Corrado Segre

Corrado Segre

Su alcune proprietà metriche delle correlazioni

Giornale di Mat., Vol. **25** (1886), p. 20–24
in: Corrado Segre, Opere, a cura della Unione Matematica Italiana, Volume IV, Edizione Cremonese, Roma, 1963, p. 81–86

LXI.

SU ALCUNE PROPRIETÀ METRICHE DELLE CORRELAZIONI (1)

« Giornale di matematiche di BATTAGLINI »,
vol. XXV, 1886, pp. 20-24.

1. Due figure correlative dello spazio ordinario i cui *centri* (punti corrispondenti al piano all'infinito) siano al finito si possono sempre disporre, com'è noto (2), in modo da diventare polari rispetto ad una quadrica (reale od imaginaria) dotata di centro. Ne segue che varie proprietà metriche note che hanno luogo nelle polarità rispetto a tali quadriche si estendono quasi immediatamente alle correlazioni generali facendovi comparire solo quei legami tra due figure polari che non dipendono dalla loro particolare posizione reciproca.

Ma due figure che si corrispondano in una correlazione *parabolica*, cioè in una correlazione in cui i centri siano all'infinito, non si possono disporre in modo da diventar polari rispetto ad una quadrica (la quale sarebbe un paraboloide) che in un caso particolare. Perciò le relazioni che legano due tali figure vanno studiate espressamente, non potendosi esse ridurre a quelle cui dà luogo la teoria della polarità. Ed esse offrono un interesse particolare per quest'altro fatto: che tra le correlazioni paraboliche vi è evidentemente la corrispondenza rispetto ad un sistema nullo; laonde le proprietà metriche del sistema nullo e dei paraboloidi si troveranno così legate tra loro dall'essere casi particolari di proprietà delle correlazioni paraboliche.

---

(1) Potrà servire d'esercizio ai giovani lettori il cercare le dimostrazioni delle proposizioni nuove, che sono enunciate in questa breve Nota.

(2) V. REYE a p. 168 del vol. 79 del *Journal für Mathematik*.

2. Chiamando *coppia di assi* di due figure correlative Φ, Φ' due loro rette tali che a ciascuna di esse corrisponda la retta all'infinito dei piani perpendicolari all'altra, è chiaro che, mentre per una correlazione coi centri al finito vi sono in generale tre coppie di assi costituenti due triedri trirettangoli uscenti dai centri, per una correlazione parabolica vi è una sola coppia di assi z, z'. Rimanendo in questo secondo caso, le punteggiate determinate su z, z' dai punti *coniugati* di Φ, Φ' (cioè punti di cui l'uno sta nel piano corrispondente all'altro) sono evidentemente simili. Perchè Φ, Φ' si possano disporre in modo da diventar polari rispetto ad un paraboloide queste due punteggiate devono essere eguali. Questa condizione è anche sufficiente: verificandosi essa, basterà muovere Φ o Φ' sovrapponendo z, z' in modo che le punteggiate uguali di punti coniugati poste su esse vengano ad essere inverse, cioè a formare un'involuzione simmetrica, ed inoltre che i fasci proiettivi di piani coniugati di Φ, Φ' uscenti da z, z' vengano a formare un'involuzione, il che si otterrà, com'è noto, facendo coincidere inversamente due coppie coniugate di piani perpendicolari.

Se quei due fasci proiettivi di piani non sono uguali, vi è una sola coppia ξ, η di piani perpendicolari passanti per z, i cui coniugati passanti per z', cioè ξ', η', sono pure perpendicolari; e si dovrà sovrapporre ξ e η', η e ξ', con che si avranno i due piani principali del paraboloide.

Se poi quei due fasci, come le punteggiate considerate di sostegni z, z', sono uguali, converrà distinguere due casi a seconda che l'ente costituito dalla punteggiata e dal fascio aventi per sostegno z è sovrapponibile o no a quello analogo di sostegno z'. Nel 1° caso colla sovrapposizione di z, z' in modo che le loro punteggiate diventino inverse si avrà pure che i loro due fasci uguali di piani coniugati diventino inversi, cioè costituiscano un'involuzione simmetrica; i piani doppi di questa, ortogonali tra loro, conterranno le due generatrici del paraboloide ottenuto uscenti dal vertice; le due figure Φ, Φ' si saranno dunque collocate in modo da esser polari rispetto ad un *paraboloide ortogonale* (od *equilatero*). Nel 2° caso colla sovrapposizione fatta di z, z' i due fasci di piani saranno divenuti concordi e quindi l'involuzione che, con una conveniente rotazione intorno a z, se ne può ottenere è di angoli retti: con ciò Φ e Φ' saranno divenute polari rispetto ad un *paraboloide rotondo* (o *di rivoluzione*) (3).

---

(3) Una correlazione parabolica qualunque in cui i fasci di piani coniugati uscenti dagli assi z, z' sono uguali si potrebbe convenientemente chiamare *di*

3. Supponiamo ora invece che le due figure Φ, Φ', le quali sono in correlazione parabolica, si possano collocare in modo da corrispondersi in un sistema nullo. Ricordando che questo è caratterizzato tra le correlazioni dal fatto che ogni punto o piano è coniugato di se stesso, si vede che quando Φ e Φ' si saranno collocate in tal modo, le punteggiate ed i fasci di punti e piani coniugati aventi per sostegni z, z' coincideranno; e si dimostra pure facilmente che viceversa, se quelle punteggiate e quei fasci coincidono, Φ e Φ' si corrispondono in un sistema nullo. Dunque la condizione necessaria e sufficiente affinchè quelle figure si possano disporre in modo da corrispondersi in un sistema nullo è che le due punteggiate e i due fasci considerati di sostegni z, z' siano uguali, sì che la sovrapposizione delle une e degli altri possa farsi nello stesso tempo. Paragonando coi risultati precedenti si hanno subito le seguenti proposizioni:

Due figure correlative che si possono col movimento rendere corrispondenti in un sistema nullo possono anche rendersi polari rispetto ad un paraboloide ortogonale; e viceversa. Una di quelle figure e la simmetrica dell'altra rispetto ad un punto o ad un piano si possono rendere polari rispetto ad un paraboloide rotondo (4).

Se due figure Φ, Φ' si corrispondono rispetto ad un sistema nullo di asse z, *la simmetrica Φ_1 di Φ' rispetto ad una retta qualunque* p *che incontra perpendicolarmente* z *sarà polare di Φ rispetto ad un paraboloide ortogonale di asse* z *e passante per* p. *In particolare, la simmetrica rispetto a* p *di una retta qualunque del complesso lineare costituito dalle rette che corrispondono a se stesse nel sistema nullo sarà la polare di questa retta rispetto a quel paraboloide; le rette del complesso lineare appoggiate a* p *costituiranno la congruenza lineare delle tangenti al paraboloide nei punti di* p; *e, più in particolare ancora, le rette del complesso lineare che incontrano* p *ad angolo retto sono* (polari di se stesse, cioè) *generatrici di quel paraboloide. Viceversa se Φ, Φ_1 sono figure polari rispetto ad un paraboloide ortogo-*

---

rivoluzione, poichè essa si può generare nel seguente modo: Si facciano rotare due piani π, π' legati da una correlazione parabolica piana intorno ai loro assi z, z' descrivendo fasci uguali e si faccia corrispondere ad ogni punto di π il piano perpendicolare a π' secondo la retta corrispondente.

(4) È notevole che CHASLES nella nota XXX dell'*Aperçu historique* considera successivamente le trasformazioni reciproche date da un paraboloide rotondo e da un sistema nullo (di cui la prima era già stata adoperata da MONGE) senza accorgersi che esse possono considerarsi come identiche, se si fa astrazione da una simmetria.

nale e Φ' è la simmetrica di Φ_1 rispetto ad una delle due generatrici uscenti dal vertice, Φ e Φ' saranno corrispondenti rispetto ad un sistema nullo avente comune l'asse col paraboloide.

Se due figure Φ, Φ' si corrispondono rispetto ad un sistema nullo di asse z, *la figura Φ'' che si ottiene facendo rotare di un retto intorno a* z *la simmetrica di Φ' rispetto ad un punto qualunque di* z *(o ad un piano qualunque normale a* z*) sarà polare di Φ rispetto ad un paraboloide rotondo di asse* z. Ecc.

Il legame che queste proposizioni mostrano tra le proprietà metriche del sistema nullo e dei paraboloidi ortogonale e rotondo può servire ad ottenerne delle nuove; citerò un solo esempio. Si sa che pel paraboloide rotondo i punti dell'asse si raggruppano in coppie di un'involuzione simmetrica (avente per punto doppio il fuoco del paraboloide) sì che i piani uscenti da un tal punto e *coniugati*, rispetto al paraboloide, alle (cioè contenenti le polari delle) rette uscenti dall'altro punto della stessa coppia, sono perpendicolari a queste rette, sicchè le due stelle di piani e di rette che così si hanno sono *supplementari* (cioè tali che l'angolo di due piani qualunque dell'una è uguale a quello delle rette corrispondenti dell'altra). Ciò posto, possiamo ora dedurne che: in un sistema nullo ad ogni punto S dell'asse ne corrisponde un altro S' ad una distanza costante (anche nel segno) $SS' = k$ tale che la stella delle rette uscenti da S e la stella dei piani che da S' proiettano le rette corrispondenti di quelle rispetto al sistema nullo sono supplementari.

4. Questo risultato può servire a provare il noto teorema che il prodotto della distanza di una retta qualunque dall'asse di un sistema nullo per la tangente dell'angolo che la retta corrispondente fa coll'asse è costante (e precisamente vale k); viceversa questo teorema noto conduce facilmente a quel risultato. Ma, fermandoci appunto su quel teorema, importa osservare che esso si può ottenere dal seguente altro notevolmente più generale:

Se z, z' *è una coppia fissa di assi di una correlazione qualunque (di centri al finito o no) ed* r, r' *sono due rette corrispondenti variabili comunque, il rettangolo*

$$\mathit{dist}\ \mathrm{zr}\ \mathit{tg}\ \mathrm{zr} \times \mathit{dist}\ \mathrm{z'r'}\ \mathit{tg}\ \mathrm{z'r'}$$

è costante (5). *Per una quadrica esso è uguale in valor assoluto al*

(5) Per le omografie si hanno relazioni analoghe. *Esistono in un'omografia generale due assi corrispondenti determinati* z, z' *(perpendicolari ai piani limiti) tali*

rettangolo dei semiparametri delle due sezioni principali, passanti per l'asse z ≡ z', *relativi a quest'asse.*

Nel caso della correlazione parabolica, se i due fasci di piani coniugati uscenti dagli assi z, z' *sono uguali, questa proposizione si particolarizza maggiormente. Si ha cioè in tal caso, indicando con* k, k' *due costanti :*

$$\mathit{dist}\ \mathrm{zr}\ \mathit{tg}\ \mathrm{z'r'} = \mathrm{k}, \qquad \mathit{dist}\ \mathrm{z'r'}\ \mathit{tg}\ \mathrm{zr} = \mathrm{k'}.$$

Il rapporto di similitudine delle due punteggiate di punti coniugati poste sugli assi z, z' è precisamente uguale a $k : k'$. Quindi, come caso più particolare, supponendo che quelle punteggiate simili diventino uguali, abbiamo che: *nel sistema nullo e nelle polarità rispetto ai paraboloidi rotondo ed ortogonale il prodotto della distanza di una retta variabile dall'asse per la tangente dell'angolo che la sua polare fa con questo è costante.*

5. Più in generale consideriamo in una correlazione parabolica, in cui i fasci di piani coniugati uscenti dagli assi z, z' siano ancora uguali, un *diametro* qualunque d dell'una figura (cioè una parallela all'asse z) e diciamo δ' la giacitura comune ai piani dell'altra coniugati a d. *Indicando con* r, r' *due rette corrispondenti variabili si avrà la seguente relazione, pure nuova :*

$$\mathit{dist}\ dr \frac{\mathit{sen}\ z'r'}{\mathit{sen}\ \delta' r'} = \mathit{cost.} = \frac{k}{\mathit{sen}\ z'\delta'} = \sqrt{k^2 + l^2},$$

essendo l la distanza di d da z; e una relazione analoga scambiando le due figure e quindi mutando k in k'. In particolare supponendo $k = k'$, cioè che le due punteggiate su z, z' siano uguali, si ha la seguente proposizione, già nota pel sistema nullo [6]:

---

che, se r, r' *sono due rette corrispondenti variabili, il rapporto*

$$\mathit{dist}\ \mathrm{zr}\ \mathit{tg}\ \mathrm{zr}\ :\ \mathit{dist}\ \mathrm{z'r'}\ \mathit{tg}\ \mathrm{z'r'}$$

è costante ; e vi sono inoltre altre due coppie determinate di assi non più corrispondenti (sui piani limiti) tali che, dicendo x, x' *una di esse, è costante il rettangolo*

$$\mathit{dist}\ \mathrm{xr}\ \mathit{tg}\ \mathrm{xr} \times \mathit{dist}\ \mathrm{x'r'}\ \mathit{tg}\ \mathrm{x'r'}.$$

(6) V. D'Ovidio, *Nota sulle proprietà fondamentali dei complessi lineari,* Atti Acc. Torino, XVI.

Nel sistema nullo e nelle polarità rispetto ai paraboloidi rotondo ed ortogonale il prodotto della distanza di una retta qualunque da un diametro arbitrario fisso pel rapporto dei seni degli angoli che la polare di quella fa col diametro stesso e coi piani coniugati a questo è costante.

Torino, 16 Luglio 1886 (7).

---

(7) Il manoscritto di questa Nota si trovava da più mesi presso la Direzione del Giornale quando comparve nell'ultimo fascicolo del vol. 31 della *Zeitschrift für M. u. Ph.* un lavoro del sig. HAUCK: *Ueber die Beziehung des Nullsystems und linearen Strahlencomplexes zum Polarsystem des Rotationsparaboloids,* il quale tratta appunto delle relazioni tra il sistema nullo ed il paraboloide rotondo trovate qui al n. 3 (Gennaio 1887).