CORRADO SEGRE

Monge e le congruenze generali di rette

Bibliotheca Math., Vol. **8** (1907), p. 321–324

in: Corrado Segre, Opere, a cura della Unione Matematica Italiana, Volume IV, Edizione Cremonese, Roma, 1963, p. 469–473

LXXXVI.

MONGE E LE CONGRUENZE GENERALI DI RETTE

« Bibliotheca mathematica », III Folge, 8, 1907, pp. 321-324.

Il *Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais* (1781) di MONGE [1] contiene le prime proposizioni sulle congruenze *generali* di rette, oltre a quelle speciali relative alle congruenze *normali.*

È diviso in due parti, corrispondenti rispettivamente al problema dei trasporti entro un dato piano, oppure nello spazio.

La 2ª Parte, prima d'entrare in materia, stabilisce, come dice l'Autore (p. 685), alcune proposizioni di Geometria, sulle quali son fondate le ricerche seguenti.

Anzitutto si ha nell'art. XIX (pp. 685-687) la proposizione così enunciata:

« Si par tous les points d'un plan, l'on conçoit des droites menées dans l'espace, suivant une loi quelconque, et qu'on considère une de ces droites, je dis que de toutes celles qui l'environnent et qui en sont infiniment proches, il n'y en a généralement que deux qui la coupent, et qui soient par conséquent dans un même plan avec elle. »

La dimostrazione di MONGE coincide con una, che anche oggidì si trova frequentemente esposta. La retta del dato sistema vien rappresentata colle equazioni, in coordinate variabili di punti x, y, z,

$$x - x' + Az = 0\,, \quad y - y' + Bz = 0\,;$$

A e B essendo delle funzioni di x' e y', determinate dalla legge secondo cui vengon condotte le rette nello spazio. Affinchè quella

[1] *Histoire de l'académie royale des sciences.* Année 1781. Avec les Mémoires de mathématique et de physique, pour la même année. Paris 1784. A pp. 34-38 della *Histoire* è riassunto il concetto del lavoro. Questo si trova poi a pp. 666-704 dei *Mémoires.*

retta sia incontrata (nel punto x, y, z) dalla retta infinitamente vicina, corrispondente ai valori $x' + dx'$, $y' + dy'$ dei parametri, si dovrà avere:

$$dx' = zdA, \quad dy' = zdB.$$

Ne segue

$$dx'dB = dy'dA.$$

Ora, sostituendo qui ad A e B le date funzioni di x', y', si ottiene un'equazione di 2^0 grado pel rapporto dy'/dx': donde si deduce il teorema enunciato.

Art. XX (p. 687). « Il suit de-là que dans le système de droites dont il s'agit, on peut toujours passer de deux manières différentes d'une quelconque de ces droites à une autre infiniment proche, qui soit avec elle dans un même plan: cela posé, de l'une quelconque de ces droites, passons en effet à l'une de celles qui la coupe, ensuite et dans le même sens, à celle qui coupe la seconde, de-là à celle qui dans le même sens coupe la troisième; il est évident qu'en continuant ainsi de suite nous parcourrons une surface développable: par la même raison, en employant constamment l'autre sens, nous aurions parcouru une autre surface développable qui auroit évidemment coupé la précédente dans la première droite que nous avons considérée: et parce qu'il n'y a aucune de ces droites pour laquelle on ne puisse faire la même opération, il s'ensuit que toutes ces droites ne sont autre chose que les intersections de deux suites de surfaces développables, telles que chaque surface de la première suite coupe toutes celles de la seconde en lignes droites, et réciproquement. »

Dopo queste ricerche sui sistemi generali di rette, si passa ai sistemi normali.

Art. XXI (pp. 687-689). « Si l'on conçoit toutes les normales possibles d'une surface courbe quelconque, je dis qu'elles sont toujours les intersections de deux suites de surfaces développables, telles que chaque surface de la première suite coupe toutes celles de la seconde en lignes droites et à angles droits, et réciproquement. »

Per dimostrare ciò, prende il sistema delle normali

$$x - x' + p'(z - z') = 0, \quad y - y' + q'(z - z') = 0,$$

alla superficie luogo del punto (x', y', z'); e ritrova direttamente per questo sistema l'equazione di 2^0 grado in dy'/dx', già adoperata nell'Art. XIX. Indi, supponendo preso l'asse delle z parallelo alla normale in (x', y', z'), osserva che quell'equazione risulta avere per prodotto delle radici -1. Ne segue che quei due piani che noi ora chiamiamo *focali* sono ad angolo retto.

L'Art. XXII ed i segu[i] svolgono una serie di considerazioni e di ricerche, che poi son diventate classiche, intorno ai raggi di curvatura di una superficie, linee di curvatura, luoghi dei centri, ecc. Esse si ritrovano più tardi nel Trattato *Feuilles d'analyse appliquée à la géométrie* (2); ma in questa Memoria comparivano per la prima volta. Rileviamo soltanto che nel breve Art. XXIII (p. 690) MONGE, considerando gli spigoli di regresso dei due sistemi di sviluppabili formati dalle normali ad una superficie, ottiene senz'altro due superficie a cui saranno tangenti tutte quelle rette. Ora, poichè nell'Art. XX si era stabilita per una congruenza *qualunque* l'esistenza dei due sistemi di sviluppabili, anche per una congruenza generale varrà quella considerazione di MONGE, si avranno cioè due superficie *focali* (3).

Infine (Art. XXXIV, pp. 699 e seg^{i}) si ritorna al problema dei *déblais et remblais*:

« Étant donnés dans l'espace, deux volumes égaux entr'eux, et terminés chacun par une ou plusieurs surfaces courbes données; trouver dans le second volume le point où doit être transportée chaque molécule du premier, pour que la somme des produits des molécules multipliées chacune par l'espace parcouru soit un *minimum ?* »

MONGE suppone essenzialmente che per fare i trasporti si possan percorrere cammini *rettilinei*. Risulta allora che tutte le rette congiungenti gli elementi corrispondenti dei due volumi dovranno formare una *congruenza* (non un complesso). In conseguenza, per gli Art^{i} XIX, XX, le rette stesse saranno le intersezioni di due sistemi di sviluppabili, tali che ogni superficie del 1^0 sistema taglia quelle del 2^0 sistema secondo linee rette. Ma per avere il *minimo* suddetto si vede che quelle sviluppabili devon tagliarsi ad angolo retto.

---

(2) 1^a edizione, Paris 1795. La 3^a ediz. (1807) e le successive s'intitolano, come è noto, *Application de l'analyse à la géométrie.* È interessante per noi osservare che la 4^a ediz. (1809) è preceduta da un elenco di Memorie pubblicate da MONGE, nelle quali « *on trouvera ... plusieurs questions qui n'ont pas été traitées dans cet ouvrage* » ; e che fra esse è posta in evidenza quella *sur les déblais et remblais* col seguente avvertimento: « *On y trouve la théorie des lignes de courbure d'une surface, et la démonstration de cette proposition remarquable par sa généralité ...* » (Segue l'enunciato, sopra riferito, del teorema fondamentale contenuto nell'Art. XIX).

(3) Forse anche non sarà inutile quest'altra osservazione. A p. 698 (Art. XXXII) del *Mémoire* si ha un pennello elementare di normali, e calcolando l'area di una sua sezione retta, alla distanza variabile u dal punto della data superficie, si trova un'espressione proporzionale a $(u - R)(u - R')$, ove R, R' sono i raggi di curvatura. È un'anticipazione del risultato di MALUS, HAMILTON e KUMMER, intorno all'*intensità* luminosa (*clarté*), o *densità* di un sistema di raggi.

Perciò, applicando l'Art. XXI, MONGE conchiude che i cammini cercati seguiranno le rette normali di una stessa superficie (4).

Ho creduto che valesse la pena di mettere in evidenza, per chi non ha modo di consultare la Memoria di MONGE, il suo contenuto geometrico, che non pare sufficientemente noto (5).

In fatti la maggior parte degli scrittori di Geometria della retta ritengono che MONGE abbia solo considerato le congruenze *normali* di rette, e che quelle *più generali* si trovino per la prima volta nel noto lavoro di MALUS (6), l'antico discepolo di MONGE. In conseguenza attribuiscono a MALUS la scomposizione di quelle congruenze in due sistemi di sviluppabili, e quindi l'esistenza delle due superficie focali.

Così faceva già HAMILTON (7). Ed ora, fra i moderni, MANNHEIM (8), DARBOUX (9), LIE (10), ZINDLER (11), ed altri.

---

(4) Come si sa, dopo MONGE, si occuparono della questione dei *déblais et remblais* DUPIN ed altri, introducendo ipotesi più conformi ai casi pratici.

(5) Nelle *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik herausgegeben von* M. CANTOR, 4, Leipzig 1908, articolo di V. KOMMERELL, pp. 451 e seg^{i}, non si parla del *Mémoire* di MONGE: forse perchè l'Autore supponeva che la sostanza geometrica di esso si ritrovi tutta nelle *Feuilles d'analyse,* di cui è esposto minutamente il contenuto (pp. 559 e seg^{i}). Invece qui MONGE non aveva riportato le cose relative alle congruenze generali di rette. Cfr. la nota a p. 322.

(6) *Optique*; Journ. de l'éc. polyt., 7 (= 14^{e} cahier), 1808. Insieme a tante altre cose originali notevoli vi si ritrovano i risultati di MONGE sopra riportati, senz'alcuna citazione.

(7) *Theory of systems of rays*; Trans. Irish Acad., 15, 1828. *First supplement to an essay on the theory...*; ibid., 16, 1830. V. specialmente in questo secondo lavoro la fine di p. 22.

KUMMER, *Allgemeine Theorie der geradlinigen Strahlensysteme* (Journal für Math. 57, 1859) nell'introduzione cita MONGE solo per le congruenze normali.

(8) *Mémoire sur les pinceaux de droites et les normalies,* Journal de math., 17_2, 1872 (v. la fine di p. 121).

(9) *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, 2^{e} Partie, Paris 1889; v. la nota a p. 280.

(10) *Geometrie der Berührungstransformationen, dargestellt von* LIE *und* SCHEFFERS, Leipzig 1896. V. le notizie storiche a pp. 268 e seg^{i}. È caratteristica la 3^{a} nota a piè della p. 271, relativa alle congruenze normali: « *Dieser spezielle Fall ist, wie oben erwähnt wurde, schon von* MONGE *betrachtet worden. Einige ältere Verfasser haben wohl mit Unrecht* MONGE *die allgemeineren Betrachtungen zugeschrieben, die* MALUS *anstellte* ». (La citazione « Vgl. auch Mémoires de l'Académie 1781, S. 684 », che si trova a p. 268, sembra tolta da un'altra Memoria di MONGE che ivi pure è citata, e che conteneva già l'indicazione *sbagliata* p. 684).

11) *Die Entwicklung und der gegenwärtige Stand der differentiellen Liniengeome-*

Da quanto ho esposto risulta che questa opinione deve essere corretta (12).

---

trie; Jahresber. der deutschen Math.-Verein., 15, 1906. V. il contrasto che qui vien posto fra MALUS e MONGE nella nota (2) a p. 186. Lo si ritrova al principio del cenno storico, a p. 128 del trattato dello stesso Autore: *Liniengeometrie mit Anwendungen*, II Bd., Leipzig 1906.

(12) Mi sia permesso di aggiungere qui un'altra piccola osservazione storica sulla Geometria della retta.

La legge secondo cui variano i piani che son tangenti ad una rigata non sviluppabile nei punti di una sua generatrice rettilinea è comunemente attribuita a CHASLES (*Mémoire sur les surfaces engendrées par une ligne droite*; Correspondance mathém. et physique, 3_3, 1838). Ma già HAMILTON, nella citata *Theory of systems of rays*, a pp. 108-109, aveva ricercato la detta legge, e ne aveva stabilita l'equazione sotto la forma, ora ben nota, $\delta \, tg P = u$. La costante u, che ora suol dirsi *parametro*, vien chiamata da HAMILTON col termine espressivo « *coefficient of undevelopability* ». Essa compare anche nell'espressione $\Delta = \sqrt{u^2 + \delta^2} \, . \, d\Theta$, che egli dà per la distanza che un punto mobile sulla generatrice ha dalla generatrice successiva (facente con quella l'angolo $d\Theta$). In particolare ne trae che u è uguale alla minima distanza fra queste due rette divisa pel loro angolo.