

CORRADO SEGRE

CORRADO SEGRE

Riccardo De Paolis. [Cenni biografici]

Rend. Circolo Mat. Palermo, Vol. **6** (1892), p. 208–224

in: Corrado Segre, *Opere*, a cura della Unione Matematica Italiana, Volume IV, Edizione Cremonese, Roma, 1963, p. 413–427

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Segre_CW_4_413>

LXXX.

RICCARDO DE PAOLIS

« Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo »,
tomo VI, 1892, pp. 208-224.

RICCARDO DE PAOLIS nacque in Roma il 9 gennaio 1854 da ACHILLE DE PAOLIS ed ELENA CHATELAIN (morti poi nel '69 e nel '77); ed in quella città fece i suoi primi studi, anzitutto in una scuola privata e poi nel Liceo di S. Maria della Pace, dimostrandovi con notevoli successi una spiccata inclinazione per le matematiche. Fu forse grazie a questa che riuscì a vincere l'opposizione della famiglia che avrebbe voluto avviarlo al commercio; ed accelerati gli studi liceali, potè nel 1870, appunto quando l'Italia veniva finalmente ad avere la desiderata capitale, essere iscritto fra gli studenti di matematiche dell'Università romana. Un altro giovane di grande valore, ETTORE CAPORALI⁽¹⁾, entrava allora in quell'Ateneo per fare gli stessi studi, e con esso il DE PAOLIS si strinse subito in intima amicizia. Durante il 1° biennio lavorarono insieme indefessamente, risolvendo un'infinità di problemi tratti dalle opere del SALMON, del TODHUNTER, ecc., ed inventandone dei nuovi, ammirati dai condiscipoli e tenuti in grande stima dai maestri per la loro operosità e per l'ingegno straordinario che rivelavano⁽²⁾. Dopo, per gli studi di mate-

(1) Nato a Perugia il 17 agosto 1855, e morto, ahimè così miseramente! il 2 luglio 1886.

(2) A questo periodo appartiene una Nota del Giornale di matem., 10, pp. 320-324 (ottobre 1872), intitolata « *Soluzioni di alcune quistioni proposte nei Nouvelles Annales* », per RICCARDO DE PAULIS, studente nella Università di « Roma », e relativa a questioni analitiche su certi luoghi ed involuppi collegati ad un'ellipse; e la « *Soluzione di alcune quistioni proposte nel Giornale di matematiche* », per ETTORE CAPORALI, studente nella R. Università di Roma », Giornale di matem., 11, 1873, pp. 116-120, 191-196.

matiche superiori, che fecero dal 1872 al 1875, poterono entrare nella Scuola di magistero per la matematica, che il CREMONA fondava nel '73 nell'Università di Roma: ed in essa, oltre al CREMONA stesso, ebbero per maestri, fra gli altri, il BATTAGLINI ed il BELTRAMI⁽³⁾. L'influenza che sì valenti insegnanti esercitarono sui loro discepoli fu grandissima; ed il DE PAOLIS in particolare ne trasse un grande amore per tutti indistintamente i rami delle matematiche, ad esempio per l'analisi e la fisica matematica, nelle quali acquistò una cultura estesa seguendone poi sempre con cura i progressi.

Ma per le ricerche scientifiche l'indirizzo in cui prese a muoversi il DE PAOLIS ed in cui poi sempre rimase fu quello geometrico Cremoniano: come del resto si può dire che sia accaduto in Italia per gran parte dei giovani geometri, dopo la pubblicazione dei lavori del CREMONA sulla teoria geometrica delle curve e superficie e sulle trasformazioni birazionali. Appunto un'applicazione di noti metodi Cremoniani fu la tesi di laurea del DE PAOLIS « *Sopra un sistema omaloidico formato da superficie d'ordine n con un punto $(n - 1)$ -plo* »⁽⁴⁾, nella quale queste superficie sono studiate ed adoperate per formarne dei sistemi omaloidici determinanti delle trasformazioni birazionali dello spazio. Conseguita la laurea nel luglio 1875 il CAPORALI ed il DE PAOLIS furono nominati professori di matematica rispettivamente nei licei di Catania e di Caltanissetta; ma dopo un anno entrambi facevano ritorno a Roma, il primo come assistente alla Scuola degl'ingegneri, l'altro coll'incarico degli esercizi pratici di matematica all'Università (e poi anche, per poco, di supplente per la Geometria analitica; nella quale materia, unita con la Geometria proiettiva, ebbe nel giugno '78 la libera docenza).

Fu nei due anni in cui tenne quest'ufficio che il DE PAOLIS scrisse e pubblicò quei lavori sulle trasformazioni piane doppie che cominciarono a far conoscere favorevolmente il suo nome nel mondo scientifico. Egli volle anzitutto fare per le dette trasformazioni uno studio generale analogo a quello che il CREMONA aveva fatto per le

(3) Tra i compagni del DE PAOLIS in quei tre anni, oltre al CAPORALI vi fu anche il FRATTINI, che del DE PAOLIS rimase poi sempre amico affezionatissimo. A lui, al Dr. ALFREDO DE PAOLIS ed al Dr. F. ENRIQUES faccio qui i miei vivi ringraziamenti per le molte utili notizie che m'han fornito intorno all'amico, al fratello, al maestro.

(4) Pubblicata nel Giornale di matem., 13, 1875, pp. 226-248, 282-297 (con la data: Roma, 25 genn. 1875).

trasformazioni univoche; e così ne diede⁽⁵⁾ una trattazione minuta, essenzialmente sintetica, in cui risolse le prime questioni che si presentano nei due piani, riguardo alle curve corrispondenti a date curve, ai punti e linee fondamentali, alla curva doppia ed alla curva limite, alla involuzione congiunta, ecc. Questa trattazione (che si potrebbe rendere più completa col tener conto delle singolarità superiori delle curve, e dei legami che rispetto a queste vi possono essere fra i punti che si considerano) dà luogo a rilevare una differenza essenziale tra i problemi postisi dal DE PAOLIS e la questione relativa ad un argomento molto affine, che fu posta e trattata in quegli stessi anni dal BERTINI, della *riduzione* delle involuzioni piane per trasformazioni Cremoniane: il DE PAOLIS non si occupa (all'infuori di un cenno sui casi delle trasformazioni di genere $p = 0, 1$) di ridurre le corrispondenze piane (1, 2) mediante applicazione di trasformazioni Cremoniane, ma solo di studiarne le proprietà *proiettive*; e ciò indipendentemente dalla loro costruzione effettiva (che egli non assegna se non per alcuni casi particolari). A questo studio generale tennero dietro quelli di due particolari trasformazioni doppie e delle loro applicazioni⁽⁶⁾. L'una di esse è quella corrispondenza fra due piani che si può ottenere stereometricamente proiettando su essi una quadrica da un punto esterno e da un punto di essa: si ha allora sui due piani rispettivamente una conica ed una coppia di punti, ed assumendole come *assoluti* si viene a porre un legame fra la geometria non euclidea dell'un piano e quella euclidea dell'altro, e così si ottengono ad es. delle facili proprietà dei cerchi non euclidei, ecc. L'altra trasformazione doppia particolare si ha riferendo linearmente la rete delle cubiche dell'un piano passanti per 7 punti fissi a quella delle rette dell'altro piano (il che si potrebbe fare riferendo l'ordinario piano rappresentativo di una superficie cubica, coi suoi 6 punti fondamentali, ad un altro piano su cui quella superficie venga proiettata da un suo punto). Nasce allora nel secondo piano (doppio) una quartica generale come curva limite. DE PAOLIS stabilisce tutte le formole, non prive d'eleganza, e varie proprietà

(5) Nella Memoria « *Le trasformazioni piane doppie* », Mem. Acc. Lincei, (3) 1, 1877, pp. 511-544.

(6) *La trasformazione piana doppia di secondo ordine, e la sua applicazione alla geometria non euclidea*, Mem. Acc. Lincei, (3) 2, 1878, pp. 31-50.

La trasformazione piana doppia di terzo ordine, primo genere, e la sua applicazione alle curve del quarto ordine, Ibid., pp. 851-878.

relative a questa trasformazione, e quindi anche alle quartiche piane, con le loro tangenti doppie, coniche e cubiche di contatto, ecc.

Nel novembre del 1878 il DE PAOLIS in seguito a concorso veniva nominato professore straordinario di Algebra e Geometria analitica all'Università di Bologna; e nel gennaio del 1880, ancora per concorso, era chiamato a Pavia come professore straordinario di Geometria superiore. Di qui finalmente, lo stesso anno, veniva traslocato a Pisa nella medesima cattedra, per scambio col Prof. BERTINI. Ed a Pisa poi rimase sempre (tranne nelle vacanze, che soleva passare a Roma), trascorrendo una vita tranquilla nella compagnia del fratello ALFREDO (ora cultore degli studi medici), — al quale, rimasto orfano in giovanissima età, faceva da padre, — e poi della sposa, sig.^a ELVIRA BERRETTA di Roma, a cui si congiunse nel settembre 1883, e della bimba che ne ebbe tre anni dopo. All'insegnamento della Geometria superiore (nel quale fu promosso ordinario nel novembre 1885) s'aggiunse dal 1882-83 all'89 l'incarico dell'insegnamento della Statica grafica e dal 1889-90 in poi quello della Geometria proiettiva e descrittiva. La stima che seppe procacciarsi gli valse inoltre numerosi incarichi governativi d'ispezioni, commissioni, ecc.; e dalla R. Accademia dei Lincei la nomina a suo corrispondente (il 31 dicembre 1883, simultaneamente a quella del CAPORALI); dal Circolo matematico di Palermo l'elezione a membro del Consiglio direttivo.

Tra gli scritti che il DE PAOLIS pubblicò dalla sua nuova e definitiva sede accennerò anzitutto quelli che, se non furono primi ad essere stampati, furono probabilmente i primi ad esser pensati: voglio dire i lavori che per lo spazio tengono un posto analogo a quello che pel piano avevano i lavori già discorsi sulle trasformazioni piane doppie. La Memoria su *Le trasformazioni doppie dello spazio* ⁽⁷⁾ studia queste trasformazioni appunto analogamente a quelle e con gli stessi metodi: solo va notato che per essa fu necessario uno studio maggiore in causa del maggior numero di casi che posson presentare i punti e linee fondamentali, casi che vengono accuratamente discussi. Come il DE PAOLIS accenna nella prefazione di quella Memoria, egli dopo le ricerche su due particolari trasformazioni piane doppie di cui parlammo si era pure occupato di due particolari trasformazioni doppie dello spazio analoghe in certo senso a quelle, ed atte a dare delle proprietà, rispettivamente, della geo-

(7) Mem. Acc. Lincei, (4) 1, 1885, pp. 576-608.

metria non euclidea dello spazio, e della superficie del 4° ordine con 16 punti doppi di KUMMER (8); ma non pubblicò i suoi risultati perchè i signori ASCHIERI e REYE rispettivamente l'avevan preceduto. Solo nel 1890 pubblicò una Nota intitolata *Alcune proprietà della superficie di KUMMER* (9) nella quale si ottengono, appunto con quel metodo, degli ulteriori risultati relativi a quella superficie, ad es. per le coniche quadritangenti (47 sistemi di ∞^4). E qui nominerò pure le Note su *Alcune particolari trasformazioni involutorie dello spazio* (10), in cui sono assegnate quelle involuzioni nelle quali le rette che congiungono le coppie di punti omologhi sono solo ∞^2 invece che ∞^3 .

Le *Ricerche sulle superficie del 3° ordine* (11) partono da una configurazione di 15 punti, 15 piani e 20 rette già studiata da STAUDT, CREMONA e CAPORALI, e la collegano poi col pentaedro di una superficie cubica F^3 . Ne nascono due polarità spaziali ordinarie, il cui prodotto è un'omografia che dà origine ad un tetraedro unito e ad un complesso tetraedrale: enti tutti che sono *covarianti* (o *contravarianti* ecc.) per la F^3 . Dalla considerazione di essi e delle particolarità che posson presentare vien dedotto un significato geometrico per l'annullarsi degl'invarianti della F^3 .

La Memoria *Sui fondamenti della geometria proiettiva* (12) prosegue e completa quanto avevano fatto od accennato STAUDT, KLEIN, DARBOUX, ecc. per stabilire il teorema fondamentale della geometria proiettiva e per giungere, senza misurazione di grandezze, alle coordinate proiettive nelle forme di 1ª specie (13).

Questo lavoro ci dà un primo esempio di una particolare tendenza del DE PAOLIS: quella di risalire sempre ai fondamenti, ai principî delle teorie (14). Ed è pure di qua che nacque il libro degli

(8) Tali trasformazioni si possono ottenere, analogamente a quelle piane, mediante proiezioni di varietà di 2° e 3° ordine di S_4 .

(9) Rend. Acc. Lincei, 6, 1890, pp. 3-11.

(10) Rend. Acc. Lincei, 1, 1885, pp. 735-742, 754-758.

(11) Mem. Acc. Lincei, (3) 10, 1881, pp. 123-160.

(12) Mem. Acc. Lincei, (3) 9, 1881, pp. 489-503.

(13) Si noti che le *Vorlesungen über neuere Geometrie* del PASCH, nelle quali, com'è noto, sono pure ampiamente trattate le stesse questioni, vennero alla luce dopo quella Memoria, cioè nell'82.

(14) Forse questa tendenza egli non aveva da principio. Nell'occasione della laurea il CREMONA, dubitando che il DE PAOLIS per occuparsi solo di questioni generali, elevate, trascurasse i casi speciali o le cose più elementari, gli fece intendere che questo era un errore. Il discepolo non dimenticò la lezione del maestro!

Elementi di Geometria ⁽¹⁵⁾. Con esso l'Autore, dice nella prefazione, « si propose un doppio scopo; abbandonare l'antica separazione della « Geometria piana dalla solida, tentare di stabilire rigorosamente le « verità fondamentali della Geometria e le teorie dell'equivalenza, « dei limiti, della misura ». E lo scopo si può dire raggiunto. L'opera, redatta con puro metodo euclideo, ricca d'innovazioni sì nell'ordinamento che nelle dimostrazioni ⁽¹⁶⁾, ma assai parca nella scelta del materiale, il quale vi è ridotto a ciò che è veramente essenziale in un trattato elementare, è un modello di rigore anche negli argomenti più delicati, e trae buon profitto dalla fusione della geometria piana con la solida: fusione che è da augurarsi sia largamente introdotta nell'insegnamento, almeno per accertare con l'esperienza quanto a questo essa sia proficua ⁽¹⁷⁾.

Della tendenza ad occuparsi di trattazioni sistematiche (anzi che limitarsi a dare alla scienza risultati essenzialmente nuovi) fanno pur prova i *Fondamenti di una teoria dello spazio generato dai complessi lineari* (di rette) ⁽¹⁸⁾, i quali mirano ad un'esposizione geometrica ed indipendente delle proprietà fondamentali di quei complessi e dei sistemi lineari a cui essi dan luogo, fino a stabilirne direttamente le coordinate (nello spazio a 5 dimensioni costituito dai complessi); ed i due lavori *Sulla espressione di una forma binaria di grado n con una somma di potenze n^e* ⁽¹⁹⁾, e *Alcune applicazioni della teoria generale delle curve polari* ⁽²⁰⁾, i quali rispettivamente nel campo binario e nel ternario trattano metodicamente alcuni argomenti con cui, grazie a BATTAGLINI, ROSANES, CLIFFORD e REYE, si è considerevolmente ampliata la teoria della polarità: cioè le forme coniugate od armoniche, la polarità di curve rispetto a curve, l'apolarità, la rappresentazione di una forma d'ordine n con una somma

⁽¹⁵⁾ Torino, Loescher, 1884. Per maggiori particolari su quest'opera veggasi la recensione minuta ed accurata fattane dal FRATTINI nel Periodico di matematica, anno I, Roma 1886, pp. 20-31.

⁽¹⁶⁾ L'originalità dell'opera derivò anche da ciò che quando il DE PAOLIS s'accinse a scriverla egli non conosceva altri Elementi che quelli di EUCLIDE, e durante la compilazione si consultò con pochissimi libri.

⁽¹⁷⁾ Ad un postulato introdotto dal DE PAOLIS nei suoi Elementi si collega la breve Nota *Sopra una proposizione fondamentale della teoria dell'equivalenza*, Periodico di mat., I, 1886, pp. 44-46.

⁽¹⁸⁾ Mem. Acc. Lincei, (4) 1, 1885, pp. 205-231.

⁽¹⁹⁾ Mem. Acc. Lincei, (3) 12, 1882, pp. 405-413.

⁽²⁰⁾ Mem. Acc. Lincei, (4) 3, 1886, pp. 265-280.

di potenze n -esime, ecc. ⁽²¹⁾. In tutti questi lavori son frequenti, non solo la novità del metodo, ma anche i risultati nuovi; però spesso si direbbe che all'Autore non importi di metterli in evidenza, e che invece si ponga principalmente un fine didattico: la trattazione uniforme e completa degli enti che prende a studiare, senza separare ciò che è noto dal nuovo. Ed il lettore non può le più volte fare subito egli stesso tale distinzione, in causa della brevità e mancanza assoluta di prefazione o di citazioni. E qui osserverò pure che il DE PAOLIS, accuratissimo nella ricerca (ed anzi, per questo aspetto, come per la serietà degli scopi che si proponeva, degno di servir d'esempio ai giovani geometri) non appariva tale nell'esposizione: nello scrivere pel pubblico egli riusciva alquanto arido; la forma che egli adottava non era sempre la più chiara, nè egli si curava (quasi per un eccesso di austerità) di renderla, mediante opportune citazioni, esempi, raffronti con altre teorie o con altri metodi, più efficace ed in pari tempo più attraente per i lettori ⁽²²⁾.

Del resto, sia quando ottiene proposizioni essenzialmente nuove, sia quando quelle note ritrova per una nuova via, il DE PAOLIS dà sempre prove di fortissimo ingegno. E ciò si può dire in particolare, e forse in grado massimo, per quelle che pur troppo furono le sue ultime ricerche e delle quali ci resta da parlare.

Esse riguardano appunto principalmente una questione di metodo. Fra gli scritti di cui finora avevamo discorso ve n'erano alcuni (come ad es. quelli sulle superficie cubiche e sulla forma binaria di grado n) nei quali si faceva largo uso del metodo analitico, e più precisamente dell'algebra degl'invarianti. In generale però si notava una decisa preferenza per i metodi essenzialmente geometrici (quella preferenza che si trova in tutta la scuola del CREMONA).

⁽²¹⁾ Nella Nota *Sulle involuzioni proiettive* (Rend. Acc. Lincei, 2, 1886₂, pp. 335-337) è esposto un notevole e semplice teorema col quale, date in una forma di 1^a specie due involuzioni proiettive di ordini m , n , si trova di ogni elemento l'armonico di 1^o ordine rispetto al gruppo degli $m + n$ elementi uniti senza ricorrere direttamente a questi: teorema che poi doveva servire nelle ricerche di cui diremo tosto.

⁽²²⁾ Rimproverato recentemente di ciò, rispondeva: « Trovo perfettamente « giusto l'appunto ... alla forma che io ho tenuto nella esposizione. Ho più volte « provato a correggere questo mio difetto; ma è inutile, non ci riesco. Eppure « nelle lezioni orali tengo un metodo del tutto diverso. Continuamente faccio dei « confronti tra il metodo sintetico e l'analitico, che seguo a preferenza; faccio « delle osservazioni storiche, ecc. ecc., per non riuscire noioso. Proverò un'altra « volta a correggermi, quando scriverò una Memoria ... ».

Ora sulla via di tali metodi il DE PAOLIS si propose di andare molto più innanzi. È noto che il 1^o luglio 1886 il sig. E. KÖTTER conseguiva dall'Accademia delle scienze di Berlino il premio STEINER sul tema di fondare una teoria puramente geometrica delle curve e superficie d'ordine superiore. Il DE PAOLIS che s'era pure occupato di quel tema lo svolse nel modo che si trova chiaramente esposto in una sua lettera del 4 marzo 1887; la quale riproduco qui, potendo essa interessare i lettori anche pel cenno che vi si trova di ricerche rimaste poi inedite.

« ... Lessi, nei Rendiconti dell'Accademia di Berlino, la relazione del lavoro di KÖTTER; ho aspettato ansiosamente la sua pubblicazione, ma non so se ancora abbia veduto la luce... Sono più anni che mi perseguita l'idea di emancipare la Geometria dal sussidio dell'Algebra, di fondare la vera *Geometria pura*. Quando seppi la notizia ... ⁽²³⁾ avevo completamente risolta la quistione, non potevo pubblicare subito le mie ricerche, perchè ancora non avevo svolto le parti secondarie di tutto il lavoro che mi ero proposto di fare; perciò pensai di aspettare la pubblicazione della Memoria di KÖTTER, qualunque cosa potesse avvenire, tanto più che dalla relazione fatta su questa Memoria mi pare che KÖTTER non si sia spinto innanzi come me e che abbia tenuto un altro metodo... Ora però il mio lavoro è spinto più innanzi e sono stanco di aspettare; perciò ho appuntato i principali risultati che ho ottenuto in 6 quinterni, e li ho spediti, in un plico sigillato, all'Accademia dei Lincei, perchè ne prenda data. Spero così di arrivare, in ogni caso, in tempo per non perdere la priorità, o almeno poter provare che avevo risoluto il problema indipendentemente dal KÖTTER. Adesso poi mi sono messo assiduamente a lavorare, e spero di finire la Memoria per la fine dell'anno. Sarà una cosa lunga. Comincio dalla definizione di superficie, linea e punto, senza supporre alcuna cognizione di Geometria, e dopo alcune considerazioni generali studio le corrispondenze tra i punti di due campi lineari, superficiali o solidi, soggette alla sola condizione di essere continue. In questa parte il mio lavoro si può considerare come una teoria geometrica delle funzioni continue di 1, 2 o 3 variabili reali, ed infatti dimostro alcuni teoremi geometrici fondamentali, che costituiscono teoremi di Analisi dovuti a WEIERSTRASS, CANTOR, ecc. Faccio poi vedere che ogni corrispondenza continua

(23) Del risultato del concorso a quel premio STEINER.

« [m, n] tra i punti di due superficie si può sostituire con un'altra
 « [1, 1] tra i punti di altre due superficie, che chiamo le superficie
 « di RIEMANN della data corrispondenza: così acquisto un potente
 « mezzo di ricerca, geometrico, mezzo utilissimo in seguito, special-
 « mente nello studio delle curve algebriche (che non chiamerò alge-
 « briche, ma che ancora non so come chiamare). Poi sono natural-
 « mente condotto a studiare la connessione delle superficie, ecc.
 « Dopo queste considerazioni, così generali, passo a stabilire la
 « Geometria proiettiva, con lo stesso rigore tenuto dal PASCH, ma
 « molto più semplicemente. In un certo senso, dopo avere svolto
 « quella parte della Geometria che corrisponde alla teoria generale
 « delle funzioni, passo alla parte che corrisponde alla teoria delle
 « funzioni algebriche. Spingo la Geometria proiettiva fino alle forme
 « di 2° grado comprese, considerando anche gli elementi immaginari
 « col metodo di STAUDT. Costruisco poi, seguendo THIEME e WIENER,
 « e specialmente il primo, i sistemi lineari ∞^{n-1} di gruppi di n
 « elementi di una forma fondamentale di 1ª specie, ed i sistemi
 « lineari di questi sistemi lineari⁽²⁴⁾. Dopo uno studio completo
 « dell'argomento dimostro, e qui evidentemente sta il nodo della
 « quistione, che n sistemi lineari ∞^{n-1} hanno sempre un gruppo
 « comune di n elementi, reali o immaginari. Passo quindi a studiare
 « i sistemi lineari ∞^r , essendo $r < n - 1$, di gruppi di n elementi
 « e termino questa parte dimostrando che nel sistema lineare ∞^r vi
 « sono $(r + 1)(n - r)$ elementi $(r + 1)$ -pli, e che due involuzioni
 « proiettive, sovrapposte, di grado m, n hanno sempre $m + n$ ele-
 « menti uniti. In questa parte, a quel che pare, i risultati coincidono
 « con quelli di KÖTTER, ma scommetterei che sono ottenuti con
 « metodo diverso: io mi fondo sulle proprietà trovate per le corri-
 « spondenze continue e sulla continuità dei suddetti sistemi lineari.
 « Riguardo alle curve e superficie, generalmente insieme ai loro si-
 « stemi lineari col metodo di THIEME, ho veduto come si può di-

(24) Qui è opportuno avvertire che allo studio dei sistemi lineari di gruppi di n elementi di una forma il DE PAOLIS premette quello degli *aggruppamenti proiettivi* d'ordine n , ossia sistemi ∞^{n-1} di gruppi di n elementi presi rispettivamente in n forme fondamentali di 1ª specie ed omologhi in una *corrispondenza n-lineare*. Dopo svolte le loro proprietà, quelle dei sistemi fondamentali di tali aggruppamenti, l'*armonia* fra essi, l'*apolarità*, ecc., si passa poi al caso particolare degli aggruppamenti proiettivi *involutori* su di una forma, ecc., alle *corrispondenze proiettive* generali (che si hanno da un aggruppamento proiettivo mediante coincidenze di elementi), ecc. ecc.

« mostrare che due curve di ordine m, n hanno sempre mn punti
 « comuni ecc. ecc. Voglio però svolgere sistematicamente, con il mio
 « metodo, tutta la teoria delle curve e superficie algebriche. Ma non
 « mi fermerò qui: introdurrò il concetto di spazi a più dimensioni,
 « e in modo puramente geometrico e rigoroso, non ...: io ricorro alla
 « effettiva rappresentazione, nello spazio nostro, per mezzo dei si-
 « stemi lineari ∞^r di gruppi di n elementi di una forma fondamentale
 « di 1^a specie. Per i campi a più dimensioni stabilisco pure una
 « teoria generale delle corrispondenze continue, della connessione, ecc.,
 « ed introduco il concetto di spazi di RIEMANN, che utilizzo per de-
 « terminare i *generi* degli spazi algebrici a più dimensioni. Dopo
 « questa parte, che corrisponde allo studio delle funzioni continue
 « di n variabili reali, passo, con metodo analogo a quello tenuto per 2
 « o 3. dimensioni, a considerare gli enti di più dimensioni che cor-
 « rispondono alle superficie algebriche. Ella vede quanto è vasto il
 « campo che voglio esplorare, e che ho già esplorato in modo da
 « non incontrare più difficoltà nelle parti che ancora devo svolgere;
 « in ogni modo però la redazione del lavoro richiede ancora molto
 « tempo, ed io desidero pubblicarlo dopo che sarà tutto completo.
 « Mi pare che il risultato di KÖTTER, che anche io del resto ho
 « tenuto indipendentemente, in ogni modo sia *una* delle possibili
 « applicazioni del mio metodo ... ».

Con queste ricerche il DE PAOLIS concorse presso la R. Accademia dei Lincei al premio reale per la matematica che scadeva col dicembre 1887. A gran fatica, con un lavoro indefesso, gli riuscì di presentare all'Accademia, appunto l'ultimo giorno dell'anno, la sua Memoria, a cui diede il titolo « *Fondamenti di una teoria, puramente geometrica, delle linee e delle superficie* ». E poco dopo, in una lettera scritta dall'11 al 19 gennaio 1888, me ne dava un lunghissimo sommario, dal quale estrarrò ancora poche notizie utili per completare le precedenti. « Per non rendere troppo voluminosa la
 « Memoria ⁽²⁵⁾, ho lasciato da parte, per ora, alcune ricerche che
 « non si riferiscono direttamente alla soluzione del problema che mi
 « sono proposto, come per esempio tutte quelle che si riferiscono
 « agli spazi a più dimensioni, alla loro connessione, agli spazi di
 « RIEMANN ⁽²⁶⁾, ecc. » come pure quelle dirette a « stabilire rigoro-

⁽²⁵⁾ Che era già di quasi 300 pag. grandi.

⁽²⁶⁾ E più oltre, dopo aver accennato alle superficie di RIEMANN di una corrispondenza continua $[m, n]$ tra due superficie: « Pubblicherò in un'altra cir-

« samente le basi della Geometria proiettiva (di 1° grado) semplifi-
 « cando la esposizione di PASCH ». Era divisa in tre parti: 1° « Teoria
 generale delle corrispondenze tra i punti di più gruppi », 2° « Teoria
 generale delle corrispondenze proiettive, nelle forme fondamentali
 ad una dimensione », 3° « Teoria generale delle corrispondenze pro-
 iettive, nelle forme fondamentali a due dimensioni ». La 1ª di esse
 pubblicò poi, sotto il titolo « *Teoria dei gruppi geometrici e delle cor-
 rispondenze che si possono stabilire tra i loro elementi* », fra le Memorie
 della Società Italiana delle Scienze (dei XL) ⁽²⁷⁾. La 2ª, col titolo
 « *Le corrispondenze proiettive nelle forme geometriche fondamentali di
 1ª specie* », fu presentata all'Accademia delle scienze di Torino per
 la pubblicazione nelle sue Memorie al principio di quest'anno e s'è
 finita di stampare appunto in questi giorni ⁽²⁸⁾. E su queste due
 credo superfluo fermarmi ulteriormente, tanto più che ne furon già
 pubblicate delle analisi particolareggiate ⁽²⁹⁾: basti ripetere che esse
 sono mirabili per l'acume e la potenza d'ingegno geometrico che di-

« costanza le ricerche analoghe per gli spazi di RIEMANN ad un numero qualun-
 « que di dimensioni, ricerche... che mi sembrano interessanti conducendo alla
 « nozione di 3 generi per una superficie algebrica, ciascun dei quali è sempre
 « positivo, e che ancora non so come siano legati con il genere introdotto da
 « CLEBSCH ».

⁽²⁷⁾ (3) 7, n° 6. Le cose di questa Memoria le quali servono poi alla succes-
 siva furono riprodotte nella Nota *Sulle corrispondenze* [m_1, m_2, \dots, m_r] *continue che
 si possono stabilire tra i punti di r gruppi*, Annali di mat., (2) 18, 1890, pp. 93-117.

⁽²⁸⁾ Memorie, (2) 42, pp. 495-584. Gli estratti di questa Memoria contengono,
 per desiderio dell'Autore, la seguente dedica: « Se l'opera è degna — di ricordare
 « un nome — sia quello illustre — di LUIGI CREMONA — che nella scienza geo-
 « metrica — ebbi maestro ».

Colge quest'occasione per fare un'avvertenza relativa a questa stessa Memo-
 ria. In una lettera del 30 gennaio io avevo trasmesso al DE PAOLIS tutte le os-
 servazioni critiche che mi si erano presentate durante la lettura del suo mano-
 scritto; ed egli, approvandone subito alcune, s'era riservato di esaminare le altre
 quando si sarebbe occupato della correzione delle bozze. Sventuratamente questa
 non potè poi esser fatta da lui. Lo sostituimmo il Prof. M. PIERI ed io: ma ci
 limitammo a fare quei pochi emendamenti di sostanza che consistevano nel mu-
 tare una o due parole, e di cui eravamo certi che l'Autore li avrebbe approvati.
 Qualche modificazione più grave non osammo fare, quantunque in due o tre punti,
 già indicati in quella mia lettera, ci sarebbe parsa utile e forse necessaria: ad
 esempio nel n° 86, ove il ragionamento contiene un'asserzione che non ci sembrava
 giustificata.

⁽²⁹⁾ Per la prima v. la recensione fatta dal LORIA nella Rivista di mate-
 matica, I, Torino, 1891, p. 105; e per la seconda la Relazione negli Atti dell'Acc.
 di Torino, 27, 1892, p. 366, dalla quale appaiono anche le modificazioni al piano
 primitivo e le differenze col lavoro del KÖTTER.

mostrano rispettivamente nel campo dell'*Analysis situs* ed in quello della Geometria proiettiva. Della 3^a invece credo utile (anche pel caso che si pubblichino quanto di essa si troverà manoscritto) riportare ciò che il DE PAOLIS accenna in quella sua lettera: «... si può « dire che l'ho ancora tutta nella mente, perchè ne ho scritto un « solo capitolo, secondo me sufficiente per far vedere come le teorie « svolte nelle prime due parti bastino a stabilire tutte le proprietà « note delle curve algebriche, con pure considerazioni geometriche. « Definito l'aggruppamento proiettivo, di ordine n , per forme fonda- « mentali a due dimensioni, definisco la involuzione proiettiva, di « ordine n , che è il *sistema polare* di THIEME. Una di queste invo- « luzioni individua un luogo di punti, che si dimostra essere una « linea, nel senso che ho stabilito in alcune considerazioni della « prima parte, e si dimostra che la linea è incontrata in n punti da « una retta qualunque del suo piano. Applicando poi il teorema « sulla corrispondenza risultante, dimostro, e con un semplicissimo « ragionamento, che due curve, di ordine m , n , hanno sempre mn « punti comuni. Qui termina il lavoro. Tutte le proprietà delle curve, « e quelle delle superficie, che farebbero argomento di una 4^a parte, « si stabiliscono senza molta difficoltà, e con tutta la generalità desi- « derabile, seguendo il metodo che ho adoperato per le forme fonda- « mentali ad una dimensione. Svolgerò queste cose e le pubbliche- « rò... ». Più recentemente, in una lettera dell'8 febbraio 1892 dice: «... scriverò una Memoria, che ho già in pronto, sugli aggruppamenti « proiettivi di 2^o ordine nelle forme geometriche fondamentali di 2^a « specie. Si tratta di un lavoro nel quale studio le coniche ed i « loro sistemi lineari, seguendo lo stesso metodo che ho tenuto per « le forme fondamentali di 1^a specie, lavoro che serve di introdu- « zione alla teoria generale delle linee algebriche, che... promette- « rò⁽³⁰⁾ di pubblicare presto. Non prometterò però una analoga teoria « per le superficie e più generalmente per le varietà algebriche, « perchè non so se, per ora almeno, manterrei la promessa. Per le « sole linee, benchè io abbia già fatto molto, mi resta ancora molto « da fare. Ora sto tentando di trattare le singolarità superiori, ma « riuscirò? Spero che il mio metodo si presti bene per ciò ».

Come già accennai, per poter presentare all'Accademia dei Lincei il suo lavoro nel termine prescritto, il DE PAOLIS dovette fati-

⁽³⁰⁾ Nella prefazione alla Memoria di Torino.

care in modo straordinario⁽³¹⁾. Per parecchio tempo, abusando della salute che fin allora aveva sempre avuta ottima, passò le intiere giornate a tavolino senza mai prendersi un momento di riposo! Pochi mesi dopo cominciarono a manifestarsi in lui dei disturbi intestinali. Dapprima leggerissimi, poi s'aggravarono. Migliorò, perchè in seguito alle preghiere della famiglia per qualche tempo lavorò meno. Ma poi il desiderio di riordinare e completare quel lavoro per pubblicarlo (desiderio fattosi più vivo dopo il giudizio che di quello fu dato⁽³²⁾ e che molto lo accorò) lo spinse di nuovo ad una occupazione eccessiva e dannosa per la sua salute. E mentre questa passava da una ad un'altra crisi, egli si faceva sempre più triste, e ripeteva ai suoi cari che avendo messa in quell'opera tutta la sua energia si sentiva sfinito e non avrebbe sopravvissuto. Le preoccupazioni per l'avvenire della sua adorata famiglia lo tormentavano più ancora che la malattia e resero poi più tristi le sue ultime ore, le sue parole estreme. L'anno scorso ebbe un serio e lungo aggravamento, al quale tenne dietro una tregua di breve durata. Nell'aprile di quest'anno, dopo una nuova crisi, parve rinascere alla speranza, ma per poco: un nuovo peggioramento persuase a trasportarlo il mese seguente a Roma per sottoporlo a speciali operazioni chirurgiche. Ed in Roma la peritonite tubercolare lo estinse, alle 11 pom. del 24 giugno, lasciandogli fino all'ultimo l'intelligenza perfetta delle cose, in un'agonia lunga e straziante per lui come per la famiglia e gli amici che lo assistettero.

Non volle conforti religiosi, dicendo che la sua religione eran sempre state la famiglia e la scuola, e che per esse non aveva mai fatto nulla di cui potesse pentirsi⁽³³⁾. E così era in fatti!

Valente insegnante⁽³⁴⁾, possedeva una grande chiarezza ed eleganza di esposizione; sempre ordinato, sempre pronto a colmare le lacune, a risolvere le difficoltà che durante la lezione gli si presen-

⁽³¹⁾ Di solito egli non aveva mai esagerato nel lavorare; e fra gli studi matematici aveva sempre avuto l'abitudine (fin da quando era studente) d'inserire piacevoli passatempi e letture amene.

⁽³²⁾ V. la Relazione sul concorso al premio Reale per la Matematica per l'anno 1887, Rend. Acc. Lincei, V, 1889₂, p. 300.

⁽³³⁾ E volle che il fratello nel comporlo nella bara gli mettesse in mano, sul cuore, invece del crocifisso, i ritratti della moglie, della figlia e del fratello medesimo.

⁽³⁴⁾ Già nell'anno passato al Liceo di Caltanissetta aveva saputo acquistarsi una grande stima pel suo modo d'insegnare: come ben potè vedere il prof. FRATTINI che gli succedette.

tavano o da sè o dagli studenti. E con questi amava in tali occasioni discutere, dichiarando loro in più modi le cose; e qualche volta gli accadeva di esser condotto per questa via a modificare l'indirizzo o la distribuzione delle teorie che esponeva. Per la Geometria superiore soleva fare ogni anno (tranne in questi ultimi) due corsi. L'uno, frequentato generalmente dai giovani del 3^o anno, cominciava con un'esposizione dei *fondamenti di una teoria generale delle forme algebriche* ad un numero qualunque di variabili (prime nozioni sulla notazione simbolica delle forme, sulla polarità, sugli invarianti, covarianti, ecc.)⁽³⁵⁾, alla quale poi seguiva l'applicazione alle curve piane algebriche. Il secondo corso aveva un carattere più speciale, ed in esso il DE PAOLIS trattò successivamente diversi argomenti, come la teoria generale delle superficie e curve gobbe (seguito del 1^o corso); le trasformazioni Cremoniane; gl'integrali abeliani; la geometria della retta; le quadriche e le omografie degli iperspazi; la geometria differenziale; ecc., sviluppando spesso dei lavori recentissimi, altrui e suoi⁽³⁶⁾. Il corso di Geometria proiettiva e descrittiva, nel quale introdusse successivamente varie modificazioni suggeritegli dall'esperienza, venne ad avere (secondo afferma chi lo intese) tali pregi da meritare di esser reso pubblico con la stampa. Tale era appunto l'intenzione dell'Autore, il quale poco prima della morte aveva già avviato trattative per quello scopo. Auguriamo che queste sian proseguite con successo!

L'opera didattica del DE PAOLIS non si restringeva alla scuola: in casa sua, come a passeggio, i suoi scolari lo trovavano sempre disposto ad ascoltarli, a consigliarli amichevolmente⁽³⁷⁾, ad eccitarli nello studio e nella ricerca, seguendo con cura i loro primi passi, esaminando e criticando attentamente i loro primi lavori. Per tal modo s'accrescevano grandemente l'affetto dei suoi discepoli per lui e l'influenza sua su di essi.

⁽³⁵⁾ Questa parte (7 od 8 lezioni) il DE PAOLIS aveva in animo da vari anni di pubblicare. E ciò fu fatto da un suo discepolo, il Dr. BOGAEWSKI, che la stampò (col titolo che sopra s'è scritto in corsivo) *in lingua russa* a Chiew (1889). Con questo abbiain nominato tutti i 20 lavori del DE PAOLIS che sono per le stampe.

⁽³⁶⁾ Così in un corso che intitolò « *Conferenze sui fondamenti della Geometria pura* » (1888-89) si valse molto della sua Memoria sui gruppi geometrici (della Società dei XL).

⁽³⁷⁾ Trovo tra i consigli che egli negli ultimi anni soleva dare ai giovani ed alcuni che io ho pubblicati altrove l'anno scorso una coincidenza siffatta che mi parrebbe di ripetermi riproducendoli qui. Vi è un'assoluta consonanza d'idee su tutto,

La sua bontà lo faceva amare da tutti. In famiglia era modello di marito, di padre, di fratello amorosissimo. In essa, nella tranquillità degli affetti domestici, giocando con la sua piccola Elena, coltivando i fiori del suo giardino, egli si riposava dalle fatiche della scuola. Ma anche della compagnia dei colleghi e degli amici si dilettava. Ed in essa riusciva piacevolissimo per la chiarezza e profondità d'idee in tutti gli argomenti, ed anche per la larga vena di allegria che vi portava, divertendo spesso con motti e giuochi di parole. Modesto e di squisita delicatezza d'animo, poneva ogni cura nel nascondere, conversando con altri di minor ingegno, la propria superiorità. Domandava sempre sulle cose sue giudizi franchi e non elogi: e le critiche accettava volentieri e ne teneva conto. Nei suoi propri giudizi relativi a uomini ed a cose era di una grande drittura: come lodava il bene, così il male biasimava apertamente, senza reticenze: frenato solo nell'opporsi ad esso dalla naturale mitezza d'animo.

La sua dolce simpatica figura lascia in quanti l'han conosciuto un vivissimo rimpianto ed un mesto affettuoso ricordo. Alla scienza il suo nome rimarrà come quello di un geometra che, alla rara potenza dell'ingegno congiungendo diligenza e severità nelle ricerche e negl'intendimenti, seppe fare in più campi cose originali ed importanti.

Torino, Settembre 1892.