Corrado Segre

Sugli spazi fondamentali di un'omografia

Rend. R. Acc. Naz. Lincei, Vol. **2** (1885-86), p. 325–327

in: Corrado Segre, Opere, a cura della Unione Matematica Italiana, Volume IV, Edizione Cremonese, Roma, 1963, p. 78–80

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Segre_CW_4_78>

LX.

SUGLI SPAZI FONDAMENTALI DI UN'OMOGRAFIA

« Atti della Reale Accademia dei Lincei »,
Rendiconti, serie quarta, vol. II, 1886, 1º semestre, pp. 325-327.

In una Memoria *Sulla teoria e sulla classificazione delle omografie in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni*, pubblicata nel vol. XIX, ser. 3ª (1884) delle Memorie di cotesta illustre Accademia [V. queste « Opere », III, p. 304], avevo incontrato analiticamente (ai nⁱ 12 e 13) una corrispondenza tra gli *spazi fondamentali di punti* (cioè gli spazi costituiti dai punti uniti) e gli *spazi fondamentali di piani* di un'omografia. Tale corrispondenza era spiegata geometricamente dal fatto (nº 12) che un'omografia qualunque non degenere (tra due spazi sovrapposti) è correlativa alla sua inversa, e in alcune proposizioni poi stabilite la sua considerazione riusciva indispensabile. Mancava però una definizione geometrica della corrispondenza stessa, tale che permettesse sempre di costruire per ogni spazio fondamentale di punti lo spazio fondamentale *coniugato* di piani, o viceversa. Quella lacuna viene riempita dal seguente

Teorema. *In un'omografiia qualunque non degenere dello spazio ad* n *dimensioni indicando con* S_r *e* Σ_r *due spazi fondamentali coniugati di punti e di piani, il luogo dei centri di prospettiva delle coppie di* S_{r+1} *corrispondenti passanti per* S_r *è l'* S_{n-r-1} *sostegno di* Σ_r. *Inoltre la corrispondenza che così viene a determinarsi tra gli* S_{r+1} *passanti per* S_r *e i centri di prospettiva di essi coi loro* S_{r+1} *corrispondenti è un'omografia. E dualmente.*

Per dimostrarlo prendo anche qui le equazioni dell'omografia data sotto la loro forma più generale, cioè:

(1) $$\sum_i a_{ik} y_i = \sum_i b_{ik} y'_i,$$

dove y, y' indicano due punti corrispondenti qualunque. Lo spazio fondamentale di punti S_r sarà costituito da tutti i punti x tali che, per un certo valore di $p : q$

(2) $$\sum_i (p a_{ik} + q b_{ik}) x_i = 0,$$

e quello coniugato di piani Σ_r da tutti i piani ξ tali che

(3) $$\sum_i (q \alpha_{ik} + p \beta_{ik}) \xi_i = 0$$

(dove α_{ik}, β_{ik} indicano i subdeterminanti complementari di a_{ik}, b_{ik} nei determinanti $| a_{ik} |$, $| b_{ik} |$, divisi rispettivamente per questi determinanti). Il centro di prospettiva di due S_{r+1} corrispondenti passanti per S_r sarà il centro di prospettiva delle punteggiate (S_1) corrispondenti che congiungono un determinato punto x di S_r a due punti corrispondenti qualunque y, y' degli S_{r+1}. Ora si ha dalle (1) e (2):

$$\sum a_{ik} (y_i + \lambda p x_i) = \sum b_{ik} (y'_i - \lambda q x_i),$$

che, confrontata colle (1), prova che nelle punteggiate corrispondenti considerate xy e xy' le coppie di punti corrispondenti si hanno facendo variare λ nelle espressioni $y_i + \lambda p x_i, y'_i - \lambda q x_i$. Moltiplicandole rispettivamente per q e p, e sommandole avremo le espressioni

(4) $$t_i = q y_i + p y'_i,$$

che saranno adunque le coordinate di un punto t per cui passa, qualunque sia λ, la congiungente quella coppia di punti corrispondenti; sicchè t è il centro di prospettiva cercato.

D'altronde moltiplicando le (3) (dopo trasportato il termine in p nel 2° membro) e le (1), e poi sommando rispetto a k avremo

$$q \sum_{il} y_i \xi_l \sum_k a_{ik} \alpha_{lk} = - p \sum_{il} y'_i \xi_l \sum_k b_{ik} \beta_{lk},$$

ossia

$$\sum_i (q y_i + p y'_i) \xi_i = 0.$$

Ora questa in causa delle (4) diventa

$$\Sigma\, \xi_i t_i = 0,$$

ed esprime che il centro di prospettiva t sta sempre su ogni piano ξ dello spazio fondamentale Σ_r, cioè sul sostegno S_{n-r-1} dello spazio stesso.

Per dimostrare poi che questo S_{n-r-1} è tutto costituito da quei punti t e completare in pari tempo la dimostrazione del teorema, imaginiamo segati tutti gli S_{r+1} passanti per S_r mediante uno spazio R_{n-r-1} il quale non incontri S_r e supponiamo che pel punto y preso su ciascuno di quegli S_{r+1} si scelga precisamente il punto d'intersezione di questo con R_{n-r-1}: basterà provare che allora la corrispondenza tra i punti y ed i punti t è un'omografia non degenere. Le (4) sono equazioni che, tenendo anche conto delle (1), esprimono le t_i linearmente per mezzo delle y_i: vi è dunque solo da mostrare che da esse (e dalle equazioni di R_{n-r-1}) si potranno pure ricavare le y_i come funzioni lineari delle t_i. Ora in caso contrario dovrebbe accadere, com'è noto, che ad un punto t corrispondessero infiniti punti y; mentre ad un punto t non può corrispondere che un solo punto y, giacchè se gli corrispondessero y e z si avrebbe dalle (4)

$$t_i = q y_i + p y'_i = q z_i + p z'_i\,,$$

ossia

$$p\,(y'_i - z'_i) = -\,q\,(y_i - z_i),$$

e sostituendo nelle seguenti (che risultano dalle (1) e analoghe)

$$\sum_i a_{ik}\,(y_i - z_i) = \sum_i b_{ik}\,(y'_i - z'_i)$$

si avrebbe

$$\sum_i\,(p a_{ik} + q b_{ik})\,(y_i - z_i) = 0,$$

cioè (confrontando colle (2)) il punto $y_i - z_i$, punto della retta yz, e quindi di R_{n-r-1}, sarebbe un punto dello spazio fondamentale S_r, contro l'ipotesi che questo non sia tagliato da R_{n-r-1}. Il teorema è dunque completamente dimostrato.

Torino, 8 Aprile 1886.