Corrado Segre

C. G. C. von Staudt e i suoi lavori, (Prefazione alla trad. it. della "Geometrie der Lage" di Staudt)

in: , Bocca, Torino, 1889, p. 5–21

in: Corrado Segre, Opere, a cura della Unione Matematica Italiana, Volume IV, Edizione Cremonese, Roma, 1963, p. 372–386

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Segre_CW_4_372>

LXXVIII.

C. G. C. V. STAUDT ED I SUOI LAVORI (1)

Prefazione al volume:
Geometria di posizione di C. G. C. von STAUDT.
Traduzione dal tedesco a cura del Dr. M. PIERI. Torino, Bocca, 1889, pp. XXVIII + 236.

> Imparino i giovani ad educarsi di buon'ora sui capolavori dei grandi maestri... Coi forti studii sui grandi modelli si son fatti in ogni tempo i valenti; e con essi dee farsi la nostra nuova generazione scientifica, se vuol esser degna dei tempi a cui nacque e delle lotte a cui è destinata.
>
> BELTRAMI (2).

CARLO GIORGIO CRISTIANO VON STAUDT nacque il 24 gennaio 1798 a Rothenburg sulla Tauber, città di Baviera situata presso al confine settentrionale del Würtemberg, ed anticamente retta come repubblica indipendente. Il padre Giorgio aveva, come già in generale i suoi antenati nella famiglia patrizia a cui apparteneva, una parte importante nell'amministrazione di quel piccolo Stato. Aiutato efficacemente dalla moglie, egli diresse con somma cura l'educazione dei tre figli che su sette avuti sopravvissero ed ultimo fra i quali era appunto il futuro geometra. Questi, ricevuta l'istruzione primaria

---

(1) Fra le notizie biografiche contenute in questo scritto alcune sono tratte da necrologie ed elogi di S. pubblicati alla sua morte e tutte le altre da ricordi personali che gentilmente ci furono comunicati da antichi colleghi e discepoli di lui. Per le notizie forniteci e per quelle che col loro aiuto potemmo avere ringraziamo in particolar modo i signori Dott. A. PAPELLIER di Bayreuth (k. Regierungsrath), genero di S.; Prof. M. NÖTHER dell'Università di Erlangen alla quale appartenne S.; e Dott. K. RUDEL, attualmente professore di matematiche al Ginnasio di Nürnberg e che negli ultimi due anni di vita di S. ne fu discepolo affezionato.

(2) V. le considerazioni premesse alla traduzione italiana della Commemorazione di PLÜCKER fatta da CLEBSCH, Giornale di matem., 11, p. 153.

nelle scuole della sua città natìa, entrò nel 1814 nel ginnasio della vicina Ansbach, ove percorse tutte le classi con bellissimo esito, lodato per la diligenza somma che metteva in tutti gli studi e mostrando fin d'allora una particolare preferenza per le matematiche. Licenziato con la medaglia d'onore, si diede tutto allo studio di queste scienze, frequentando specialmente per vari semestri a partire dal 1817 l'Università di Gottinga. Ivi ebbe a maestro GAUSS, che esercitò tosto su di lui una grande influenza e che non tardò a concepire grande stima ed affetto pel giovane S., dandogliene ripetute prove. Così, avendo quel sommo matematico proposto ai suoi allievi qualche questione, voleva poi scambiare la sua propria soluzione con quella di S., sicuro, diceva bonariamente sorridendo, che entrambi sarebbero rimasti ugualmente soddisfatti dello scambio. Ed un giorno, parlando di certe teorie, egli ebbe a dire a S.: « Ella non ha più bisogno di udirmi; Ella si trova già al di là di questo ». Nè le relazioni tra maestro e discepolo si sciolsero poi per la lontananza, giacchè pare che S. continuasse a ragguagliare quel grande delle ricerche che andava facendo.

Nel 1822 S. si laureò all'Università di Erlangen, ed in seguito ad un brillante esame d'abilitazione dato in Monaco fu nominato professore di matematiche al Ginnasio di Würzburg; inoltre nello stesso anno veniva nominato libero docente in quest'Università. Nel 1827 passò al Ginnasio di Nürnberg, dietro invito del Rettore di questo, e vi stette fino al 1835, insegnando simultaneamente nella scuola politecnica (più tardi soppressa) di quella città. Nei ginnasi bavaresi durò a lungo il ricordo della valentia e dell'attività spiegate da S. nell'insegnamento secondario. Nel 1835 egli veniva chiamato come professore ordinario di matematiche all'Università di Erlangen ed in questa carica rimase fino al termine della sua vita. Vita tranquilla di un uomo pieno di bontà e di modestia, esempio di costumi semplici e di severa virtù, amante della solitudine, ma gioviale in compagnia, scrupolosissimo nell'adempimento dei suoi doveri, coscienzioso in tutto, ed occupato specialmente dai pensieri della famiglia, delle ricerche scientifiche e dell'insegnamento.

Affezionatissimo fin dalla prima età alla famiglia e particolarmente alla madre, godeva per questa delle distinzioni che gli procuravano i suoi studi; e più tardi, durante la lunga vedovanza di lei, la visitava regolarmente in tutte le vacanze che i suoi uffici gli lasciavano. Nel 1822 si sposò con JEANETTE DRECHSLER di Nürnberg, che poi morì nel 1848, e ne ebbe un figlio, EDOARDO, che occupa attualmente un posto elevato nell'amministrazione forestale bavarese, ed una figlia, MATILDE, morta nel 1885; marito e padre amoroso, ebbe dai suoi cari dolci soddisfazioni.

Si occupava continuamente con lo studio e con ricerche originali; nelle sue passeggiate solitarie lo si vedeva spesso assorto in meditazioni matematiche. Ma era alieno dal pubblicare cose che non credesse essenzialmente utili, o per la novità dei risultati, o per scopo didattico; in conseguenza i lavori da lui lasciatici non sono molti e formerebbero, insieme riuniti, un volume di non grande mole. Essi si dividono in due classi distinte; analitici gli uni ed anzi relativi quasi tutti alla teoria dei numeri, geometrici gli altri. Tanto i due primi quanto i due ultimi lavori pubblicati da S. appartengono l'uno all'una e l'altro all'altra classe. Quasi tutti hanno comuni certi caratteri: uno scopo importante ed un'esposizione chiara, esatta, ben ordinata e molto concisa, a cui giungeva solo rifacendo più volte ciascun lavoro e rendendolo ogni volta più stringato (3).

I lavori analitici mostrano la forte influenza esercitata su S. da GAUSS, e si può dire che derivano da questo. Qualcuno anzi ha per scopo principale il divulgare idee di quel grande, esponendole sotto forma più elementare. Così è del primo scritto di S., pubblicato nel 1825 in un programma del Ginnasio di Würzburg, « *Möglichst einfache Entwicklung des Gaussischen Theorems die Theilung des Kreises betreffend* (4) », in cui si giunge al teorema contenuto nelle *Disquisitiones Arithmeticae* sulla riduzione ad equazioni di grado inferiore del problema della divisione del cerchio in un numero primo di parti uguali per una via assai piana, partendo dalla dimostrazione delle proposizioni più elementari relative alla divisibilità dei numeri interi ed alle congruenze (5). Similmente un « *Beweis des Satzes, dass jede algebraische rationale ganze Function von einer Veränderlichen in Factoren vom ersten Grade aufgelöset werden kann* » (Crelle, XXIX, 1845, pp. 97-102), coincide, quanto al concetto principale, con una notissima dimostrazione di GAUSS di quel teorema fondamentale dell'algebra; ma S. vi giunge partendo dalle proprietà più elementari delle funzioni intere senza supporre quasi nulla di noto.

---

(3) Distruggeva sempre i suoi manoscritti e nulla lasciò d'inedito. Quanto ai lavori pubblicati l'elenco che ne andremo facendo è, se non erriamo, completo.

(4) In-4°, di pp. 16.

(5) Dopo quel lavoro conviene che ricordiamo la « *Construction des regulären Siebenzehnecks* » enunciata nel vol. XXIV del Giornale di Crelle (1842, p. 251).

S. seppe anche in questo stesso campo di ricerche dare alla scienza nuovi ed importanti risultati. Con grande semplicità, adoperando molto abilmente certe congruenze, egli riuscì pel primo a scoprire un teorema notevolissimo sui numeri di BERNOULLI, dal quale si ha un'espressione generale molto semplice della parte fratta di questi numeri; ma non pubblicò la sua dimostrazione che molti anni dopo d'averla trovata (*Beweis eines Lehrsatzes, die Bernoullischen Zahlen betreffend*, Crelle, XXI, 1840, pp. 372-374), cioè quando seppe che Th. CLAUSEN era giunto allo stesso risultato. E nella Memoria « *Ueber die Functiones* Y *und* Z, *welche der Gleichung* $4(x^p - 1)/(x - 1) = \mathrm{Y}^2 \mp \mathrm{p}\mathrm{Z}^2$ *Genüge leisten, wo* p *eine Primzahl der Form* $4\mathrm{k} \pm 1$ *ist* » (Crelle, LXVII, 1867, pp. 205-217) egli dava poco prima di morire nuove prove della sua valentìa nella teoria dei numeri; chè quantunque già LEGENDRE si fosse occupato di quelle funzioni Y e Z e della loro determinazione, S., che conobbe ciò solo quando la sua ricerca era compiuta, potè ancor pubblicarla per la novità delle proprietà dei coefficienti di Y e Z e delle formole generali per calcolarli da lui trovate e per le notevoli applicazioni fattene alla teoria dei resti quadratici.

Alla geometria elementare, e più specialmente alla poligonometria e poliedrometria, dedicò le due Note « *Ueber die Inhalte der Polygone und Polyeder* » (Crelle, XXIV, 1842, pp. 252-256), e « *Ueber einige geometrische Sätze* » (Crelle, LVII, 1860, pp. 88-89) (6), in cui si trovano risultati notevoli, introdotti oggidì anche in trattati elementari; così nella 1ª si trova definito ed usato per la prima volta il seno di un triedro ed è determinato il prodotto dei volumi di due poliedri o delle aree di due poligoni piani come funzione intera dei quadrati delle distanze tra i loro vertici; nella 2ª si trovano nuove proprietà metriche del tetraedro, in cui compare il raggio della sfera circoscritta od il cerchio circoscritto ad una faccia, ecc.

Ma le ricerche che principalmente occuparono la vita scientifica di S. furono quelle di geometria projettiva. Il suo primo lavoro in questo campo « *Ueber die Curven II. Ordnung* » comparve nel 1831

---

(6) Sulla 1a di esse è compilato il lavoro intitolato « *Théorèmes sur les aires des polygones et les volumes des polyèdres* » del vol. XI dei Nouv. Ann. de Math., 1852, pp. 299-304; mentre le proposizioni della 2a erano state proposte da S. a dimostrare nella Nota « *Théorèmes sur le tétraèdre* », Nouv. Ann. de Math., 18, 1859, p. 441.

in un programma del Ginnasio di Nürnberg (7); esso contiene molte proprietà, descrittive e metriche, delle coniche, fra cui parecchie nuove (8), ordinate in modo che ogni proposizione è seguita dalla duale. Però, per quanto riguarda il metodo, questo lavoro, scritto quando il *Traité des propriétés projectives des figures* (1822) di PONCELET era già universalmente conosciuto, mentre il *Barycentrische Calcul* (1827) di MÖBIUS passava ancora affatto inosservato e la *Systematische Entwickelung* (1832) di STEINER non era peranco comparsa, sembra ispirato unicamente allo studio del grande geometra francese. Invero tutte le proposizioni s'intendono dedotte mediante projezione da loro casi particolari, ad es. proprietà relative ad una conica, un punto e la sua polare, da quelle relative ad un cerchio col suo centro e la retta all'infinito; ed è fatto largo uso di quel principio di continuità pel quale PONCELET ebbe tanto a battagliare, ammettendosi tacitamente per due coniche qualunque le proprietà che solo furono dimostrate per le due coniche projezioni di due cerchi e trattando gli elementi immaginari come quelli reali, senza alcuna considerazione speciale.

Qualche tempo dopo questo metodo non gli pareva più soddisfacente. Studiate specialmente le tre opere suddette (che soleva poi indicare con preferenza ai giovani), e concentratosi in lunghe meditazioni sulle ricerche geometriche e sull'insegnamento geometrico, finì per acquistare la convinzione da un lato che occorreva introdurre maggior rigore nei fondamenti e nei metodi della geometria, dall'altro che la distinzione fra proprietà descrittive o di posizione e proprietà di grandezze o metriche delle figure, che già PONCELET aveva introdotta largamente, si poteva e si doveva rendere ancor più netta, dando alla geometria di posizione un'assoluta indipendenza da quella metrica, cioè dal concetto di misura. E S. riuscì, mediante un lavorìo ammirabile d'ingegno e di pazienza, ad ottenere questi intenti ed a dotare la geometria pura di un'opera veramente classica che, riunendo le ricerche dei suoi predecessori e le sue proprie sotto un unico indirizzo, soddisfacesse ai nuovi elevati ideali di lui; così nacque la *Geometrie der Lage*, pubblicata nel 1847 (9) e proseguita poi con i *Beiträge zur Geometrie der Lage* che

(7) In-4⁰, di pp. 23.

(8) Alcune di esse si ritrovano poi nell'opera principale di S.

(9) Nürnberg, Fr. Korn; in-8⁰, di pp. 216.

comparvero in tre fascicoli rispettivamente negli anni 1856, 1857 e 1860 (10).

La *Geometrie der Lage* non presuppone alcuna nozione geometrica nel lettore, ma partendo dai più elementari concetti geometrici, giunge a stabilire le principali teorie della Geometria projettiva. Le definizioni che qui si trovano di projettività in forme di 2ª e 3ª specie sono evidentemente le più semplici e le più naturali che si possano dare; esse mostrano che la ingegnosa definizione mediante gruppi armonici della projettività fra forme di 1ª specie dovuta a S. è pur essa da preferirsi a qualunque altra. Anche le coniche e le quadriche trovan qui una nuova definizione, cioè mediante le polarità nel piano e nello spazio: definizione che sulle altre note offre vantaggi di facilità, simmetria ed unità di metodo. Così in sostanza l'ordinamento dell'opera viene a farsi in modo ammirabile per semplicità ed eleganza con le projettività: dopo una conveniente preparazione si ha la teoria generale della projettività tra forme di 1ª specie, e poi quella per forme di 2ª e 3ª specie, indi le teorie delle projettività particolari, cioè involutorie, collineazioni involutorie e polarità ed in particolare coniche, quadriche e sistemi nulli. In quest'ordinamento sono però inserite opportunamente alcune nozioni generali importanti, relative specialmente a proprietà di posizione e forma di linee, superficie, ecc.; ad es. delle considerazioni nuove sulle linee, superficie, ecc., chiuse d'ordine pari e d'ordine impari, che oggidì servono di base negli studi di proprietà di forma delle linee e superficie algebriche (11).

Il fine che S. si propose nello scrivere questo libro ne mostra già la grande importanza. Trattare tutta la geometria di posizione da sè, senza introdurre concetti metrici che le sarebbero estranei, costituì un grande progresso, poichè se è vero che le varie scienze debbono prestarsi scambievoli aiuti e che molte grandi scoperte son derivate appunto dal collegare fra loro dottrine apparentemente molto disparate, non è men vero che risultati altrettanto importanti si son

(10) Nürnberg, Fr. Korn; in-8⁰, di pp. 396.

(11) È bene osservare a questo proposito che alcune proprietà delle linee, superficie, ecc. che S. enuncia soltanto e su cui poi si basa, van tenute come postulati relativi agli enti che si propone di considerare (od al movimento con cui li immagina descritti), validi ad esempio per gli enti algebrici, ma non per *tutte* le linee, superficie, ecc.; così quando si dice che certi numeri sono pari od impari si sottintende per gli enti considerati una restrizione tale che quei nunumeri risultino finiti.

visti ad esempio nell'analisi, nella geometria, nella meccanica quando in ciascuna di esse si è cercato di ridurre i postulati, i metodi e gli strumenti di ricerca al minor numero possibile ([12]). Da questa purezza di metodo si rese visibile che, come osservò F. KLEIN, la geometria projettiva vale indipendentemente dal postulato sulle parallele. Solo da essa fu messa in piena luce la legge di dualità tra le proprietà descrittive delle figure e provato come questa legge si possa utilizzare in tutta la sua pienezza fin dai principii. Da essa infine la *G. d. L.* trasse la sua grande importanza didattica, poichè, costringendo a ragionare sempre sugli enti geometrici che si studiano senza mai deviare con calcoli l'attenzione da quelli, viene a formare e ad esercitare potentemente la facoltà d'intuizione geometrica dello studioso. Chè se talvolta i giovani trovano maggiori difficoltà in ragionamenti puramente geometrici che in quelli misti con considerazioni metriche, è però certo che dai primi il loro ingegno trae maggiori vantaggi che da questi. E fu principalmente per lo stesso fine che S. volle che il suo libro non avesse figure: studiandolo senza uso di queste o facendosi solo, man mano che legge, le figure più difficili da concepire, il lettore avrà forse maggior fatica, ma si rafforzerà di più la concezione geometrica.

Ammirabile è il rigore che regna in quest'opera. Ogni proposizione è enunciata con tutte quelle restrizioni che occorrono perchè essa sia assolutamente vera, cosa che ben pochi sogliono fare, ma che, malgrado la lunghezza che talora produce negli enunciati, ci pare necessaria in un'opera didattica. La grande accuratezza e precisione del linguaggio rendono poi impossibili le ambiguità. Lo stile è del pari ammirabile per la sua concisione straordinaria, forse unica: le proposizioni son date in tutta la loro generalità e si lascia al lettore di considerarne dei casi particolari; si vede che le singole parole sono state ben vagliate sì da omettere tutte quelle che non erano assolutamente indispensabili; ma ogni parola rimasta ha uno scopo e se alla prima lettura non si è afferrato bene un ragionamento e si rimprovera S. di eccessivo laconismo, rileggendolo si muta d'avviso, poichè si trova che non si era bene osservato una parola,

---

([12]) Che l'una e l'altra cosa debbano proporsi le scienze è conforme alla legge generale d'evoluzione di HERBERT SPENCER. Eppure l'idea di S. non fu da principio accolta favorevolmente da coloro che la giudicarono e persino l'acuto ingegno di H. HANKEL (nella bella introduzione agli *Elemente der proj. Geometrie*), pur lodando la *Geometrie der Lage,* le rimproverava l'esclusione delle proprietà metriche come contraria alla natura!

o non si era tenuto conto del sito occupato da quella proposizione dopo altre, o non si era cercato la ragione per cui in quella si citava un numero precedente, ecc.

Verso la fine della *G. d. L.* S. stimò conveniente introdurre le locuzioni di « coppia di elementi immaginarî », « conica immaginaria », ecc. affine di abbreviare certi enunciati relativi a coniche, quadriche, ecc. Ma di questi enti immaginarî egli non poteva far molto uso: per poter trattare a fondo secondo il suo modo di vedere certe teorie che potevano far seguito alla *G. d. L.* era necessario, sì, introdurre gli elementi immaginarî, ma non a coppie, bensì definendoli in modo da staccare ognuno di essi dal suo coniugato. Una tal definizione egli non riuscì a trovare che qualche tempo dopo la pubblicazione della *G. d. L.*: da essa ebbero origine i *Beiträge zur G. d. L.*

Non crediamo di doverci fermare su quella definizione, così ingegnosa e naturale nel tempo stesso (13), nè di dover mostrare qual grande progresso la geometria pura, per cui gli elementi immaginarî non costituivano dapprima veri enti, ma solo una locuzione opportuna, fece quando S., definitili geometricamente, estese ad essi tutta la geometria di posizione e con la loro introduzione completò questa scienza. Già sono ben noti i difetti di rigore e gli altri inconvenienti in cui erano incorsi i geometri che prima (14) dei *Beiträge* si occuparono degl'immaginarî. Invece la trattazione che in quest'opera se ne trova è perfetta ed in essa si rileva continuamente un ingegno così potente che chiunque la legga con attenzione ne rimane entusiasmato e si persuade che S. va posto fra i più grandi geometri di tutti i tempi.

I *B.*e cominciano con alcuni paragrafi, che sono veri complementi alla teoria delle projettività in genere e specialmente di quelle involutorie data nella *G. d. L.* Definiti poi i varî elementi immaginarî e le operazioni su essi, si prova che le proposizioni fondamentali della geometria di posizione valgono ancora con l'estensione data al concetto di elemento. Quindi si studiano gli elementi immaginarî nelle projettività (in particolare nelle polarità) reali. Per definire e studiare le projettività più generali fra forme di 1a specie, da

(13) Per un punto immaginario al finito la rappresentazione *armonica* dà per caso particolare, come S. stesso osservò (*Beiträge*, n° 141), una certa rappresentazione mediante due punti reali presi in un determinato ordine, la quale in sostanza si trova in un gran numero di lavori anteriori e posteriori a S. (ed anche in questi ultimi tempi fu data come cosa nuova!).

(14) E dopo!

cui poi si passa a quelle fra forme di 2ª e 3ª specie, serve uno studio estremamente ingegnoso ed accurato del *verso* e delle *catene* di elementi nelle forme semplici, studio che il grande acume di S. vide doversi basare sulla retta immaginaria di 2ª specie. Non meno ammirabile è il modo con cui si giunge ad operare per addizione, moltiplicazione, elevazione a potenza sulle tetradi (*Würfe*) ed infine a rappresentare i valori di queste con numeri complessi ed a stabilire i sistemi di coordinate (projettive) nelle varie forme. E dopo d'aver estese tutte le principali teorie della *G. d. L.* ed acquistati gli strumenti necessari per proceder oltre, vien proseguito lo studio delle linee e superficie di 2⁰ ordine, vengono studiate le varie specie di fasci che esse possono formare, le linee sghembe di 3⁰ e 4⁰ ordine (intersezioni di quadriche), le varie specie possibili di collineazioni, ecc.

Queste ricerche sono fatte con una cura straordinaria: nelle classificazioni sono veramente ottenuti tutti i casi possibili; di ogni ente studiato sono trovate tutte le principali proprietà note e moltissime nuove. Nella *G. d. L.* ed ancor più nei *B.ᵉ* s'incontrano molte proposizioni notevoli e che ancor oggidì sembrano esser passate inosservate o sono date come nuove in recenti lavori; ma noi non staremo a citarne. Solo aggiungeremo che tutti i pregi della *G. d. L.* si ritrovano nei *Bᵉ*. Se la trattazione fatta in questi degli elementi immaginarî è molto lunga e minuziosa, ciò è nella natura dell'argomento, e non sembra probabile che in questa teoria si possano introdurre molte semplificazioni sostanziali.

L'importanza di una nuova teoria è tanto maggiore quanto più capace essa è di venir estesa e quanto più importanti sono le ricerche che ne derivano. Anche per questo aspetto sono importanti in sommo grado la *G. d. L.* ed i *Bᵉ*. Così la fecondità dei metodi della prima si rende manifesta a chi legge i *B.ᵉ* vedendo come varie cose di quella vengano in questi generalizzate o completate con gli stessi ragionamenti. Così nelle ricerche che ora si vanno facendo nella geometria projettiva degli spazi superiori si vede come quasi tutta l'opera di S. si possa, senza mutare la natura dei metodi, estendere a quella scienza. E già abbiamo rilevato il fatto che il grande edifizio innalzato da S. si regge ancora nelle ipotesi della geometria non-euclidea. Infine osserveremo che recentemente si è riusciti a proseguire quell'opera cominciando a fare per la trattazione sintetica delle curve piane d'ordine superiore (coi loro elementi immaginarî) ciò che S. aveva fatto per le curve e le superficie di 2⁰ ordine; e di più, molto di più, si vedrà fatto fra breve, sempre seguendo le orme di quel grande.

Un'applicazione di cose contenute nei suoi libri fece S. stesso nella Nota: « *Ueber die Steiner'schen Gegenpunkte, welche durch zwei in einer Curve II. Ordnung beschriebene Dreiecke bestimmt sind* », scritta nel 1862 (Crelle, LXII, 1863, pp. 142-150): in essa studia la figura costituita da due triangoli iscritti in una conica con le 6 corrispondenti rette di PASCAL ed i due relativi punti di STEINER, e trova fra l'altro una nuova proprietà di questi; i ragionamenti semplici ed eleganti appartengono ancora alla pura geometria di posizione.

Ma S. non era esclusivista, e se giustamente credette bene di trattare la geometria di posizione indipendentemente da quella metrica, era però ben lungi dal pensare che questa si dovesse trascurare. Al contrario, egli pensava che le proposizioni generali della geometria di posizione dovessero rendere grandi servigi nella ricerca delle proprietà metriche delle forme. E saggi di ciò diede con le belle *Appendici* che nella *G. d. L.* e nei *B.*^{e} dedicò alle proprietà metriche più essenziali, specialmente delle coniche e delle quadriche, tra cui oltremodo notevoli sono quelle relative alla curvatura di queste.

Pare anzi che egli avesse in animo di dare alla *Geometrie der Lage* una sorella in una *Geometrie des Masses*, cioè in un'opera che trattasse ampiamente secondo i metodi di S. le proprietà metriche delle figure. Ma questo disegno, forse per ragioni di salute, non fu posto ad effetto interamente, e S. si limitò negli ultimi suoi giorni a destinare ad uno scopo più ristretto l'opuscolo: « *Von den reellen und imaginären Halbmessern der Kurven und Flächen II. Ordnung* » ([15]). Con lo stesso rigore con cui già si era fatto per le proprietà grafiche si trovano ivi introdotti nelle relazioni metriche i punti immaginari delle curve e superficie di II. ordine (definite con polarità reali). Quasi tutte le principali relazioni qui contenute sono nuove e molto generali; gl'invarianti metrici di una quadrica (o conica) sono ottenuti in più modi, ad es., determinandola mediante il centro ed un tetraedro polare; gl'invarianti di una sezione piana della quadrica sono implicitamente determinati mediante gl'invarianti di questa e la posizione del piano; i teoremi noti sui quadrati di diametri coniugati oppure perpendicolari di una quadrica (o conica) risultano come casi particolari di un teorema nuovo relativo a due quadriche (o coniche) concentriche, ecc. ecc.

([15]) Nürnberg, 1867, Bauer und Raspe; in-8^0, di pp. 59.

S. fu altrettanto valente nell'insegnamento quanto nella ricerca scientifica. All'Università di Erlangen faceva spesso due corsi: uno che poteva interessare studenti di tutte le facoltà, ad es. sull'Astronomia, ed a questo aveva un numero abbastanza considerevole di uditori; l'altro destinato specialmente ai matematici, nel quale trattò vari argomenti, spesso elementari. A questo corso (essendo quasi sempre quell'Università assai poco frequentata dagli studenti di matematiche) aveva pochissimi studenti, non di rado solo uno o due ([16]); e perciò lo faceva spesso in casa sua, seduto con quelli ad un tavolo. Avendo un'assoluta padronanza dell'argomento che trattava (il che gli permetteva di illuminare in vario modo le cose che esponeva e di collegarle con cose già note), ed essendo dotato di una chiarezza d'idee e di linguaggio, di una finezza ed eleganza di esposizione non comuni, le sue lezioni venivano ad esercitare un fascino speciale ed un'impressione profonda sui suoi studenti. A quelle popolari sapeva dare una vaghezza singolare piena di vita che attraeva gli uditori, interessandoli coll'indicar loro quei problemi della vita pratica che sono risolti ed illuminati da metodi matematici. Nelle lezioni puramente matematiche egli non professava, ma piuttosto lavorava cogli studenti, spingendoli di proposizione in proposizione, sì che a questi paresse di creare tutto da sè e che acquistassero da sè l'intima convinzione della verità, anzi della necessità di ognuna; ed a questo suo metodo dava grande importanza. Egli condannava ogni dimostrazione che conducesse al risultato finale penosamente con lunghi ed artifiziosi giri; voleva invece la massima semplicità, trasparenza e naturalezza. S'accorgeva subito se dai suoi uditori non era inteso, ed allora modificava tosto, anche in più modi, la sua via, approfittando della copia di metodi e di dimostrazioni che aveva a sua disposizione. Non usava tavole nere, e di figure si serviva quanto meno poteva.

Per vari semestri (in particolare negli ultimi di sua vita) spiegò la geometria di posizione seguendo la sua opera passo passo. In un suo breve scritto che sta in un opuscolo diretto agli studenti dell'Università di Erlangen ([17]) si trovano le ragioni dell'importanza da

---

([16]) E forse vi fu qualche semestre in cui non potè fare quel corso per mancanza assoluta di uditori.

([17]) « *Zum Studium der allgemeinen Wissenschaften* » (Erlangen, Junge u. Sohn, 1850); lo scritto per la Matematica (pp. 3-6) è appunto quello di S. Contiene, oltre a quello che su riferiamo, altri consigli notevoli per gli studenti. Al giovane che vuol riconoscere se ha o no inclinazione pel culto delle matematiche suggerisce lui data all'insegnamento geometrico. « Ogni studente, egli dice, che « voglia dedicarsi all'insegnamento matematico, deve particolarmente « rendersi ben famigliare la geometria moderna, che da una sola « fonte fa scaturire una gran quantità di proposizioni; e ciò affinchè « l'insegnamento geometrico venga anche nelle scuole a dare mag- « giori impulsi e più frutti di quel che accade ora con un metodo « che, tenendosi troppo alle cose minute e particolari, evita quasi « espressamente le considerazioni generali che illuminano dall'alto « il gran tutto e fanno distinguere la intima connessione fra le sue parti ». Ed ancor prima, nella prefazione alla *G. d. L.*, muoveva gli stessi rimproveri al metodo finora usato nell'insegnamento degli elementi di geometria. Egli pensava che anche in questi si dovessero introdurre certi concetti generali della geometria moderna e che, invece di limitarsi a proprietà metriche, convenisse insegnare ai principianti anche varie proprietà di posizione (18). Queste sue idee furono poi messe ad esecuzione da qualcuno degli ottimi insegnanti formatisi alla sua scuola (19).

L'alto suo valore didattico S. mostrava anche come esaminatore. Egli riusciva a far dire ai candidati tutto quanto essi sapevano; la timidità, che è spesso un ostacolo sì forte al retto giudizio di un esame, scompariva tosto da coloro che egli interrogava. Dice un biografo con un'immagine espressiva: Se vi è un'arte ostetricia pei parti della mente, S. era maestro in essa. Sentire S. ad esaminare era un piacere, anche pel candidato; se questi si presentava all'esame con inquietudine, si meravigliava poi di aver saputo tanto. Di quest'abilità particolare di S. si conservano ancora vari ricordi (20).

---

di provare la sua *pazienza* nella risoluzione di temi geometrici: solo se le difficoltà che incontra non lo ributtano, ma anzi aumentano il suo interesse, se non ricerca l'aiuto altrui ma vuol serbare per sè la gioia di riuscire da sè solo a risolvere i temi, allora egli ha veramente tendenza per quelle discipline. A qual grado non dovette avere questa pazienza lo scopritore della teoria geometrica degl'immaginari!

(18) Gli accadde di dire che si sentiva di spiegare con frutto la sua *G. d. L.* a ragazzi di 12 anni come primo insegnamento geometrico. Quest'asserzione, convenientemente intesa, e tenendo conto delle eminenti qualità didattiche di S., non parrà esagerata a chi abbia meditato profondamente quell'opera magistrale.

(19) E ci pare da augurare che si diffondano e che in una conveniente fusione dei pregi degli antichi con quelli dei moderni metodi geometrici si trovi la via per rendere lo studio degli elementi di geometria più simpatico — e però più proficuo — ai giovani!

(20) Un professore, R., che pur dedicandosi con preferenza ad altri studi, doveva anche insegnare in una scuola professionale la geometria, in cui non era

Le soddisfazioni nella vita di S. furono quasi tutte di natura intima, conformi alla vita ritirata e di studi che egli conduceva nella piccola e tranquilla Erlangen. L'alto sentimento dei suoi doveri lo obbligava a prendere viva parte agl'interessi dell'Università ed alle discussioni del senato di questa; ed i suoi colleghi lo amavano e lo stimavano assai per la bontà e nobiltà di carattere, per la mente acuta, per la parola faconda e chiara, che anche in quelle occasioni si rivelavano in lui. Ma della grandezza dei suoi meriti scientifici poco si sapeva; e la morte di S. arrivò prima dell'approvazione reale alla nomina di lui a socio effettivo dell'Accademia bavarese (a cui S. apparteneva dal 1863 come socio corrispondente).

Gli è che l'opera di S. era troppo elevata per trovare subito molti che fossero in grado di apprezzarla (21). A diffonderne la conoscenza occorreva che un altro grande ingegno mostrasse l'importanza di quelle teorie nella risoluzione di problemi pratici, nelle costruzioni di volte, di ponti, ecc.! Questo fece CULMANN nel corso di Statica grafica che dettò al Politecnico di Zurigo a partire dal 1860, e nell'opera «*Die graphische Statik*» pubblicata ivi nel 1866 (22). Applicando egli nelle sue costruzioni grafiche le proposizioni ed i

---

molto versato, narrava questo fatto a lui avvenuto. S. andò una volta agli esami di quella scuola come commissario ministeriale. Durante l'esame di geometria e finchè esso procedeva sotto la direzione di R., questi osservò che S. andava continuamente e sempre più scuotendo il capo in segno di disapprovazione, quantunque a lui paresse che le risposte dei giovani fossero abbastanza soddisfacenti. Finalmente S. volle fare egli stesso l'esame: anzitutto le risposte degli studenti, intimiditi, andarono così male che R. ne fu spaventato; a poco a poco però essi risposero sempre più vivacemente, l'esame andò sempre meglio, ... ma R. finì per non capire più nè le domande incalzanti di S. nè le pronte risposte degli scolari: sotto un tale esaminatore i giovani venivano a superare in sapere il loro maestro! Da ultimo S. lodò con R. l'intelligenza in geometria dei suoi discepoli.

(21) Ciò ricorda le seguenti parole, che molto tempo prima scriveva il filosofo tedesco FICHTE:

«... Ogni opera che veramente meriti di esser pubblicata non può assoluta-
«mente alla sua comparsa trovar subito alcun giudice; essa deve dapprima alle-
«varsi il suo pubblico e formarsi un tribunale per sè... Se un libro trova subito,
«appena comparso, il suo giudice competente, ciò è la prova stringente che quel
«libro avrebbe anche potuto altrettanto bene rimanere inedito».

(22) Fu il sig. R. DEDEKIND che verso il 1858 rivolse sulle opere dei principali geometri moderni, tra cui appunto la *G. d. L.*, l'attenzione di CULMANN. E questi in pochissimo tempo, grazie alla grande energia di studio di cui era capace, s'impadronì completamente di quelle teorie che prima ignorava affatto; ed a sua volta, appena nel 1863 il sig. TH. REYE ebbe l'abilitazione in quel politecnico, lo incitò a studiare l'opera di S.

metodi della *G. d. L.*, si dovette finire per far insegnare nel Politecnico la geometria di posizione. Lo stesso accadde in altre scuole d'ingegneri in cui si vollero introdurre le costruzioni di CULMANN. S. provò un vivo piacere nei suoi ultimi anni quando seppe quali applicazioni pratiche si facevano della sua *G. d. L.* Nella pasqua del 1865 egli fu visitato in Erlangen da CULMANN; e discorrendo di quel libro, questi espresse il desiderio che, venendosi a ristampare, S. lo munisse di figure. S. rifiutò, osservando che con la figura sarebbe solo mostrato al lettore un caso speciale, mentre egli dovrebbe immaginare simultaneamente una serie di figure diverse, che tutte spettano alla stessa proposizione. CULMANN manifestò poi un altro desiderio, cioè che la *G. d. L.* fosse rifatta ed ampliata in guisa da essere più facilmente intesa dagli studenti: S. si mostrò molto sorpreso che quell'opera fosse trovata difficile a capire, ma ricusò qualsiasi mutamento dicendo che prima di farla stampare egli l'aveva più volte modificata, però rendendola sempre più concisa, e che quindi non voleva ora prendere il cammino inverso.

Ma i desiderî di CULMANN furono, com'è noto, soddisfatti nel 1866 dal sig. TH. REYE col suo bel libro: « *Die Geometrie der Lage* », che pur costituendo un'opera originale, differente in vari punti fondamentali da quella di S., contribuì molto a far conoscere i metodi di questa ([23]).

S. morì il 1º giugno 1867. Sofferente negli ultimi anni, egli si sentiva avvicinare la morte con quella calma e gravità che erano nel suo carattere. Studiò e lavorò fino all'ultimo momento. Inviata a BORCHARDT la Memoria « *Ueber die Functionen...* », della quale

---

([23]) Fra le prime opere che si valsero di cose contenute nella *G. d. L.* di S. vanno anche nominate (quantunque di minor valore che quella suddetta) le « *Grundlinien der neueren ebenen Geometrie* » di CHRISTOPH PAULUS (Stuttgart, W. Paulus, 1853) e la « *Neuere Geometrie* » (Erlangen, Deichert, 1867) di HANS PFAFF, discepolo di S. e poi suo successore nel poco tempo che gli sopravvisse; questa ultima, dedicata dall'autore al suo maestro, fa largo uso non solo della *G. d. L.*, ma anche dei *Be*. Però nessuna delle due ha conservato i metodi di S.

Vari altri trattati comparvero dipoi nei quali si fa uso di cose di S.: ma assai raramente vi si ritrovano quel rigore e quell'uniformità e luminosità di metodi che in questo s'ammirano. Ci sia permesso a questo proposito il pensare che a torto si crede opportuno per certe cose scostarsi nell'insegnamento dalla classica opera di S., a torto si suole da molti considerarla come non adatta per le scuole: chè se essa non si può dare ad uno studente perchè v'impari *da sè* la geometria di posizione, può però con grandi vantaggi ogni insegnante intelligente adoperarla come guida seguendola passo passo e spiegandola nel suo corso.

rivide poi le bozze il giorno stesso della sua morte, compose e finì nelle ultime settimane di vita l'opuscolo: « *Von den reellen und imag. Halbmessern...* »; e desta tristezza il leggere nella prefazione di questo qualche parola di S. di rammarico, perchè i dolori fisici gl'impedivano di migliorare qualche cosa nel manoscritto, e verso la fine un notevole teorema sulle quadriche, dato senza la dimostrazione, perchè « l'autore non l'ha più presente e non si trova più in grado di cercarla di nuovo ». Sopportò i più tormentosi dolori di un asma acutissimo senza lamenti, forzandosi di sorridere ai suoi cari, da cui ebbe la gioia di vedersi assistito fino all'ultimo momento.

In lui si estinse un grande. Fu detto: l'EUCLIDE moderno. Ma se al grande autore degli *Elementi* egli rassomiglia per l'accuratezza ed il rigore, se vi è qualche analogia fra il posto che egli occupa nella geometria di questo secolo ed il posto che quegli ebbe per la geometria dei suoi tempi, certo le idee che, come abbiamo visto, egli aveva sull'insegnamento della geometria elementare, mostrano che ad EUCLIDE (che pel resto ammirava) egli non avrebbe voluto assomigliare nell'artifiziosità delle dimostrazioni, che provando solo la verità, ma non l'intima ragione dei teoremi, venivano da SCHOPENHAUER, che le giudicava « insidiose », paragonate a « trappole ». La massima luminosità e naturalezza si trovano invece nei lavori di S. Li studino i giovani — per essi ripetiamo volentieri terminando le savie massime che abbiamo ricordato in principio, — studino specialmente la *Geometrie der Lage* ed i suoi *Beiträge* con pazienza e con amore, senza lasciarsi ributtare dalle prime difficoltà, e vedranno quanto diletto e quanto frutto ne trarranno, quanta potenza d'intuizione geometrica, quante cognizioni nuove, quanta generalità di metodi, quant'arte di esposizione, quanto rigore di ragionamenti v'impareranno!

Torino, Luglio 1888.