3$; e si ha che è nullo M od N solo se $\varrho_4^2 = 9\,\varrho_1^2$: ossia se, entro al fascio determinato da Q, Q_1, il birapporto di queste, del piano doppio, e del cono circoscritto comune, vale 9.

In generale, se una quadrilinearità ammette una quaterna $a_1\, a_2\, a_3\, a_4$ tale che 3 elementi qualunque fra i quattro formino sempre una terna neutra (come le 4 generatrici di Q, Q_1 in un punto di contatto: v. n⁰ 34), la $\mathcal{P}_{13}$ residua di $a_2 a_4$ ha a_1 e a_3 come elementi singolari. Quindi se $M = 0$, ossia se le $\mathcal{P}_{13}$ sono armoniche ad una projettività fissa, questa avrà a_1 e a_3 come elementi omologhi. Quest'osservazione si può applicare alle quaterne di generatrici di Q, Q_1 passanti per un punto di contatto. In particolare, se Q e Q_1 si toccano lungo una conica e presentano il caso or ora accennato, la projettività armonica a tutte le $\mathcal{P}_{13}$ sarà quella fra i regoli $C_1\, C_3$ in cui si corrispondono rette che s'incontrano sulla detta conica.

([30]) J. H. Grace, *Tetrahedra in Relation to Spheres and Quadrics* (Proc. Lond. Math. Soc., (2) 17, 1919, p. 259), incontra (a p. 263) questa condizione (36), per esprimere un'altra relazione fra le quadriche Q, Q_1. Ma questa lo conduce pure all'esistenza di quadrilateri di generatrici, come quelli del n⁰ 37: donde un legame colla relazione di Kohn.

Le quadrilinearità segate su quattro rette dai piani dello spazio.

40. Fissate 4 rette C_1 C_2 C_3 C_4, se si associano quattro loro punti, sempre quando siano complanari, si ottiene una quadrilinearità, il cui studio è molto ovvio ([31]).

Essa presenta particolarità che si riconoscono subito. Limitandoci al caso che le 4 rette siano a due a due sghembe, è chiaro che una retta incidente a tutte quattro segnerà su esse quattro punti che a tre a tre formano terna neutra per la corrispondenza. Perciò nel caso generale che son due le rette incidenti alle C, la quadrilinearità offrirà la singolarità di cui al principio del n⁰ 35, corrispondente al caso che le quadriche Q, Q_1 si taglino in due coniche. La corrispondenza (2, 2) del n⁰ 3 fra C_1 e C_2 si ha qui accoppiando punti di queste due rette, tali che la loro congiungente incontri C_3, oppure C_4: sicchè si spezza in due projettività, come in quel caso. Ecc. ecc.

Il caso che le 4 rette C ammettano una sola retta quadrisecante risponde al caso che le coniche comuni a Q, Q_1 si tocchino; e quello in cui le quadrisecanti sono infinite, ossia le 4 rette C stanno in un regolo, risponde al caso, con cui finiva il n⁰ 35, che Q e Q_1 si tocchino lungo una conica.

Se vi sono almeno due quadrisecanti distinte, prendiamo i 4 punti fondamentali delle coordinate nelle loro intersezioni con C_1, C_2. Si potranno rappresentare le coordinate dei punti di C_1 C_2 C_3 C_4 in funzione rispettivamente di 4 parametri variabili x, y, z, u così:

$$(1\ x\ 0\ 0),\ (0\ 0\ 1\ y),\ (1\ z\ a\ bz),\ (1\ u\ 1\ u).$$

Annullandone il determinante, porremo la condizione di complanarità di quei punti; ossia otterremo l'equazione della corrispondenza quadrilineare. Viene:

$$(37)\quad (a-1)xy+(b-1)zu-bxz-ayu+xu+yz=0\,.$$

([31]) Cfr. Le Paige, § III. Ivi si trova, fra altro, rilevato che, se le quattro rette sono i lati di un quadrilatero sghembo, l'equazione della corrispondenza si può mettere sotto la forma (12).

Sono anche molto facili da studiare (e non staremo a discorrerne) le particolari corrispondenze quadrilineari che i piani dello spazio segnano su una cubica sghemba e una retta; su due coniche non complanari; su una conica e due rette (esterne al piano della conica).

Si riconosce subito che l'equazione contenente i soli 6 prodotti di $x\ y\ z\ u$ combinate a due a due si può, in generale, ridurre a questa forma. Dunque: *la quadrilinearità segata su 4 rette generiche dai piani dello spazio rappresenta il caso generale di corrispondenza quadrilineare con due quaterne speciali come al* n^0 35, *ossia colle corrispondenze* (2, 2) *spezzate in coppie di projettività.*

I due invarianti assoluti di quella specie particolare di quadrilinearità sono qui dati dai birapporti a, b delle due quaterne di punti in cui le 4 rette C si appoggiano sulle due quadrisecanti.

41. *Come devon essere le* 4 *rette* $C_1\ C_2\ C_3\ C_4$ *affinchè le projettività residue, per es. le* $\mathcal{P}_{12}$, *stiano in una rete?* Ciò è come dire che l'invariante L s'annulla. Ora dalla 1ª delle (24), relativa alla forma (22), applicandola alla forma (37) si ha:

$$L = -(a-1)(b-1)(ab-1).$$

Porre $a = 1$, oppure $b = 1$, significherebbe che le rette C_3, C_4 sono incidenti, il che escludiamo. Resta $ab = 1$: ossia *i birapporti delle due quaterne di punti che le* 4 *rette* C *segnano sulle due trasversali comuni sono fra loro reciproci.*

Ciò si può vedere anche geometricamente. Diciamo $a_1\ a_2\ a_3\ a_4$ e $b_1\ b_2\ b_3\ b_4$ quelle due quaterne di punti. Se le $\mathcal{P}_{12}$ sono in una rete, cioè sono armoniche ad una projettività fissa $\mathcal{R}$, poichè fra le $\mathcal{P}_{12}$ (che son segnate su C_1 e C_2 dai fasci di piani aventi per assi le rette appoggiate a C_3 e C_4) vi è evidentemente la projettività degenere che ha per punti singolari a_1 e a_2, e similmente quella che ha per punti singolari b_1 e b_2; saranno omologhi nella $\mathcal{R}$ tanto a_1 e a_2, quanto b_1 e b_2. Quindi quelle $\mathcal{P}_{12}$ in cui si corrispondono a_1 e b_2 avranno pure per corrispondenti b_1 e a_2. Ciò è come dire che le rette appoggiate a C_3, C_4 e alla retta $a_1 b_2$ si appoggiano pure alla $b_1 a_2$. Ossia: C_3, C_4, $a_1 b_2$, $b_1 a_2$ son 4 rette di uno stesso regolo. Considerando le due trasversali comuni alle C (e a queste), si deduce che la quaterna di punti $a_1\ a_2\ a_3\ a_4$ è projettiva alla $b_2\ b_1\ b_3\ b_4$.

La proposizione resta vera anche quando quelle due trasversali comuni alle C coincidono: come prova un calcolo diretto. È il caso che la quaterna dei punti d'incontro delle C coll'unica trasversale sia projettiva alla quaterna dei piani congiungenti le rette stesse a questa trasversale. La proposizione si riduce allora a questa: che le dette quaterne sono armoniche. Anche se le 4 rette C sono in un regolo, esse dovranno entro questo formare un gruppo armonico, se le $\mathcal{P}_{12}$ han da stare in una rete.

42. Al n⁰ 40 è risultato che la corrispondenza segnata su 4 rette dai piani dello spazio è della stessa natura di quella che avevamo considerato fra i regoli delle due quadriche Q, Q_1, quando queste si segano in due coniche. Riferendo questi regoli a quelle 4 rette punteggiate in modo che le due quadrilinearità si corrispondano, si viene a porre una notevole corrispondenza, ad esempio, fra le coppie composte di un punto di Q e un piano tangente di Q_1, incidenti, ed i piani dello spazio, con cui si segan le 4 rette, oppure i punti dello spazio come intersezioni di una retta appoggiata a due di quelle e di una retta appoggiata alle altre due. Ai due punti di contatto delle due quadriche (distinti o no) vengono a corrispondere, come già appariva, le due quadrisecanti delle 4 rette. Se le quadriche hanno una conica di contatto, le 4 rette stanno in un regolo.