Corrado Segre

Sur une expression nouvelle du moment mutuel de deux complexes linéaires

Jour. für die reine und angewandte Math., Vol. **99** (1885), p. 169–172

in: Corrado Segre, Opere, a cura della Unione Matematica Italiana, Volume IV, Edizione Cremonese, Roma, 1963, p. 58–62

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Segre_CW_4_58>

LVIII.

SUR UNE EXPRESSION NOUVELLE DU MOMENT MUTUEL DE DEUX COMPLEXES LINÉAIRES

« Journal für die reine und angewandte Mathematik »,
Band IC, 1885, pp. 169-172.

En représentant par k et k' les paramètres (principaux) de deux complexes linéaires c et c', par x et x' leurs axes et par $\varDelta$ et φ la distance et l'angle de ces axes, M. KLEIN a nommé *moment mutuel* de c, c' l'expression

$$(k + k') \cos \varphi - \varDelta \sin \varphi \ (^1),$$

et il a donné sans démonstration le théorème que ce moment est exprimé, à moins de certains facteurs, par l'invariant simultané des deux complexes c, c', ou en d'autres termes qu'il s'annule lorsque ceux-ci sont en involution. Cette expression a une grande importance, non seulement dans la géométrie métrique des complexes linéaires, mais aussi dans la dynamique des corps rigides. En effet M. BALL, qui dans sa *Theory of Screws* (2) l'a considérée sous le nom de *coefficient virtuel* de c, c', a prouvé (ce que M. KLEIN avait déjà entrevu) que le travail développé par une torsion (*twist*) d'amplitude infiniment petite γ autour de c sur un corps solide soumis à l'action d'un torseur (*wrench*) d'intensité γ' suivant c' est le produit de ce coefficient virtuel par $\gamma\gamma'$.

---

(1) V. *Die allgemeine lineare Transformation der Liniencoordinaten,* Math. Ann., II, p. 368. Au fait dans ce travail le terme $\varDelta \sin \varphi$ est précédé par le signe +, mais cette différence de signe n'est pas essentielle. On verra d'ailleurs par la suite pourquoi je fais ce changement et comment on doit choisir les signes des différentes quantités qui entrent dans cette expression pour qu'elle soit exacte.

(2) Dublin: Hodges, Foster & Co., 1876, v. p. 13.

Or on peut donner au moment mutuel de c, c' une forme plus simple en introduisant la considération de l'*angle* de c, c' dans le sens de M. CAYLEY, en prenant pour absolu de l'espace de complexes linéaires la variété quadratique des complexes spéciaux ; car il existe alors la relation

$$2\sqrt{kk'}\cos cc' = (k + k')\cos\varphi - \varDelta \sin\varphi \text{ (3)}.$$

J'ai démontré analytiquement cette formule, qui me paraît digne de remarque, dans une Note sur les géométries métriques des complexes linéaires et des sphères (4), où j'ai aussi montré comment elle est liée étroitement à la formule connue qui donne le cosinus de l'angle de deux sphères en fonction de leurs rayons et de la distance de leurs centres, et comment elle peut être prise pour fondement d'une géométrie métrique du système de trois droites dans l'espace. Mais comme cette démonstration analytique est un peu longue et s'appuie sur des considérations très générales, mais par cela même un peu élevées, je veux en exposer ici en quelques lignes une nouvelle démonstration synthétique fort simple, qui ne fait usage que de propositions très connues.

Soient c, c' les deux complexes linéaires que nous considérons, et donnons toujours à k et k', x et x', $\varDelta$ et φ la signification dite. Soit ϱ le rapport anharmonique de c, c' et des deux complexes spéciaux d, d_1 de leur faisceau : on aura pour l'*angle* de c, c' (angle dont il s'agit d'exprimer le cosinus en fonction de k, k', $\varDelta$ et φ) :

$$cc' = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log \varrho,$$

(3) Il s'ensuit que le travail développé par une torsion γ suivant c sur un corps rigide soumis à un torseur γ' suivant c' est donné par le produit de deux quantités ($\gamma\sqrt{2k}$, $\gamma'\sqrt{2k'}$), qui dépendent respectivement de la torsion et du torseur, et du cosinus de l'angle de c, c'. Ce fait est analogue à ce qui arrive pour le travail développé pendant un déplacement infiniment petit d'un point soumis à l'action d'une force.

(4) *Sulle geometrie metriche dei complessi lineari e delle sfere e sulle loro mutue analogie*, Atti Acc. Torino, XIX [V. queste « Opere », III, pp. 262-287]. Dans cette Note j'ai établi ce fait, qui n'avait pas encore été remarqué, c'est-à-dire que la géométrie métrique (euclidienne) des sphères est un cas particulier de celle des complexes linéaires, de façon que dans chaque proposition de cette dernière géométrie où il y a des complexes linéaires (avec leurs axes et leurs paramètres), des droites, des angles de deux complexes linéaires, des moments de deux droites, on peut les remplacer respectivement par des sphères (avec leurs centres et les carrés de leurs rayons), des points, des angles de deux sphères, des carrés de distances de deux points, en remplaçant en même temps par zéro chaque angle de deux droites.

d'où

$$\cos cc' = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{2}\log \varrho} + e^{-\frac{1}{2}\log \varrho}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\varrho} + \frac{1}{\sqrt{\varrho}}\right) = \frac{\varrho + 1}{2\sqrt{\varrho}}.$$

Or le rapport anharmonique ϱ de c, c', d, d_1 est le même que celui des points à l'infini des axes de ces complexes, c'est-à-dire des points à l'infini de x, x', d, d_1. Donc

$$\varrho = \frac{\sin dx}{\sin dx'} : \frac{\sin d_1 x}{\sin d_1 x'} = \frac{\sin dx}{\sin (dx + \varphi)} : \frac{\sin d_1 x}{\sin (d_1 x + \varphi)} = \frac{\cot \varphi + \cot d_1 x}{\cot \varphi + \cot dx},$$

$$\cos cc' = \frac{\varrho + 1}{2\sqrt{\varrho}} = \frac{2\cot \varphi + (\cot dx + \cot d_1 x)}{2\sqrt{(\cot \varphi + \cot dx)(\cot \varphi + \cot d_1 x)}} =$$

$$= \frac{2\cot \varphi + (\cot dx + \cot d_1 x)}{2\sqrt{\cot^2 \varphi + \cot \varphi (\cot dx + \cot d_1 x) + \cot dx \cot d_1 x}}.$$

Pour exprimer la somme et le produit de $\cot dx$ et $\cot d_1 x$, la voie suivante se présente naturellement. Il y a, comme l'on sait, une droite qui rencontre perpendiculairement les quatre droites x, x', d, d_1 en certains points X, X', D, D_1 (de sorte que $XX' = \Delta$); on aura donc en appliquant aux deux droites d, d_1, qui sont conjuguées par rapport à chacun des complexes c, c', un théorème connu

$$D_1 X' \operatorname{tg} dx' = k', \qquad D_1 X \operatorname{tg} dx = k.$$

La première de ces relations peut s'écrire ainsi

$$(D_1 X + \Delta) \operatorname{tg} (dx + \varphi) = k',$$

ou bien, à cause de la seconde

$$(k \cot dx + \Delta)(\operatorname{tg} dx + \operatorname{tg} \varphi) = k'(1 - \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} dx),$$

c'est-à-dire

$$(k \cot dx + \Delta)(1 + \operatorname{tg} \varphi \cot dx) = k'(\cot dx - \operatorname{tg} \varphi),$$

ou enfin

$$k \operatorname{tg} \varphi \cdot \cot^2 dx + (k - k' + \Delta \operatorname{tg} \varphi) \cot dx + (\Delta + k' \operatorname{tg} \varphi) = 0.$$

Il est clair que cette équation du 2e degré, de même qu'elle a pour racine $\cot dx$, aura aussi pour racine $\cot d_1 x$; donc

$$\cot dx + \cot d_1 x = \frac{k' - k - \varDelta \operatorname{tg} \varphi}{k \operatorname{tg} \varphi}, \qquad \cot dx \cot d_1 x = \frac{\varDelta + k' \operatorname{tg} \varphi}{k \operatorname{tg} \varphi}.$$

Ainsi en substituant on aura

$$\cos cc' = \frac{2k + (k' - k - \varDelta \operatorname{tg} \varphi)}{2\sqrt{k^2 + k(k' - k - \varDelta \operatorname{tg} \varphi) + k \operatorname{tg} \varphi (\varDelta + k' \operatorname{tg} \varphi)}} =$$

$$= \frac{k + k' - \varDelta \operatorname{tg} \varphi}{2\sqrt{kk'(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)}} = \frac{(k + k') \cos \varphi - \varDelta \sin \varphi}{2\sqrt{kk'}},$$

c'est-à-dire

$$2\sqrt{kk'} \cos cc' = (k + k') \cos \varphi - \varDelta \sin \varphi,$$

qui était justement la formule à démontrer.

Comme pour l'involution des deux complexes c, c' il faut qu'ils soient conjugués harmoniquement par rapport aux deux complexes spéciaux de leur faisceau, c'est-à-dire que $\cos cc' = 0$, on tire de cette formule la condition d'involution due à M. Klein

$$(k + k') \cos \varphi - \varDelta \sin \varphi = 0.$$

Mais on peut aussi démontrer cette condition de la manière encore plus simple qui suit. On voit très facilement que si x, x' sont deux droites quelconques, dont les conjuguées par rapport à c soient y, y', et les conjuguées par rapport à c' soient z, z', l'involution de c, c' est caractérisée par ce que si y et z' se coupent, y' et z se couperont aussi. Or si x, x' sont, comme auparavant, les axes de c, c', il arrive précisément que y et z' étant des droites à l'infini, se coupent; donc *l'involution de deux complexes linéaires* c, c' *est caractérisée par ce que les droites* z, y' *correspondant aux axes* x, x' *de* c, c' *relativement à* c', c, *se coupent.* Cette condition se traduit facilement en équation. La droite qui rencontre perpendiculairement en X, X' les deux axes x, x', rencontrera aussi perpendiculairement en deux points Y', Z les deux droites y', z, et on aura

$$XY' \operatorname{tg} \varphi = k, \qquad ZX' \operatorname{tg} \varphi = k'.$$

Mais y', z se rencontrent si Y' et Z coïncident, c'est-à-dire si

$$XY' + ZX' + X'X = 0,$$

ou bien, en mettant $-\Delta$ au lieu de $X'X$, en multipliant par $\operatorname{tg}\varphi$ et en faisant usage des relations précédentes, si

$$k + k' - \Delta \operatorname{tg} \varphi = 0.$$

Donc celle-ci est la condition d'involution de c, c', et elle équivaut évidemment à celle qu'il s'agissait de prouver (5).

---

(5) J'ai exposé cette démonstration il y a trois ans à l'université de Turin, où j'étais alors étudiant.

Turin, le 15 Mai 1885.