Corrado Segre

Sulla varietà cubica con dieci punti doppi dello spazio a quattro dimensioni

Atti R. Acc. Scienze Torino, Vol. **22** (1886-87), p. 791–801

in: Corrado Segre, Opere, a cura della Unione Matematica Italiana, Volume IV, Edizione Cremonese, Roma, 1963, p. 88–98

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Segre_CW_4_88>

LXIII.

SULLA VARIETÀ CUBICA CON DIECI PUNTI DOPPI DELLO SPAZIO A QUATTRO DIMENSIONI

« Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino »,
vol. XXII, 1886-87, pp. 791-801.

Avendo quasi compiuta una ricerca sulle varietà cubiche dello spazio a quattro dimensioni (¹) e specialmente su quelle dotate di punti doppi, ma non potendo per ora pubblicarla, credo bene estrarne alcuni risultati relativi ad un caso particolare molto notevole di tali varietà, sia perchè questi risultati paiono presentare già da sè un certo interesse, sia perchè essi servono a dare un'idea completa del carattere della ricerca più vasta accennata. Mi limiterò del resto ad enunciarli, e non mi fermerò a svilupparne le conseguenze, quando queste si presenterebbero senza difficoltà.

1. La varietà cubica Γ, oggetto di questa Nota, e di cui si vedranno presto delle costruzioni, è quella col massimo numero (finito) di punti singolari, cioè *con dieci punti doppi*. Essa è della 4^a classe, cioè per ogni piano passano quattro dei suoi spazi tangenti. Dipende da 24 costanti e non ha invarianti assoluti.

I 10 punti doppi formano una configurazione molto notevole; essi si raggruppano in 15 quaterne poste rispettivamente su 15 piani che sono i soli piani contenuti in Γ. Per ognuno di questi passa un *fascio* di spazi i quali segano ancora Γ secondo ∞^1 qua-

(¹) Tutti gli enti che si considereranno in questa Nota s'intenderanno, quando non verrà detto il contrario, situati nello spazio a quattro dimensioni. I luoghi di punti ad 1, 2, 3 dimensioni si chiameranno rispettivamente *curva, superficie, varietà,* e se sono lineari *retta, piano, spazio.*

driche: queste determinano sul piano un fascio di coniche passanti pei 4 punti doppi di quel piano. Tra quelle quadriche ve ne sono tre che si spezzano in coppie di piani; quindi ognuno dei quindici piani è incontrato secondo rette (contenenti 2 dei 10 punti), o come dirò più brevemente, è *incidente* ad altri 6, e non incidente (cioè incontrato in un sol punto, punto doppio) ad 8. Se ne trae facilmente che i quindici piani formano 6 diverse quintuple ciascuna delle quali si compone di 5 piani a due a due non incidenti ed incontrantisi precisamente nei 10 punti doppi; ogni piano è contenuto in due diverse quintuple, e viceversa due quintuple hanno comune un piano. Vi sono 15 spazi di cui ciascuno contiene 3 piani e 6 punti della configurazione; per ogni piano di questa ne passano 3 e per ogni punto ne passano 9. Ecc.

2. Chiamando 0, 1, ... , 9 i dieci punti doppi di Γ, le sei quintuple I, II, ... , VI costituite dai quindici piani si possono rappresentare nel seguente modo:

I	0 1 2 6,	0 7 8 9,	4 5 6 7,	2 3 4 8,	1 3 5 9,
II	0 3 4 5,	0 7 8 9,	1 2 3 7,	1 5 6 8,	2 4 6 9,
III	0 2 5 8,	0 1 4 9,	1 2 3 7,	4 5 6 7,	3 6 8 9,
IV	0 3 6 7,	0 1 4 9,	1 5 6 8,	2 3 4 8,	2 5 7 9,
V	0 3 6 7,	0 2 5 8,	2 4 6 9,	1 3 5 9,	1 4 7 8,
VI	0 3 4 5,	0 1 2 6,	1 4 7 8,	2 5 7 9,	3 6 8 9.

Da questa tabella, su cui si verificano gli enunciati del n^0 1, si scorge pure che per ogni punto della configurazione escono sei dei quindici piani, cioè due per ogni quintupla, e che rispetto a quel punto le quintuple si dividono in due gruppi di tre, sì che i piani comuni alle quintuple di uno stesso gruppo sono precisamente i sei piani passanti pel punto. Quindi questi piani si dividono in due gruppi di tre, sì che due piani di gruppi diversi sono sempre incidenti. Lo stesso si può del resto dedurre da ciò che quei sei piani costituiscono l'intersezione di Γ col cono M_3^2 tangente a questa varietà in quel punto doppio.

3. La varietà Γ contiene sei diversi sistemi (∞^2) di rette tali che per ogni punto di Γ passa una retta di ciascun sistema, ed in ogni spazio ve ne sono due. Le sei rette rispettivamente dei sei sistemi uscenti da un punto P di Γ stanno sul cono quadrico inter-

sezione delle due polari (M_3^2 e spazio) di P rispetto a Γ. Uno spazio qualunque sega Γ secondo una superficie cubica su cui sta una determinata bissestupla tale che le due rette di ciascuno dei sei sistemi poste in quello spazio sono due rette coniugate (cioè non incidenti) rispettivamente delle due sestuple costituenti la bissestupla. Le 15 rette di quella superficie cubica che rimangono levando la bissestupla sono le intersezioni dello spazio coi 15 piani di Γ.

Le rette di uno stesso sistema incontrano i piani di una quintupla e non (in generale) i 10 rimanenti piani di Γ; così i sei sistemi di rette corrispondono alle sei quintuple. Un sistema non ha alcuna retta nei piani della quintupla che gli corrisponde, mentre ha in ciascuno dei dieci rimanenti piani di Γ un fascio di rette avente il centro in uno dei dieci punti doppi. Le quadriche di Γ situate negli spazi passanti per uno qualunque dei quindici piani hanno i loro due sistemi di generatrici costituenti rispettivamente quei due sistemi di rette di Γ che sono incidenti alle due quintuple cui quel piano appartiene.

Se da due rette di uno stesso sistema si projettano le rette di un altro sistema, si ottengono due reti projettive [2]. Ne segue che ognuno dei sei sistemi, e quindi anche la varietà Γ, si può generare in infiniti modi come luogo delle ∞^2 rette d'intersezione degli spazi corrispondenti di tre reti projettive. Perchè tre reti projettive aventi per sostegno tre rette date $r_1\, r_2\, r_3$ indipendenti, generino una varietà cubica della specie da noi considerata, è necessario e sufficiente che, scelti ad arbitrio quattro piani indipendenti seganti $r_1\, r_2\, r_3$ si determini la projettività fra le reti facendo corrispondere in esse gli spazi che vanno ad uno stesso di quei quattro piani.

4. La varietà Γ si può anche definire come il luogo delle ∞^2 rette che incontrano quattro piani qualunque non incidenti. Quelle rette costituiranno allora uno dei sei sistemi situati su Γ ed incontreranno ancora un quinto piano costituente coi quattro dati una quintupla. Ne segue facilmente la seguente proposizione notevole:

Le (∞^2) rette che si appoggiano a quattro piani dati (nella posizione più generale) $\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3\, \alpha_4$ ne incontrano pure un quinto perfettamente determinato da quelli con la seguente costruzione: s'indichi con α_i' il piano determinato dai tre punti $\alpha_k\, \alpha_l$, $\alpha_l\, \alpha_m$,

---

[2] Intendo per *rete* la forma (di spazi e piani) che ha per sostegno una retta. Nel lavoro accennato sul principio si vedranno studiate in particolare *tutte* le varietà cubiche generabili mediante tre reti projettive.

$\alpha_m \alpha_k$ (dove $i\ k\ l\ m$ sono i numeri 1 2 3 4 in un ordine qualunque); i piani $\alpha_1' \alpha_2' \alpha_3' \alpha_4'$ così determinati incontreranno rispettivamente i piani $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$ in quattro punti situati su uno stesso piano α_5. Questo sarà precisamente il piano cercato, sì che ogni retta la quale incontri quattro dei piani $\alpha_1 \dots \alpha_5$ incontrerà pure il rimanente [3].

5. La varietà cubica Γ, od anche la configurazione considerata di dieci punti, quindici piani e quindici spazi, è trasformata in se stessa mediante quindici omografie involutorie, ciascuna delle quali ha uno determinato dei quindici piani per *piano assiale*, scambia fra di loro le due quintuple a cui questo piano appartiene ed i due corrispondenti sistemi di rette di Γ, e muta in se stessa ciascuna delle altre quintuple (e i corrispondenti sistemi di rette). Così nelle notazioni del n^0 2 la omografia involutoria determinata dalle tre coppie di punti corrispondenti 14, 25, 36 ha il piano 0 7 8 9 per piano assiale, e la retta che sega le 14, 25, 36 per asse, e trasforma le quintuple I e II l'una nell'altra, e ciascuna delle rimanenti in se stessa.

Il gruppo di omografie determinato da quelle 15 comprende *tutte* le omografie che mutano Γ in se stessa [4].

6. Il *contorno apparente* di Γ rispetto ad un punto qualunque P è la sezione fatta da uno spazio fisso R sul cono (a tre dimensioni) di 4^a classe (come Γ) circoscritto a Γ da P, od anche la projezione fatta da P sopra R della superficie secondo cui quel cono tocca Γ. Questa superficie è la F^6 intersezione di Γ con la M_3^2 polare di P rispetto a Γ; essa ha nei dieci punti doppi di Γ altrettanti punti doppi e contiene quindici coniche nei quindici piani di Γ.

Quando P sta su Γ la F^6 acquista in P un nuovo punto doppio pel quale passano sei rette della superficie: le sei rette di Γ uscenti da P. Quindi in tal caso il contorno apparente di Γ sarà una *superficie* Φ^4 *del* 4^0 *ordine e* 4^a *classe con sedici punti doppi;*

---

(3) È noto che sei rette qualunque sono incontrate da cinque piani determinati. Orbene noi possiamo aggiungere in forza della proposizione ora esposta che questi piani saranno appunto disposti come i piani $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_5$ ivi nominati.

(4) Segando Γ con una varietà quadratica passante pei suoi 10 punti doppi (la prima polare di un punto rispetto a Γ) e considerando questa come un complesso lineare di rette dello spazio ordinario, si ha una notevole *congruenza del* 3^0 *grado di rette di un complesso lineare* dotata di 10 rette doppie (sghembe tra loro) distribuite in quaterne su 15 schiere rigate (quadriche) della congruenza. Varie proprietà di questa si traggono da quelle suesposte di Γ.

dieci di questi sono le projezioni dei punti doppi $0, \ldots, 9$ di Γ, e sei sono le tracce su R delle sei rette di Γ uscenti da P.

La superficie Φ^4 avrà inoltre sedici piani doppi di cui uno contenente gli ultimi 6 punti doppi nominati ed avente per conica di contatto la traccia del cono quadrico (ordinario) tangente ad F^6 in P (la quale conica nella projezione di F^6 andrà considerata come imagine su Φ^4 del punto doppio P di F^6) e quindici saranno le projezioni dei quindici piani di Γ. Φ^4 è dunque la notissima superficie di KUMMER; viceversa questa si può sempre ottenere come contorno apparente nel modo suddetto (5) e viene così ad apparire sotto un nuovo punto di vista seguendo il quale si potrebbe farne uno studio completo. Così tutte le proprietà della configurazione dei punti e piani singolari di quella superficie Φ^4 si ottengono subito dalle cose precedenti, e specialmente da quelle relative alla configurazione dei punti doppi e dei piani di Γ. Così i sei sistemi di rette di Γ daranno come projezioni i sei sistemi di rette di 2° ordine e 2ª classe, costituenti l'insieme delle tangenti doppie di Φ^4; le proprietà di quelle tra queste rette che stanno in un piano relative al loro raggrupparsi in gruppi di tangenti di coniche (o le loro duali), proprietà che si deducono di solito da quelle delle tangenti doppie di una quartica piana, si otterrebbero molto semplicemente per questa via. Così pure le 10 serie di ∞^1 rigate quadriche appartenenti a ciascuna congruenza quadratica si possono ottenere come projezioni delle 5 che appartengono al corrispondente sistema di rette di Γ (n° 3) e delle 5 serie (che facilmente si vedono esistere nello stesso sistema) di infinite rigate cubiche passanti per P. Ecc.

7. Il contorno apparente di Γ rispetto ad un punto esterno P sarà una superficie Φ^6 di 6° ordine e 4ª classe dotata di una curva cuspidale del 6° ordine intersezione di una quadrica con una superficie cubica (6) ed avente inoltre dieci punti doppi aggruppati per

(5) Ogni superficie del 4° ordine (dello spazio ordinario) dotata di un piano tangente lungo una conica (e quindi in particolare tutte le superficie del 4° ordine a conica doppia o cuspidale, tutte quelle che sono focali per sistemi di rette di 2° ordine e classe 2ª, 3ª, 4ª, 5ª e 6ª (di 1ª specie), ogni superficie del 3° ordine con un suo piano bitangente, ecc.) si può considerare come contorno apparente di una varietà cubica conveniente (di S_4) rispetto ad un suo punto. Nel lavoro nominato si vedranno molte applicazioni di questa proposizione.

(6) Ogni superficie del 6° ordine (dello spazio ordinario) avente una tal sestica per curva cuspidale può considerarsi come contorno apparente di una conveniente varietà cubica (di S_4) rispetto ad un punto esterno a questa.

quaterne su quindici piani tangenti doppi: quei dieci punti e quei piani formando precisamente una configurazione identica (projezione) a quella descritta dei punti doppi e piani di Γ. La stessa configurazione si potrà considerare come ottenuta da quella dei punti e piani singolari di una superficie di KUMMER Φ^4 levandone un piano ed i suoi sei punti, e levando nello stesso tempo la condizione pei rimanenti quindici piani di concorrere a cinque a cinque in uno stesso di quei sei punti.

Dalla projezione dei sei sistemi di rette di Γ si ha che la superficie Φ^6 sarà focale per sei diversi sistemi di rette di 3^0 ordine e 2^a classe (7) e che ciascuno di questi conterrà 5 serie di ∞^1 rigate quadriche, delle quali serie ognuna passa pei 4 punti singolari di un piano singolare della quintupla corrispondente al sistema di rette considerato, e tocca gli altri 4 piani della quintupla stessa. Ecc.

Si osservi il legame che da questo metodo viene stabilito fra 6 sistemi di rette confocali di 3^0 ordine e 2^a classe e 6 sistemi confocali di 2^0 ordine e 2^a classe, legame che consiste in ciò che gli uni e gli altri si possono considerare come projezione degli stessi 6 sistemi di rette di una varietà cubica Γ.

8. Se la projezione di Γ si fa da un punto P posto in un piano α di quella varietà, questo si projetterà secondo una retta doppia del contorno apparente di Γ, e questo diverrà una *Complexfläche* (per complessi quadratici) generale di PLÜCKER. Ogni piano che projetti da P una retta di Γ appoggiata ad α sega ancora Γ in (una retta di α ed in) una retta di un altro sistema. Ne segue che i due sistemi di rette di Γ che si appoggiano ad α si projetteranno secondo un solo sistema di rette avente per focali quella superficie e la sua retta doppia. Se P si prende sulla retta congiungente due punti doppi di Γ, vale a dire su una retta comune a due piani di Γ, il contorno apparente avrà due rette doppie incidenti. Infine se P è un punto comune a tre piani di Γ (ma semplice per Γ), il contorno apparente acquistando tre rette doppie poste in uno stesso piano si scinderà in questo piano ed una superficie cubica con quattro punti doppi; in quest'ultimo caso i sei sistemi di rette di Γ si

(7) *Tutti* i sistemi di rette di 3^0 ordine e 2^a classe si possono ottenere in questo modo. Come si vede, le proprietà corrispondenti per dualità a quelle trovate da KUMMER pei sistemi di rette di 2^0 ordine e 3^a classe si ottengono immediatamente insieme con altre per questa via.

projetteranno due a due nei tre sistemi di tangenti di quella superficie cubica che si appoggiano alle tre rette nominate di questa.

9. Si projetti Γ da un punto qualunque P su uno spazio R e da un suo punto doppio, per esempio o, su uno spazio R' e si considerino come corrispondenti due punti di R ed R' quando sono projezioni di uno stesso punto di Γ. Si avrà così tra R e R' una corrispondenza (1, 2) o (1, 3) secondo che P è su Γ o no. Nello spazio R, *doppio* o *triplo* di questa *trasformazione doppia* o *tripla* sarà *superficie limite* il contorno apparente Φ^4 o Φ^6 di Γ, mentre nello spazio semplice R' sarà *superficie doppia* la projezione della F^6 di Γ già considerata, la quale sarà una superficie del 4^0 ordine Ψ^4, poichè il punto o è doppio per la F^6. Nello spazio semplice R' le coppie, o terne, di punti corrispondenti ai singoli punti di R saranno evidentemente allineate col punto P' che è su R' la projezione di P fatta dal punto o; su ogni retta passante per P' esse costituiranno un'involuzione di 2^0 o 3^0 grado, i cui due o quattro punti doppi avranno per luogo la superficie doppia Ψ^4.

10. Le superficie di 4^a classe e 4^0 o 6^0 ordine Φ^4 e Φ^6 vengono così a figurare come superficie limite di una trasformazione doppia o tripla dello spazio. Quanto alla superficie doppia Ψ^4 che loro corrisponde, essa essendo projezione della F^6 avrà nove punti doppi nelle projezioni dei punti $1, \dots, 9$, doppi per F^6 (ai quali corrisponderanno altrettanti punti doppi nella superficie limite) ed inoltre avrà nel 1^0 caso, cioè per la trasformazione doppia, anche in P' un punto doppio pel quale usciranno sei sue rette (projezioni delle sei rette di F^6 uscenti dal suo punto doppio P). In questo caso al punto doppio P' di Ψ^4 corrisponde su Φ^4 la conica di contatto con un piano singolare, mentre alle sei rette di Ψ^4 uscenti da P' corrispondono i sei punti doppi di Φ^4 posti su quella conica. Infine al punto doppio della superficie limite Φ^4 o Φ^6 il quale è projezione di o da P corrisponde in ambi i casi sulla superficie doppia Ψ^4 una conica, intersezione di R' col cono quadrico tangente in o ad F^6.

La projezione dal punto o delle coniche di F^6 poste nei piani di Γ passanti per o (n^0 6) conduce, basandosi sul n^0 2, al seguente risultato: la superficie doppia Ψ^4 ha i suoi nove punti doppi (fatta astrazione da P' nel 1^0 caso) che sono le intersezioni di due terne di rette contenute in essa ed appartenenti ai due sistemi di generatrici di una stessa quadrica. I sei sistemi di tangenti doppie della superficie Φ^4 o Φ^6 sono rappresentati in R' dalle sei congruenze lineari aventi per direttrici le sei coppie di rette sghembe che si possono formare con quelle sei rette di Ψ^4.

11. Gli spazi ed i piani (di S_4) determinano su Γ come sezioni delle superficie e linee del 3^0 ordine che sono projettate da P su R secondo ∞^4 superficie del 3^0 ordine ed ∞^6 cubiche piane *iscritte* nel contorno apparente Φ^4 o Φ^6 di Γ relativo a P, vale a dire tangenti a quella superficie le prime lungo sestiche (appartenenti a quadriche), le altre in sei punti (di una conica). Se P sta su Γ tutte quelle superficie cubiche che così si ottengono iscritte nella superficie di KUMMER Φ^4 passano per sei punti doppi posti in un piano doppio, sicchè di tali superficie iscritte ve ne saranno sedici sistemi. In ogni caso, sia per la Φ^4 sia per la Φ^6, delle 27 rette situate in una superficie cubica iscritta 15 apparterranno ad altrettanti piani singolari di Φ^4 o Φ^6 e le rimanenti formeranno una bissestupla in cui le 6 coppie di rette coniugate apparterranno rispettivamente ai 6 sistemi di tangenti doppie di Φ^4 o Φ^6 (v. n^0 3).

Le sezioni di Γ fatte da spazi o piani vengono invece projettate dal punto doppio o di Γ secondo superficie cubiche passanti per le due terne considerate di rette di Ψ^4 e secondo cubiche piane appoggiate a queste rette. Segue da tutto ciò che nella trasformazione doppia o tripla ai piani dello spazio doppio o triplo R_3 corrisponderanno in R_3' superficie cubiche passanti per quelle due terne di rette, e passanti inoltre per P' nel caso della trasformazione doppia, mentre ai piani di R_3' corrisponderanno in R_3 in ambi i casi superficie cubiche iscritte nella superficie limite Φ^4 o Φ^6 ed aventi un punto doppio nel punto doppio di questa projezione del punto o (8).

12. Ogni varietà cubica di S_4 la quale contenga un piano α si può considerare come projezione di una $M_3^{2.2}$, cioè di una varietà a tre dimensioni *biquadratica* intersezione di un fascio di M_4^2, dello spazio S_5, fatta da un punto della varietà stessa (la projezione del punto stesso essendo precisamente α). Questo fatto collega intimamente lo studio delle varietà cubiche di S_4 contenenti piani a quello delle varietà biquadratiche di S_5; e come queste (purchè il fascio di M_4^2 che le contiene non si componga tutto di coni) si possono

(8) Le projezioni di Γ da due punti l'uno esterno, l'altro punto semplice di Γ darebbero una corrispondenza (2, 3) tra due spazi, la quale farebbe corrispondere univocamente sei sistemi di rette confocali di 3^0 ordine e 2^a classe, e sei sistemi di rette confocali di 2^0 ordine e 2^a classe.

interpretare come complessi quadratici di rette dello spazio ordinario, mentre quelle coi loro contorni apparenti dànno una classe estesa di superficie del 4^0 e del 6^0 ordine, si giunge così ad un nuovo e singolare legame tra queste superficie ed i complessi quadratici.

Applicando questo concetto alla nostra varietà cubica Γ, questa si può considerare come projezione di una varietà biquadratica di S_5 avente sei punti doppi, cioè avente per caratteristica $[(11)(11)(11)]$. Ora questa varietà si può considerare come un complesso tetraedrale. Si giunge così alla seguente proposizione che stabilisce un legame notevole tra la superficie di KUMMER più generale e quella ridotta ad un tetraedro: Dato un complesso tetraedrale qualunque si consideri la ∞^3 lineare delle schiere rigate (quadriche) passanti per due rette fisse del complesso, e se ne faccia la rappresentazione lineare sui punti dello spazio: mentre in generale una di quelle schiere contiene, oltre alle sue rette fisse, altre due rette del complesso tetraedrale, ve ne saranno ∞^2 per cui queste due rette variabili coincideranno (schiere *tangenti* al complesso tetraedrale); i punti ad esse corrispondenti costituiranno una superficie di KUMMER affatto generale (la quale viene così ad apparire in un certo senso spiegato dalle cose precedenti come il *contorno apparente del complesso tetraedrale visto da una sua coppia di rette fisse*). Si può anche dire che con ciò è determinata una particolare rappresentazione del complesso tetraedrale sullo spazio doppio e che la superficie limite di questo è la superficie di KUMMER (9). Uno studio più minuto di quella rappresentazione si farebbe colla massima facilità seguendo la via indicata.

13. A dare un ultimo esempio della utilità dei concetti usati in questa Nota trasformiamo la proprietà conosciuta della superficie di KUMMER che le quaterne di suoi punti e di suoi piani tangenti appartenenti ad una retta qualunque hanno lo stesso rapporto anarmonico. Considerando quella superficie di KUMMER come contorno apparente Φ^4 di Γ ne deduciamo subito la seguente proposizione relativa a Γ: per una varietà cubica con dieci punti doppi la cubica

---

(9) Più in generale si ottiene con lo stesso metodo una rappresentazione di un complesso quadratico generale di rette sullo spazio ordinario doppio di punti, e la superficie limite di questo è allora una superficie generale del 4^0 ordine con due piani doppi e 10 punti doppi. Ma questa ed altre generalizzazioni di ciò che qui è fatto partendo dalla particolare varietà cubica Γ si troveranno svolte, come già dissi, in altro lavoro.

in cui essa è tagliata da un piano qualunque e la quaterna degli spazi tangenti uscenti dal piano stesso hanno lo stesso rapporto anarmonico. E da questa poi segue, projettando di nuovo, la seguente altra proprietà comune alla superficie di KUMMER Φ^4 ed alla superficie Φ^6 di 6^0 ordine e 4^a classe: Nella serie razionale delle ∞^1 superficie cubiche iscritte a Φ^4 od a Φ^6 passanti per una data cubica piana iscritta ve ne sono quattro dotate di punto doppio, ed il loro rapporto anarmonico è uguale a quello della cubica piana. E dalla stessa proposizione su Γ segue ancora con projezione quest'altra relativa a Φ^6 e corrispondente alla proprietà di Φ^4 da cui siamo partiti (anzi comprendente quella come caso particolare): La sestupla di punti di Φ^6 e la quaterna di piani tangenti di questa superficie che appartengono ad una retta qualunque dello spazio hanno comune un invariante assoluto; più precisamente per la sestupla di punti si possono far passare curve piane di 3^a classe aventi per rapporto anarmonico quello della quaterna di piani (10).

Ma si può andare oltre. La proprietà trovata per Γ ci conduce a quest'altra della varietà biquadratica con sei punti doppi, di S_5 [(11) (11) (11)], di cui Γ si può considerare come projezione: la quartica di 1^a specie intersezione di quella varietà con un S_3 qualunque, e la quaterna di S_4 tangenti alla varietà passanti per quell'S_3 hanno lo stesso rapporto anarmonico. Questa proposizione si enuncia facilmente come proprietà del complesso tetraedrale in relazione con una congruenza lineare qualunque. Di più projettando se ne deduce una nuova proprietà di Γ e quindi anche un'altra proprietà della superficie Φ^4 o Φ^6 relativa a quartiche di 1^a specie ed a superficie del 4^0 ordine con conica doppia, *iscritte* a quella, analoga ma più generale della proprietà già enunciata relativa a curve e superficie del 3^0 ordine (11).

Evidentemente considerando anche la varietà biquadratica di S_5 come projezione di una varietà di S_6, e così via, il numero delle

(10) Si noti che benchè per 6 punti qualunque di una retta si possono far passare infinite curve piane di 3^a classe, il rapporto anarmonico di una tal curva è determinato (non individuato però) da quei 6 punti e costituisce un loro invariante assoluto (irrazionale).

(11) Projettando su S_4 una varietà biquadratica di S_5 da un punto che le sia esterno, si ottiene in S_4 una varietà del 4^0 ordine avente una quadrica doppia e dotata di proprietà notevoli. I suoi contorni apparenti costituiscono superficie interessanti di 6^0 ed 8^0 ordine, che forse verranno studiate con questo metodo in altro lavoro. Se la varietà nominata di S_5 è la [(11) (11) (11)] sopra considerata, le superficie che così si ottengono vengono ad essere legate a quella di KUMMER.

proposizioni relative alla superficie di KUMMER (ed alla Φ^6) che così verrebbero a dedursi da quella da cui siamo partiti, si potrebbe moltiplicare indefinitamente. Si scorge pure che questo metodo di moltiplicazione delle proposizioni, benchè applicato qui soltanto ad un caso particolare, è un metodo molto generale.

Torino, 14 Maggio 1887.