Corrado Segre

# Sulle varietà cubiche dello spazio a quattro dimensioni e su certi sistemi di rette e certe superficie dello spazio ordinario

*Mem. R. Acc. Scienze Torino*, Vol. **2** (1887), p. 3–48

*in*: Corrado Segre, Opere, a cura della Unione Matematica Italiana, Volume IV, Edizione Cremonese, Roma, 1963, p. 99–159

<http://www.bdim.eu/item?id=GM_Segre_CW_4_99>

# LXIV.

# SULLE VARIETÀ CUBICHE DELLO SPAZIO A QUATTRO DIMENSIONI E SU CERTI SISTEMI DI RETTE E CERTE SUPERFICIE DELLO SPAZIO ORDINARIO

« Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino »,
serie II, tomo XXXIX, 1887, pp. 3-48.

Scopo di questo lavoro è principalmente lo studio dei casi particolari più notevoli che può presentare una varietà cubica dello spazio a quattro dimensioni, e la sua applicazione ai sistemi di rette che sono proiezioni nello spazio ordinario di quelli contenuti nelle varietà considerate ed alle superficie di 4⁰ e 6⁰ ordine *contorni apparenti* di queste [1]. Noterò, ad esempio, fra i sistemi di rette dello spazio ordinario che così si possono studiare, tutti quelli di 2⁰ ordine privi di linee focali, esclusi solo quelli di 7ª classe e quello di 6ª classe e 1ª specie, varie classi di sistemi del 3⁰ ordine, ecc. Fra le superficie contorni apparenti di varietà cubiche citerò quelle che sono focali pei sistemi di rette nominati, le superficie di 4⁰ ordine a conica doppia o cuspidale, ecc.

Le varietà cubiche che maggiormente mi hanno occupato sono tutte quelle che contengono piani e quelle con più punti doppi, specialmente con 6, 7, 8, 9, 10; tra esse vi sono in particolare tutte le varietà cubiche generabili mediante tre reti proiettive di spazi,

---

(1) L'idea di questa applicazione delle varietà cubiche dello spazio a quattro dimensioni mi si presentò, come ben si capisce, quale analoga della ben nota applicazione fatta dal sig. GEISER (Math. Ann., I) delle superficie cubiche ordinarie allo studio delle curve piane del 4⁰ ordine (loro contorni apparenti). La nuova applicazione che così vien fatta degli spazi superiori per ottenere proprietà di enti dello spazio ordinario presenta, se non erro, un certo interesse.

le quali presentano molto interesse (²). Al loro studio faccio seguire quello delle varietà cubiche con punti doppi di specie superiore, delle varietà con linee doppie ordinarie o di specie superiore (ad esempio della varietà delle corde di una quartica razionale normale) e di quella con un piano doppio. Infine mostro come le varietà cubiche con punti doppi forniscano la teoria di certe notevoli trasformazioni doppie e triple dello spazio ordinario (³).

Torino, Dicembre 1887.

## Generalità sulle varietà cubiche e sui loro contorni apparenti.

1. Indichiamo con $\Gamma$ una varietà cubica qualunque (⁴). Se da un punto $P$ le si circoscrive un cono, questo segherà uno spazio $R$

---

(²) Dal presente lavoro, quasi compiuto nei primi mesi di quest'anno, ma del quale dovetti ritardare la pubblicazione in causa di una lunga indisposizione fisica, estrassi alcuni risultati che pubblicai nello scorso Maggio in una Nota *Sulla varietà cubica con dieci punti doppi dello spazio a quattro dimensioni* degli Atti di questa illustre Accademia, Vol. XXII, [V. questo volume, pp. 88-98]. In essa annunciavo la presente Memoria e ne accennavo alcuni dei risultati principali, all'infuori di quelli particolari relativi alla particolare varietà cui la Nota era destinata. Alcuni mesi dopo usciva negli Atti Ist. Veneto, (6) 5, una Memoria del sig. G. CASTELNUOVO: *Sopra una congruenza del 3⁰ ordine e 6ª classe dello spazio a quattro dimensioni e sulle sue proiezioni nello spazio ordinario*, nella quale è studiata la varietà cubica con 6 punti doppi generata da tre reti proiettive nel caso più generale e ne son fatte quelle stesse applicazioni che io ne avevo fatte ed annunciate (coincidenza che l'egregio A. ignorava); inoltre vi è promesso un altro lavoro che conterrà dei casi particolari di quello, tra i quali appunto quello che dà origine ad un modo di studiare la nota superficie di KUMMER di 4⁰ ordine e 4ª classe e che era stato sviluppato nella mia Nota su nominata. La Memoria pubblicata e quella promessa dal sig. CASTELNUOVO conterranno perciò varie cose da me ottenute e che qui espongo intorno alle varietà cubiche generabili con tre reti proiettive; però dall'esame di quella pubblicata sono indotto a credere che alcune delle questioni da me risolte su quest'argomento non si troveranno trattate in quelle.

(³) Al chiar⁰. sig. M. PIERI pel gentile aiuto prestatomi nella pubblicazione di questo lavoro i miei vivissimi ringraziamenti.

(⁴) Per *varietà, superficie, curva,* intendiamo luoghi rispettivamente a 3, 2, 1 dimensioni; quelli lineari si diranno rispettivamente *spazio, piano, retta.* — Tra le varietà cubiche escluderemo quasi sempre quelle riduttibili ed i coni. Ci varremo poi spesso tacitamente di proposizioni relative alla teoria della polarità rispetto ad una varietà cubica, potendosi questa teoria riguardare come nota.

(non passante per $P$) secondo una superficie, *contorno apparente* di $\Gamma$ corrispondente al punto $P$, che sarà del $6^0$ o del $4^0$ ordine secondo che $P$ è fuori di $\Gamma$ o ne è un punto semplice. Indicheremo rispettivamente con $F^6$ o $F^4$ (ed in generale con $F$) quella superficie.

È chiaro che essa è la proiezione fatta da $P$ su $R$ della superficie di contatto del cono circoscritto, vale a dire dell'intersezione $S^{2.3}$ di $\Gamma$ colla varietà $M^2$ polare di $P$ rispetto a $\Gamma$. Se $\Gamma$ ha punti doppi, essi staranno su questa $M^2$, e quindi saranno punti doppi per la $S^{2.3}$; sicchè la superficie $F$ avrà nelle loro proiezioni altrettanti punti doppi.

Supponendo anzitutto che $P$ non stia su $\Gamma$, lo spazio polare di $P$ rispetto a questa varietà sega $S^{2.3}$ in una curva $C^{2.3}$, luogo dei punti di contatto delle tangenti tripunte di $\Gamma$ che passano per $P$. La proiezione di quella curva sarà una curva cuspidale di $F^6$, sicchè questa superficie gode della proprietà di avere per linea cuspidale una curva del $6^0$ ordine situata su di una quadrica.

Se il punto $P$ si prende come punto fondamentale 5, l'equazione di $\Gamma$ si può sempre mettere sotto la forma:

$$x_5^3 + px_5 + q = 0,$$

dove $p$ e $q$ sono forme rispettivamente del $2^0$ e $3^0$ grado in $x_1, \dots, x_4$; ed è chiaro allora che il contorno apparente $F^6$ sullo spazio $x_5 = 0$ ha per equazione

$$27\, q^2 + 4p^3 = 0,$$

la quale mostra di nuovo che $F^6$ ha per curva cuspidale la sestica $p = 0$, $q = 0$, e di più prova che la superficie cubica $q = 0$ tocca $F^6$ lungo quella curva cuspidale.

Viceversa, *ogni superficie del* $6^0$ *ordine dello spazio* $\mathrm{x}_5 = 0$, *dotata di una curva cuspidale del* $6^0$ *ordine, intersezione di una quadrica* $\mathrm{p} = 0$ *con una superficie cubica* $\mathrm{t} = 0$ (5), *è sempre toccata lungo quella curva da una certa superficie cubica, e si può ottenere come contorno apparente di una varietà cubica vista da P.* In fatti una superficie del $6^0$ ordine che abbia quella sestica per curva doppia ha l'equazione della forma:

$$t^2 + 2a_1 tp + a_2 p^2 = 0.$$

---

(5) Nel seguito parlando di una *curva del* $6^0$ *ordine* intenderemo sempre che essa sia l'intersezione di una quadrica con una superficie cubica, non avendo in questo lavoro da considerare altre specie di sestiche.

Ogni suo punto cuspidale (uniplanare) appartenente a quella sestica sta (come mostrano le condizioni perchè la sua quadrica polare degeneri in un piano doppio) sulla quadrica $a_2 - a_1^2 = 0$, sicchè, affinchè la sestica sia cuspidale, basta che questa quadrica la contenga, e quindi coincida con la $p = 0$, vale a dire che sia:

$$a_2 = a_1^2 + kp,$$

essendo $k$ una costante. Sostituendo, l'equazione di una superficie del $6^0$ ordine con quella sestica cuspidale sarà:

$$t^2 + 2a_1 tp + a_1^2 p^2 + kp^3 = 0$$

ossia, ponendo $t + a_1 p = \frac{3}{2}\sqrt{3k}\cdot q$:

$$27q^2 + 4p^3 = 0.$$

E questa è appunto, come già notammo, l'equazione del contorno apparente di una varietà cubica.

Importa osservare che *tutte le varietà cubiche che dànno come contorno apparente rispetto a* P (*sullo spazio* $x_5 = 0$) *una stessa superficie sono le* $\infty^5$ *che si ottengono da una di esse trasformandola mediante omologie di centro* P. Invero trasformando con una conveniente omologia di centro $P$ una qualunque di quelle varietà, se ne può ottenere una tale che rispetto ad essa $P$ abbia per spazio polare lo spazio fondamentale $x_5 = 0$ ad esso opposto; due di quelle varietà verranno così ad avere equazioni della forma

$$x_5^3 + px_5 + q = 0, \quad x_5^3 + p'x_5 + q' = 0$$

e dovendo i contorni apparenti di $P$ rispetto ad esse, cioè

$$27q^2 + 4p^3 = 0, \quad 27q'^2 + 4p'^3 = 0$$

coincidere, sarà, indicando con $c$ una costante:

$$p' = c^2 p, \quad q' = c^3 q,$$

e la 2ª equazione si otterrà dalla 1ª mediante il solo cambiamento di $x_5$ in $cx_5$, il che rappresenta ancora una trasformazione omologica di centro $P$. La proposizione enunciata rimane dunque stabilita.

Da essa segue che il numero delle costanti di una specie qualunque di $F^6$ a sestica cuspidale è sempre dato dal numero delle costanti della corrispondente specie di varietà cubiche diminuito di 5 unità, il che può servire utilmente per la determinazione delle costanti di certe specie particolari di $F^6$ che s'incontreranno in seguito.

2. Se $P$ è un punto semplice di $\Gamma$, la sua $M^2$ polare è tangente in $P$ a $\Gamma$; lo spazio $\Pi$ tangente comune in $P$ sega $\Gamma$ in una superficie cubica avente in $P$ un punto doppio, e la $M^2$ nel cono quadrico tangente a quella superficie in $P$. Ne segue che per ogni punto $P$ di $\Gamma$ passano 6 rette che costituiscono l'intersezione di $\Gamma$ con lo spazio tangente e con la $M^2$ polare di $P$. La $S^{2.3}$ di contatto di $\Gamma$ col cono ad essa circoscritto da $P$ ha in $P$ un punto doppio e contiene quelle 6 rette. La sua proiezione da $P$ su $R$, cioè il contorno apparente $F^4$ di $\Gamma$, avrà evidentemente un piano tangente lungo una conica, cioè il piano $\mu$ intersezione di $R$ con $\Pi$, e 6 punti doppi su quella conica, intersezioni di $R$ con le 6 rette di $\Gamma$ uscenti da $P$.

Così se la varietà $\Gamma$ passa pel punto 5, la sua equazione ordinata rispetto ad $x_5$ essendo allora della forma:

$$a_1 x_5^2 + 2a_2 x_5 + a_3 = 0,$$

il suo contorno apparente rispetto al punto 5 sarà:

$$a_2^2 - a_1 a_3 = 0,$$

e quest'equazione rappresenta appunto una superficie che è toccata dal piano $a_1 = 0$ lungo una conica $a_2 = 0$, e che ha per punti doppi i sei punti comuni ad $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$.

Viceversa, essendo chiaro che in $x_5 = 0$ ogni superficie del 4° ordine, toccata da un piano $a_1 = 0$ lungo una conica $a_2 = 0$ si può rappresentare con un'equazione di quella forma, ne segue che: *ogni superficie del 4° ordine con un piano tangente lungo una conica si può ottenere come contorno apparente di una varietà cubica rispetto ad un suo punto.* Vale poi ancora in questo caso la proposizione che due varietà le quali diano rispetto ad un punto una stessa superficie $F^4$ come contorno apparente, sono omologiche rispetto a quel punto come centro, il che si dimostra con un ragionamento analogo a quello fatto al numero precedente pel caso di $F^6$, e se ne può trarre similmente una relazione fra il numero delle costanti di una specie qualunque di varietà cubiche e quello della corrispondente specie di superficie $F^4$.

Osserviamo ancora che *un punto doppio* D' *del contorno apparente* F *della varietà cubica* $\Gamma$ *rispetto al punto* P, *il quale non provenga da una retta di* $\Gamma$ *uscente da* P (*cioè non stia nel piano singolare* $\mu$ *di* $F^4$), *nè da una tangente tripunta di* $\Gamma$ *uscente da* P (*cioè non sia un punto della sestica cuspidale di* $F^6$), *sarà certo la proiezione di un punto doppio* D *di* $\Gamma$; perocchè in ogni piano passante per la retta $PD'$ la cubica sezione di $\Gamma$ dev'esser tale che due delle sue tangenti uscenti da $P$ coincidano in quella retta, il che può solo accadere, tenuto conto delle esclusioni già fatte intorno a quella retta, quando su essa vi sia un punto doppio della cubica.

3. Nel piano che proietta dal punto $P$, posto o no su $\Gamma$, una retta qualunque di $\Gamma$ accade che delle tangenti condotte da $P$ alla cubica in cui quel piano taglia $\Gamma$, cubica che in questo caso acquista due punti doppi, due coppie coincideranno nei raggi proiettanti quei due punti doppi; e quindi la proiezione di quella retta di $\Gamma$ sarà una tangente doppia del contorno apparente $F$. Viceversa, ogni tangente doppia di $F$ (escludendo per $F^4$ le rette del piano $\mu$, dalle quali si farà sempre astrazione in seguito quando si considererà il sistema delle tangenti doppie di $F^4$) è proiezione di una retta di $\Gamma$. Quindi lo studio del sistema delle tangenti doppie di $F^4$ od $F^6$ coincide con quello del sistema di rette contenuto in una varietà cubica.

Notando che di queste rette in ogni spazio ve ne sono 27 (rette della superficie cubica determinata da questo spazio nella varietà), e ricordando la proprietà vista delle 6 rette di $\Gamma$ uscenti da un suo punto qualunque, di stare su un cono quadrico, si hanno immediatamente le proposizioni seguenti:

*Per una superficie del* 4$^0$ *ordine dotata di un piano tangente lungo una conica, le tangenti doppie* (non appartenenti a questo piano) *formano un sistema di ordine* 12 *e classe* 27, *tale che le* 12 *rette uscenti da un punto qualunque dello spazio si dividono in due sestuple poste su due coni quadrici.*

*Per una superficie del* 6$^0$ *ordine dotata di sestica cuspidale le tangenti doppie formano un sistema di ordine* 18 *e classe* 27, *tale che le* 18 *rette uscenti da un punto qualunque formano tre sestuple poste su tre coni quadrici* (6).

---

(6) V. altre proprietà delle tangenti doppie di $F^4$ ed $F^6$ al n$^0$ 54.

Per le varietà cubiche particolari che avremo da considerare in seguito accadrà generalmente che le loro rette formeranno varî sistemi parziali. Per ogni tal sistema di rette di una varietà cubica $\Gamma$ chiameremo *ordine* e *classe* rispettivamente il numero delle sue rette passanti per un punto qualunque di $\Gamma$ o giacenti in uno spazio qualunque (7). Rappresentando col simbolo $(m, n)$ un sistema di rette d'ordine $m > 0$ e classe $n$, è chiaro che la proiezione di un sistema $(m, n)$ di rette di $\Gamma$ dal punto $P$ esterno a $\Gamma$, o punto semplice, o doppio per $\Gamma$ sarà un sistema di rette dello spazio ordinario $(3m, n)$, o $(2m, n)$, od $(m, n)$. Inoltre nei primi due casi questi sistemi proiezioni avranno $F$ per superficie focale; e più precisamente nel $1^0$ caso la sestica cuspidale di $F^6$ sarà tale che per ogni suo punto passano solo $m$ rette del sistema (ciascuna contando per tre) mentre per ogni punto di $F^6$ passano $m$ rette da contarsi semplicemente ed $m$ da contarsi doppiamente; nel $2^0$ caso per ogni punto di $F^4$ passano $m$ rette, ciascuna delle quali va contata doppiamente.

Chiamando *classe* della varietà $\Gamma$ il numero dei suoi spazi tangenti passanti per un piano qualunque, è evidente che *la varietà cubica $\Gamma$ ed i suoi contorni apparenti* $\mathrm{F}^4$, $\mathrm{F}^6$ *hanno sempre la stessa classe*; questo fatto ci servirà per determinare in certi casi particolari la classe di $\Gamma$ e di $F^6$ mediante quella, già nota da altre ricerche, di $F^4$. Nel caso più generale la classe di $\Gamma$ è 24; essa diminuisce di 2 unità per ogni punto doppio ordinario che $\Gamma$ acquisti.

Si possono ottenere casi particolari delle superficie $F^4$ e $F^6$ scegliendo in modo particolare il centro $P$. Così se $P$ è sulla varietà del $5^0$ ordine *Hessiana* di $\Gamma$, la sestica cuspidale di $F^6$ viene a stare su un cono quadrico e se, più in particolare, $P$ è sulla *superficie parabolica* (del $15^0$ ordine) di $\Gamma$ la conica di contatto di $F^4$ col suo piano singolare si scinde in due rette, ciascuna delle quali contiene 3 punti doppi (8). Così ancora si può prender $P$ in modo che la sestica cuspidale di $F^6$ si scinda in due cubiche piane o che le 2 rette ora nominate di $F^4$ coincidano. Ma da tali particolari posizioni di $P$ faremo quasi sempre astrazione.

(7) Per la determinazione della classe dei singoli sistemi parziali di rette di $\Gamma$ faremo sempre uso delle note proprietà della configurazione delle 27 rette di una superficie cubica senza mai fermarci ad enunciarle.

(8) In generale (ovunque sia $P$) la proiezione della superficie parabolica di $\Gamma$ (intersezione di questa varietà colla sua Hessiana) darà il luogo di un punto tale che una delle sestuple di tangenti doppie di $F$ uscenti da esso si scinde in due terne poste rispettivamente su due piani.

4. Se $\Gamma$ ha un punto doppio $P$ la $S^{2.3}$ intersezione di $\Gamma$ col cono $M^2$ tangente in $P$, diventa un cono composto di rette di $\Gamma$ uscenti da $P$. E siccome la $M^2$ passa per ogni altro punto doppio di $\Gamma$, così quel cono sestico avrà per retta doppia ogni retta che congiunga $P$ ad un altro punto doppio di $\Gamma$ (9). Ogni retta di $\Gamma$ non appartenente a quel cono sestico incontra quella $M^2$ in due punti, e quindi è una corda del cono sestico. Se ne conchiude che proiettando il sistema delle rette di $\Gamma$ dal punto doppio $P$ si ottiene su $R$ il sistema delle corde di una sestica intersezione di una quadrica con una superficie cubica. Per ogni punto di $R$ usciranno sei corde di questa sestica le quali staranno su un cono quadrico, e così ritroviamo una proprietà nota di quella sestica. Per le varietà cubiche i cui sistemi di rette si compongono di più sistemi parziali, il cono sestico uscente da un punto doppio si spezzerà e i varî sistemi parziali di rette saranno rispettivamente corde dei varî coni parziali e rette secanti comuni.

Se una varietà cubica $\Gamma$ ha due punti doppi e quindi contiene la retta congiungente di questi, lo spazio tangente a $\Gamma$ in un altro punto di questa retta darà per sezione una superficie cubica con tre punti doppi su quella retta, cioè una rigata cubica avente quella retta per retta doppia : quello spazio sarà perciò tangente a $\Gamma$ lungo quella retta.

## Varietà cubiche contenenti piani. Loro contorni apparenti.

5. Una varietà cubica $\Gamma$ contenga un piano $\pi$ (semplice). Allora gli spazi passanti per questo segheranno ancora $\Gamma$ in una $\infty^1$ di quadriche, le quali taglieranno il piano in un sistema $\infty^1$ di coniche; ognuno di quegli spazi essendo tangente a $\Gamma$ lungo la conica corrispondente, segue che per ogni punto di $\pi$ passa una sola di quelle coniche, sicchè queste formeranno un fascio (10). I 4 punti

(9) Questo fatto ci servirà, quando $\Gamma$ abbia più punti doppi, a riconoscere se e come si decomponga il cono sestico di rette di $\Gamma$ uscente da uno qualunque di quei punti, giovandoci (come qualche volta faremo senza dirlo) delle nòte degenerazioni che può presentare una sestica sghemba.

(10) Tratteremo più tardi (n$^0$ 38) il caso in cui $\Gamma$ ha un solo spazio tangente in tutti i punti di $\pi$, nel qual caso $\Gamma$ ha su $\pi$ una conica doppia per cui passano tutte le $\infty^1$ quadriche su nominate.

base di questo fascio saranno quattro punti doppi di $\Gamma$. Ne segue che una varietà cubica generale non contiene piani. È poi facile vedere sinteticamente che se $\Gamma$ contiene un piano, essa è generabile mediante due fasci proiettivi di spazi e di $M^2$.

Tutto ciò risulta anche analiticamente dall'equazione generale di una varietà cubica contenente un piano; poichè se questo è rappresentato da $l = 0$, $m = 0$, quell'equazione sarà:

$$l\varphi - m\psi = 0,$$

essendo $\varphi$, $\psi$ forme quadratiche (11). Ma da questa equazione risulta inoltre che $\Gamma$ si può considerare in $S_5$ come la proiezione fatta dal punto fondamentale 6 su $S_4$ della *varietà biquadratica* intersezione delle due varietà quadratiche a quattro dimensioni rappresentate dalle equazioni:

$$x_6\, l + \psi = 0, \quad x_6\, m + \varphi = 0.$$

Quindi *lo studio delle varietà cubiche di* $S_4$ *contenenti piani si riduce a quello delle varietà biquadratiche di* $S_5$.

Se una $M_4^2$ di $S_5$ non degenere si considera come avente per elementi (*punti*) le rette dello spazio ordinario, una varietà biquadratica intersezione di quella con un'altra $M_4^2$ viene a costituire un *complesso quadratico* di rette. Quindi l'osservazione ora fatta mostra uno *stretto legame fra le varietà cubiche di* $S_4$ *contenenti piani ed i complessi quadratici di rette dello spazio ordinario*, legame consistente in ciò che in un certo senso quelle varietà si possono considerare come proiezioni di questi complessi. Alle varie specie di complessi quadratici corrispondono varie specie di varietà cubiche contenenti piani.

6. Il luogo dei poli del piano $\pi$ rispetto alle $\infty^1$ quadriche di $\Gamma$ giacenti negli spazi passanti per $\pi$ è, come facilmente si vede, una curva del 4° ordine razionale normale, la quale è tangente a $\Gamma$ in ciascuno dei 3 punti diagonali del quadrangolo avente per vertici i 4 punti doppi posti su $\pi$. Questa curva incontrerà ancora $\Gamma$ in 6 punti, che saranno vertici dei coni facenti parte di quella $\infty^1$

(11) L'avere la varietà cubica contenente un piano quattro punti doppi su questo è caso particolare del fatto che in qualunque spazio e qualunque sia l'ordine delle varietà $l, m, \varphi, \psi$, sempre la loro intersezione è doppia per la varietà $l\varphi - m\psi = 0$.

di quadriche. Dunque questa comprende nel caso più generale 6 coni; ma per ogni punto doppio che $\Gamma$ abbia fuori di $\pi$ due coni coincideranno in uno avente il vertice in quel punto.

Il cono sestico delle rette di $\Gamma$ uscenti da uno qualunque dei quattro punti doppi posti su $\pi$ si scinde in questo piano ed in un cono del $5^0$ ordine passante pei rimanenti tre punti doppi.

Le rette di $\Gamma$ formano un sistema (2, 10) composto delle rette che incontrano $\pi$, le quali sono le generatrici della serie considerata di quadriche, ed un sistema (4, 16) composto di corde di ciascuno dei suddetti coni del $5^o$ ordine. Facciamo astrazione (e così faremo sempre in seguito) dal sistema delle rette giacenti in $\pi$.

7. Nel proiettare $\Gamma$ da un punto qualunque $P$, il piano $\pi$ dà come proiezione un piano doppio del contorno apparente $F$, la cui conica di contatto con questo è la proiezione della conica di contatto di $\Gamma$ con lo spazio $P\pi$; viceversa un piano doppio del contorno apparente (diverso per $F^4$ da quello $\mu$ considerato al n$^0$ 2) proviene sempre da un piano di $\Gamma$. La considerazione di ciò che avviene nello spazio $P\pi$ e le cose dette precedentemente dànno, mediante proiezione, i risultati seguenti:

*Una superficie del* $4^o$ *ordine con due piani doppi (le cui coniche di contatto si taglieranno in due punti doppi della superficie e conterranno ancora altri quattro punti doppi ciascuna) è superficie focale di due sistemi di rette* (4, 10) *e* (8,16). *Il* $1^o$ *sistema comprende tutte le generatrici di una serie d'indice* 2 *di quadriche passanti per gli otto punti doppi della superficie non comuni ai due piani doppi, sistema che contiene sei coni, e che inviluppa appunto la superficie.*

*Una superficie del* $6^o$ *ordine dotata di sestica cuspidale, la quale abbia un piano doppio, avrà su questo quattro punti doppi situati sulla conica di contatto; questa sarà toccata dalla conica intersezione residua di quel piano doppio con la superficie in due punti, nei quali quel piano oscula la sestica cuspidale, e le due coniche avranno comuni con questa sestica le tangenti in quei due punti. Il sistema delle tangenti doppie di questa superficie si spezza in due sistemi* (6, 10) *e* (12, 16), *di cui il* $1^0$ *è costituito dalle generatrici di una serie d'indice* 3 *di quadriche passanti pei quattro punti doppi, serie che comprende sei coni e che inviluppa la superficie e la sua curva cuspidale.*

8. Se $\Gamma$ si proietta dal vertice di uno dei coni quadrici che essa contiene, il contorno apparente $F^4$ diventa una superficie del $4^0$ ordine dotata di conica doppia (nella conica sezione di quel cono con

lo spazio $R$). Viceversa *ogni superficie del* $4^0$ *ordine a conica doppia si può ottenere in questo modo* ($n^0$ 2), e si ha così un modo nuovo di studiare e di classificare queste superficie. Ad esempio considerando il caso più generale ed applicando quanto si disse in principio del $n^0$ 6 si hanno le seguenti proprietà note ([12]):

*Una superficie generale del* $4^0$ *ordine a conica doppia si può considerare come l'inviluppo di una serie* $\infty^1$ *d'indice* 2 *di quadriche passanti per* 4 *punti fissi (cuspidali) della conica doppia; questa serie comprende* 5 *coni (coni di* KUMMER*). Il luogo dei poli del piano della conica doppia rispetto al sistema di quadriche è una cubica sghemba passante pei vertici di quei coni e pei* 3 *punti diagonali del quadrangolo determinato dai* 4 *punti cuspidali.*

Proiettando invece $\Gamma$ da un punto del suo piano $\pi$, questo produrrà una retta doppia di $F^4$, la quale diverrà perciò una *superficie del* $4^0$ *ordine con una retta doppia e con un piano passante per questa e tangente lungo un'altra retta.* Questa contiene 2 punti doppi fuori della retta doppia; oltre ad essa la superficie ha 6 coppie di rette in piani per la retta doppia; ecc. ecc.

9. Ritornando alla considerazione diretta della varietà cubica $\Gamma$ contenente un piano $\pi$, se essa acquista un punto doppio $D$ fuori di $\pi$, lo spazio che lo congiunge a $\pi$ segherà ancora $\Gamma$ in un cono quadrico uscente da $D$, sicchè il cono sestico di $\Gamma$ avente per vertice $D$ si spezza in tal caso in quel cono quadrico, ed in un cono del $4^0$ ordine. Viceversa, se una varietà cubica ha un punto doppio che presenti queste particolarità, essa apparterrà appunto alla specie che ora esaminiamo. In questa del resto non vi sono altre particolarità notevoli. Essa conduce a casi particolari delle superficie del $4^0$ e $6^0$ ordine dei numeri 7 e 8 caratterizzati dall'avere un nuovo punto doppio (fuori dei piani doppi nominati).

Lo stesso dicasi pel caso in cui $\Gamma$ abbia fuori del piano $\pi$ due punti doppi, se la retta che li congiunge non incontra $\pi$.

10. Ma se $\Gamma$ fuori del piano $\pi$ ha due punti doppi posti in uno spazio con $\pi$, la quadrica intersezione residua di quello spazio con $\Gamma$ dovrà scindersi in altri due piani $\pi_1, \pi_2$, e $\Gamma$ sarà caratterizzata dal contenere tre piani $\pi, \pi_1, \pi_2$, di uno stesso spazio, o,

---

([12]) V. per la letteratura relativa alle superficie del $4^0$ ordine dotate di conica doppia o cuspidale il mio lavoro su queste superficie, Math. Ann., XXIV, p 313 [V. queste « Opere », III, pp. 339-484].

ciò che fa lo stesso, dall'avere 6 punti doppi in uno stesso spazio. Quei punti doppi stanno a coppie sulle tre rette d'intersezione di $\pi, \pi_1, \pi_2$. Il sistema delle rette di $\Gamma$ si scinde in tre diversi sistemi (2, 8), composti ciascuno delle rette che incontrano uno dei tre piani $\pi, \pi_1, \pi_2$, cioè delle generatrici delle quadriche di $\Gamma$ poste negli spazi passanti per quel piano ([13]).

Proiettando, otteniamo:

*Esiste una superficie del* $4^0$ *ordine con quattro piani doppi e dodici punti doppi costituenti le coppie di punti comuni alle coniche di contatto di quei quattro piani. Essa è l'inviluppo di tre diverse serie d'indice* 2 *di quadriche, ciascuna delle quali ha per punti base gli otto punti doppi che si ottengono trascurando le due coppie poste su due spigoli opposti del tetraedro dei piani doppi: le generatrici di quelle tre serie di quadriche formano tre sistemi* (4, 8) *costituenti le tangenti doppie della superficie.*

*Esiste una superficie del* $6^0$ *ordine con sestica cuspidale e tre piani doppi, le cui coniche di contatto s'incontrano in tre coppie di punti doppi della superficie. Questa è l'inviluppo di tre serie d'indice* 3 *di quadriche, passanti rispettivamente pei quattro punti doppi di uno stesso piano. Il sistema delle tangenti doppie di quella superficie si scinde nei tre sistemi* (6, 8) *delle generatrici di quelle quadriche.*

11. Nel caso precedente si può introdurre in $\Gamma$ una nuova particolarità supponendo che, oltre ai punti doppi considerati, ve ne sia un nuovo $D$ fuori dello spazio $\pi\pi_1\pi_2$. Allora il cono sestico di $\Gamma$ uscente da $D$ si spezzerà in tre coni quadrici appartenenti rispettivamente alle tre serie di quadriche di $\Gamma$; e viceversa, se per un punto doppio il cono sestico si spezza in tre coni quadrici, si ha appunto questo caso. Esso dà luogo a superficie del $4^0$ e $6^0$ ordine, casi particolari di quelle del n$^0$ precedente, le cui particolarità tralasciamo di enunciare.

Se poi, oltre a $D$, si suppone vi sia un nuovo punto doppio $D'$, la retta $DD'$ di $\Gamma$ incontrerà uno determinato dei tre piani $\pi, \pi_1, \pi_2$, p. e. $\pi$, e lo spazio che la congiunge a questo taglierà ancora $\Gamma$ in

([13]) È chiaro che la curva del $4^0$ ordine luogo dei poli del piano $\pi$ rispetto alle quadriche determinate da $\Gamma$ sugli spazi passanti per $\pi$ (n$^0$ 6) si riduce ora, fatta astrazione dalla retta $\pi_1 \pi_2$, ad una cubica sghemba. Tralascieremo in generale, come cosa affatto ovvia, di accennare, nei varî casi che ci si presenterebbero in seguito, le degenerazioni della curva che così si deduce da tali serie di quadriche o dalle loro proiezioni.

due piani $\pi', \pi''$. Questo caso di una varietà cubica con 8 punti doppi e 5 piani s'incontrerà più tardi (n$^0$ 19) da un altro punto di vista.

Se, ritornando al caso in cui $\Gamma$ contiene un solo piano $\pi$, si suppone che essa abbia fuori di questo tre punti doppi 1, 2, 3, si dovrà, per escludere casi già considerati, ammettere che il piano $\pi$ non incontri alcuna delle tre rette 12, 23, 31; ma allora il piano 123, tagliando $\Gamma$ secondo queste rette e secondo il punto che esso ha a comune con $\pi$, apparterrà a $\Gamma$. Anche questo caso di una varietà cubica contenente due piani, non situati in uno stesso spazio, s'incontrerà di nuovo in seguito (n$^0$ 15 e seg.).

## Varietà cubiche generabili con tre reti proiettive. Varietà con sei punti doppi.

12. Consideriamo in $S_4$ tre reti [14] proiettive di spazi. Le $\infty^2$ rette d'intersezione degli spazi corrispondenti stanno sopra una varietà cubica $\Gamma$, nella quale è pure contenuto un secondo sistema analogo al primo, e contenente le rette sostegni delle tre reti; da due rette qualunque di uno stesso sistema le rette dell'altro sono proiettate mediante reti proiettive. Tutto ciò risulta, come è noto, immediatamente dall'equazione di $\Gamma$ scritta sotto forma di un determinante [15]. Per questa via, che in questo caso si può sostituire facilmente con un procedimento sintetico, si vede pure che vi sono in generale 6 punti, in ciascuno dei quali si tagliano tre piani corrispondenti delle tre reti; essi saranno punti doppi per $\Gamma$ [16]. Due sistemi di rette aventi tra loro le dette relazioni si chiameranno *coniugati.*

---

[14] Intendiamo per *rete* di spazi in $S_4$ la forma fondamentale avente per sostegno una retta.

[15] V. VERONESE, *Behandlung der proj. Verhältnisse* u. s. w. (Math. Ann., XIX), V. Abschnitt, § 1. Segue pure facilmente da semplici trasformazioni di determinanti che le varietà generabili con tre reti proiettive di spazi sono le stesse che quelle generabili con quattro *stelle* (forme fondamentali aventi dei punti per sostegni) proiettive aventi uno spazio unito, e quelle generabili con cinque $S_4$ sovrapposti collineari aventi due spazi uniti.

[16] Due qualunque delle 3 reti generano, come luogo dei punti d'intersezione dei piani corrispondenti, una rigata cubica appartenente ad $S_4$. Ora due tali rigate, avendo una generatrice comune, si tagliano ancora in generale in 6 punti (come si vede subito, considerando ad esempio l'una di esse come parte

Limitandoci (come sempre faremo finchè non si dirà il contrario) a considerare varietà cubiche con un numero *finito* di punti doppi, è facile vedere che *quei 6 punti sono indipendenti* (linearmente). Invero non possono 3 di essi essere in una stessa retta, poichè altrimenti questa sarebbe doppia per $\Gamma$. Nè possono 4 di essi stare in uno stesso piano, poichè altrimenti le 3 reti proiettive sarebbero segate da questo in 3 sistemi piani identici e quindi tutti i punti di quel piano sarebbero intersezioni di terne di piani corrispondenti, cioè punti doppi di $\Gamma$. Infine non possono 5 qualunque di quei 6 punti stare in uno stesso spazio, giacchè la superficie cubica in cui questo segherebbe $\Gamma$ avrebbe quei 5 punti per punti doppi e non esiste una superficie cubica (degenere) con 5 punti doppi indipendenti.

Il cono sestico di rette di $\Gamma$ uscenti da uno qualunque di quei 6 punti doppi si scinde in due coni cubici appartenenti rispettivamente al 1° ed al 2° sistema di rette, poichè i tre fasci di spazi delle tre reti, che passano per quel punto doppio, generano appunto un cono cubico; e così si vede inoltre che i due coni cubici uscenti da quel punto doppio contengono entrambi i rimanenti cinque punti doppi. Uno spazio qualunque $R$ li sega in due cubiche situate su di una quadrica ed appartenenti a sistemi diversi.

Per ogni punto di $\Gamma$ passa una sola retta di ciascuno dei due sistemi. Su ogni spazio vi sono sei rette di ciascuno di questi, poichè le tre stelle proiettive in cui le tre reti generatrici di $\Gamma$ sono segate da quello spazio, stelle che generano la superficie cubica di $\Gamma$ situata in questo, hanno sei terne di piani corrispondenti incontrantisi in rette; le due sestuple di rette dei due sistemi poste in quello spazio formano una *bissestupla* sulla superficie cubica nominata. La varietà $\Gamma$, oltre a quei due sistemi di rette (1, 6) contiene ancora un sistema *residuo* (4, 15). Dei due coni cubici di $\Gamma$ uscenti da un punto doppio quello appartenente al 2° sistema ha

---

dell'intersezione dei due coni $M^2$ che la proiettano da due suoi punti); e questi sono precisamente i 6 punti di cui sopra si parla.

Se le 3 reti presentano la particolarità che vi sia una retta $d$ d'intersezione di 3 piani corrispondenti, allora le due rigate dianzi considerate avranno comune, oltre ad una generatrice, anche la direttrice $d$ e si taglieranno quindi ancora in generale in 3 punti (come risulta proiettando le due rigate dalla comune direttrice); sicchè questi saranno (insieme con quelli di $d$) i soli punti per ciascuno dei quali passano 3 piani corrispondenti. Ma di questo caso, in cui $\Gamma$ ha una retta doppia $d$, ci occuperemo più tardi (n° 36).

per corde le rette del 1°, quello del 1° ha per corde le rette del 2° sistema; infine le rette del sistema residuo si appoggiano su entrambi i coni.

13. *Ogni varietà cubica $\Gamma$ con sei punti doppi indipendenti si può generare nel modo esposto dianzi, e quindi le sue rette formano tre sistemi aventi le proprietà suddette.*

Per dimostrare questa proposizione osserviamo che il cono sestico delle rette di $\Gamma$ uscenti da uno di quei 6 punti doppi, avendo per generatrici doppie le rette che da quello proiettano i rimanenti 5, dovrà scindersi, come facilmente si vede, in due coni cubici passanti per quelle cinque rette (e di cui ognuno può in casi particolari scindersi a sua volta). Il sistema delle rette di $\Gamma$ si scinde per conseguenza in tre, di cui due sono composti rispettivamente di corde dei due coni cubici.

Ciascuno di questi due sistemi è tale che per ogni punto di $\Gamma$ passa una sola sua retta, che è la corda passante per quel punto della cubica intersezione dello spazio tangente a $\Gamma$ in esso col cono cubico di cui le rette di quel sistema sono corde. Su uno spazio qualunque i due coni cubici determinano due cubiche incontrantisi in cinque punti ed appartenenti alla superficie cubica di $\Gamma$ situata in quello spazio; quindi in esso vi sono due sestuple di rette di quei due sistemi formanti una bissestupla di quella superficie cubica.

Dimostreremo ora che le reti che proiettano da due rette $r$, $r'$ del 1° sistema le rette del 2° non appoggiate nè ad $r$, nè ad $r'$, sono proiettive. Perciò osserviamo che uno spazio qualunque passante per $r$ contiene (per le note proprietà delle bissestuple) una sola retta del 2° sistema non appoggiata ad $r$, e quella sarà proiettata da $r'$ mediante un determinato spazio; cosicchè la corrispondenza tra le reti degli spazi passanti per $r$ ed $r'$ è univoca. Considerando poi gli spazi di un determinato fascio della prima rete, questi determinano quelle $\infty^1$ rette del 2° sistema che si appoggiano alla conica intersezione residua di $\Gamma$ col piano passante per $r$, sostegno di quel fascio di spazi; e per provare che a questo corrisponde pure un fascio di spazi nella seconda rete, bisognerà provare che $r'$ è corda di una conica incontrata da quelle $\infty^1$ rette del 2° sistema.

A tal fine notiamo che le rette del 2° sistema appoggiate ad una retta $r'$ del 1° sistema formano una rigata del 6° ordine, poichè $r'$ appartiene semplicemente a quella rigata, e su ogni spazio passante per $r'$ vi sono 5 generatrici di questa. Le rette del 2° sistema appoggiate sulla conica considerata di un piano passante per $r$, formano una rigata che sarà di 3° ordine, poichè essa passa semplicemente per quella conica ed ha una sola generatrice in uno spazio passante per questa. Delle rette del 2° sistema appoggiate su $r'$ *sei* incontreranno il piano nominato; ma di esse *quattro* lo incontrano in punti di $r$, e quindi solo *due* apparterranno alla rigata cubica nominata. Dunque $r$ è corda di questa rigata, e quindi anche di una conica posta su questa, come appunto ci eravamo ridotti a dimostrare [17].

14. Nel ragionamento precedente abbiamo già visto che le rette di $\Gamma$ appartenenti al 1° od al 2° sistema ed appoggiate ad una retta dell'altro, formano una rigata del 6° ordine avente quella retta per retta semplice. Aggiungiamo che le rette del 1° (o del 2°) sistema appoggiate su una retta del sistema residuo formano una rigata cubica passante semplicemente per quella retta (ed è tra le rigate cubiche che così si ottengono quella che pure s'incontrò nell'ultimo ragionamento).

Proiettando da un punto $P$ di $\Gamma$ sullo spazio $R$, pel punto doppio di $F^4$ dato da una retta di $\Gamma$ uscente da $P$ (e posto nel piano $R\Pi$, essendo $\Pi$ lo spazio tangente a $\Gamma$ in $P$) uscirà un cono di raggi del 1° sistema proiezione della rigata dei raggi del 1° sistema appoggiati alla retta considerata di $\Gamma$. Quindi dalla retta del 2° sistema uscente da $P$ si ottiene un cono del 5° ordine, e da ciascuna delle quattro rette del sistema residuo uscenti da $P$ si ottiene un cono quadrico. Le rette del 1° sistema poi che sono infinitamente vicine a quella passante per $P$ si proiettano, come facilmente si vede, secondo il fascio di rette giacente nel piano $R\Pi$ e avente il centro su questa retta del 1° sistema. Osserviamo poi che ogni cono cubico di rette del 1° sistema ha 2 generatrici appoggiate alla retta del 2° sistema uscente da $P$ (v. n° 12 alla fine) e che queste si proietteranno secondo una stessa retta, doppia pel sistema di rette di $R$ che è proiezione del 1° sistema, e doppia in pari tempo per la proiezione di quel cono cubico e pel cono di 5° ordine dianzi nominato. Si ottengono così per lo spazio ordinario $R$ le proposizioni seguenti:

---

(17) Una parte di questo ragionamento si applica pure a provare che *se su una varietà cubica priva di linee doppie esiste un sistema di rette di 1° ordine, essa sarà generabile mediante tre reti proiettive*. V. n° 27.

*La superficie del 4° ordine con un piano doppio, cioè con sei punti doppi su una conica, e con altri sei punti doppi indipendenti, è superficie focale di due sistemi di rette* $(2, 6)_2$ *e di un sistema residuo* (8, 15). *Ciascuno degli ultimi sei punti doppi è vertice di due coni cubici di raggi dei primi due sistemi; dei sei punti doppi posti sul piano doppio, quattro sono vertici di coni quadrici di raggi di quei due sistemi (e del sistema residuo) e ciascuno dei rimanenti due è per l'uno di questi sistemi vertice di un cono di raggi del 5° ordine, e per l'altro centro di un fascio di raggi posto nel piano doppio. Ognuno dei due sistemi del 2° ordine ha 6 rette doppie, che sono rette doppie pel suo cono di raggi del 5° ordine e rispettivamente pei suoi 6 coni cubici.*

*La superficie del 6° ordine con sestica cuspidale e sei punti doppi indipendenti è focale per due diversi sistemi di rette* (3, 6), *ciascuno dei quali ha sei coni cubici razionali di raggi uscenti rispettivamente dai sei punti doppi, ed aventi per generatrici doppie 6 rette doppie del sistema (le quali sono rette semplici per l'altro sistema).*

Si noti che i sistemi di rette $(2, 6)_2$ ottenuti col nostro procedimento sono i più generali; ciò risulta dal fatto dimostrato da KUMMER (18) che la superficie focale di un sistema $(2, 6)_2$ deve appunto essere del 4° ordine con un piano doppio e 12 punti doppi, e dalle nostre proposizioni dei n$^i$ 2 e 13. Quest'osservazione si può anche fare pei sistemi di rette del 2° ordine che studieremo nei §§ seguenti. Aggiungiamo che se pei sistemi di 2° e 3° ordine incontrati qui e nel seguito ci limitiamo a stabilire col nostro metodo le prime proprietà, si vede però bene che questo si presterebbe anche ad uno studio più minuto di essi.

## Varietà cubiche con sette punti doppi.

15. Mentre nel § precedente si considerava la varietà cubica $\Gamma$ generata da 3 reti proiettive affatto generali, introdurremo in questo e nei successivi delle particolarità in quella proiettività tali che $\Gamma$ oltre ai 6 punti doppi del caso generale venga ad averne altri (1, 2, 3, 4).

---

(18) *Ueber die algebraischen Strahlensysteme u. s. w.* (Abhandl. d. kön. Ak. d. W. zu Berlin, 1866, § 12). A questa Memoria rimandiamo fin d'ora anche pei risultati che si otterranno in seguito sui sistemi di rette di 2° ordine e di classe $< 6$.

Se nelle tre reti generatrici di $\Gamma$, cioè del suo $1^0$ sistema di rette, vi sono tre spazi corrispondenti passanti per uno stesso piano, questo apparterrà a $\Gamma$, e il sistema delle sue rette si staccherà dal suddetto sistema, il quale così diminuirà di classe. Essendo la proiettività fra tre reti determinata da quattro terne di spazi corrispondenti, si potranno prendere ad arbitrio 1, 2, 3, 4 piani appoggiati agli assi delle tre reti come piani comuni a tre spazi corrispondenti, sicchè in tal modo possiamo ridurre il $1^o$ sistema di rette di $\Gamma$ dalla $6^a$ classe alle classi $5^a$, $4^a$, $3^a$, $2^a$.

Un piano intersezione di tre spazi corrispondenti delle tre reti contiene sempre tre, e tre soli, dei sei punti d'incontro di terne di piani corrispondenti; poichè i piani corrispondenti di quei tre spazi determinano su quel piano tre fasci proiettivi di rette, e si sa che in questi vi sono tre terne di rette corrispondenti concorrenti. Chiamando 1, 2, 3, 4, 5, 6 i sei punti doppi di $\Gamma$ nominati, siano ad esempio 1, 2, 3 quelli contenuti nel piano considerato del $1^o$ sistema di rette. Il piano 456 taglierà questo in un punto 7 di $\Gamma$ posto fuori delle rette 45, 56, 64 appartenenti a $\Gamma$ (in causa dell'indipendenza fra i punti 1, 2, ..., 6); ne segue che anche il piano 456 starà su $\Gamma$. Quindi il punto 7 essendo l'*unico* punto comune a due piani di $\Gamma$, sarà un nuovo punto doppio di questa (chè se fosse semplice, lo spazio tangente a $\Gamma$ in esso dovrebbe contenere quei due piani).

Il cono cubico di rette del $2^o$ sistema uscente da uno qualunque dei punti 4, 5, 6 comprende un cono quadrico giacente in uno spazio col piano 123 e quindi si scinde in quello e in un fascio di rette del piano 456, sicchè per ogni punto di questo piano passando tre sue rette del $2^o$ sistema, tutte le rette del piano 456 apparterranno al $2^o$ sistema. Vediamo così che per ogni piano rigato che si stacca dal $1^o$ sistema (come intersezione di spazi corrispondenti nelle tre reti generatrici di questo) vi è un piano rigato che analogamente si stacca dal $2^o$ sistema ([19]); e che i sei punti 1, 2, ..., 6

([19]) Questa proposizione rientra nella seguente, assai più generale. Abbiasi in un $S_n$ una varietà generata da $m$ sistemi lineari proiettivi $l-1$ volte infiniti di $S_{n-1}$:

$$(1)\qquad \begin{cases} \lambda_1 A_{11} + \dots + \lambda_l A_{1l} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda_1 A_{m1} + \dots + \lambda_l A_{ml} = 0 \end{cases}$$

si dividono in due terne situate rispettivamente in quei due piani. Se si suppone anzitutto che solo i piani 123, 456 si stacchino rispettivamente dai due sistemi, questi si ridurranno entrambi alla 5ª classe e le proprietà dell'uno si dedurranno da quelle dell'altro scambiando i due piani 123, 456. Le rette del 1° sistema si appoggiano al piano 456, quelle del 2° al piano 123.

16. *Se una varietà cubica $\Gamma$ ha sette punti doppi* $1, 2, \ldots, 7$ *di cui i primi sei sono indipendenti, essa apparterrà appunto alla specie che andiamo esaminando.*

Invero dei due coni cubici di $\Gamma$ uscenti (n° 13) dal punto doppio 1 ve ne sarà uno che oltre a passare pei punti 2, 3, 4, 5, 6 dovrà avere la retta 17 per generatrice doppia, e che perciò si scinderà in un piano ed un cono quadrico; si scorge facilmente che quel piano oltre alla retta 17 dovrà contenere due tra i detti cinque punti del cono cubico, per es. i punti 2 e 3. Dunque il punto 7 deve stare nel piano 123; questo poi incontra il piano 456 in un solo punto, che sarà doppio per $\Gamma$ e che non potrà quindi esser

---

e quindi anche da $l$ sistemi lineari proiettivi $m - 1$ volte infiniti:

$$\text{(2)} \qquad \begin{cases} \mu_1 A_{11} + \cdots + \mu_m A_{m1} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mu_1 A_{1l} + \cdots + \mu_m A_{ml} = 0, \end{cases}$$

cioè rappresentabile con la matrice:

$$\begin{Vmatrix} A_{11} & \cdot & A_{1l} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ A_{m1} & \cdot & A_{ml} \end{Vmatrix} = 0$$

(V., anche pel significato generale che qui diamo al vocabolo «*generare*», il § citato del lavoro del sig. VERONESE). *Se esiste un* $S_{n-m+1}$ *d'intersezione di spazi corrispondenti degli* m *sistemi* (1), *esisterà pure un* $S_{n-l+1}$ *d'intersezione di spazi corrispondenti degli* l *sistemi* (2). In fatti, sia l'uno sia l'altro fatto, accade solo quando esistono valori dei parametri $\lambda, \mu$ tali che si abbia identicamente (rispetto alle coordinate variabili):

$$\Sigma \lambda_s \mu_r A_{rs} = 0.$$

La stessa proposizione si estende immediatamente al caso in cui le $A_{rs}$, anzi che lineari, siano forme di qualunque ordine.

altro che 7. $\Gamma$ contiene perciò nel caso attuale due piani 123, 456 i quali si tagliano nel punto 7.

Ciò posto, la proposizione enunciata scaturisce dalla seguente: *Se una varietà cubica $\Gamma$ contiene due piani incontrantisi in un solo punto (avendo così su quei piani sette punti doppi, di cui sei indipendenti), essa appartiene alla specie considerata alla fine del numero precedente, vale a dire le rette della varietà che incontrano l'uno o l'altro di quei due piani formano due sistemi* (1, 5) *tra loro coniugati.* E questa a sua volta scaturisce senza difficoltà da quella del n$^0$ 13.

17. Sull'attuale varietà $\Gamma$, oltre ai due sistemi di rette (1, 5) appoggiati rispettivamente ai piani 456 e 123, vi è un 3$^0$ sistema, le cui rette si appoggiano ad entrambi quei piani e che è ancora di specie (1, 5). Invero per ogni punto di $\Gamma$ passa un piano che incontra i due 123, 456 secondo rette e quindi $\Gamma$ secondo una nuova retta passante per quel punto ed appartenente a quel 3$^0$ sistema. Che poi la classe di questo sia 5 deriva da ciò che in una superficie cubica vi sono 5 rette che s'appoggiano a due sue rette sghembe. Vi è poi su $\Gamma$ un sistema residuo (3, 10) le cui rette non s'appoggiano ad alcuno dei due piani 123, 456.

Gli spazi passanti per 123 tagliano ancora $\Gamma$ secondo una serie di quadriche (passanti pei punti 1, 2, 3, 7) aventi una generatrice sul piano 456 e di cui quindi le generatrici dello stesso sistema di quella appartengono al 2$^0$ sistema di rette di $\Gamma$, mentre le generatrici dell'altro sistema appartengono al 3$^0$ sistema di $\Gamma$; tra quelle quadriche vi sono tre coni coi vertici nei punti 4, 5, 6, e questi coni apparterranno al 2$^0$ ed al 3$^0$ sistema. Analogamente gli spazi pel piano 456 dànno una serie di quadriche su $\Gamma$, di cui una generazione apparterrà al 1$^0$ e l'altra al 3$^0$ sistema di rette di $\Gamma$.

18. Da ciascuno dei punti doppi 4, 5, 6 esce un cono cubico di rette del 1$^0$ sistema ed un cono quadrico di rette del 2$^0$ e del 3$^0$ sistema. Similmente da ciascuno dei punti 1, 2, 3 esce un cono quadrico di rette del 1$^0$ e del 3$^0$ sistema ed un cono cubico di rette del 2$^0$ sistema. Infine dal punto 7 escono del 1$^0$ sistema un fascio di rette situato nel piano 123, del 2$^0$ sistema un fascio nel piano 456 e del 3$^0$ un cono di 4$^0$ ordine.

Le rette del 1$^0$ sistema appoggiate ad una retta del 2$^0$, del 3$^0$ o del 4$^0$ sistema, formano una rigata rispettivamente dell'ordine 5, 2, 3 (avente quella retta per direttrice semplice). Analogamente scambiando il 1$^0$ ed il 2$^0$ sistema. Le rette del 3$^0$ appoggiate su una retta del $1^0$, del $2^0$ o del $4^0$, formano una rigata rispettivamente dell'ordine 2, 2, 4.

Nel proiettare sullo spazio $R$ da un punto $P$ di $\Gamma$ dànno quadriche di $R$, non solo le due serie di quadriche situate su $\Gamma$ degli spazi passanti pei due piani 123 e 456, ma anche le rigate cubiche di rette del $1^0$ sistema, le quali passano per $P$: queste rigate sono quelle che hanno per rette direttrici le rette del $4^0$ sistema appoggiate a quella del $1^0$ che passa per $P$, e la considerazione del cono $M^2$ proiettante una di esse prova che esso proietta nello stesso tempo una rigata cubica di rette del $2^0$ sistema passante per $P$.

*Esiste una superficie del* $4^0$ *ordine con tre piani doppi* $\sigma_1\,\sigma_2\,\sigma_3$ *e* 13 *punti doppi, di cui uno* A *comune a quei tre piani, tre* $B_1\,B_2\,B_3$ *situati rispettivamente sulle rette d'intersezione di quelli e i rimanenti formanti tre terne rispettivamente su quei tre piani* $C_1D_1E_1$, $C_2D_2E_2$, $C_3\,D_3\,E_3$. *Quella superficie è focale per tre sistemi di rette* (2, 5) *e per un sistema* (4, 10). *I primi tre sistemi si comportano nello stesso modo. Il* $1^0$ *ha un fascio di raggi uscente dal punto* A *e situato nel piano* $\sigma_1$, *un altro uscente da* $B_2$ *e situato in* $\sigma_3$ *ed infine un terzo uscente da* $B_3$ *e situato in* $\sigma_2$; 6 *coni quadrici di vertici* $C_2D_2E_2C_3D_3E_3$; 3 *coni cubici di vertici* $C_1\,D_1\,E_1$; *ed infine un cono quartico razionale uscente da* $B_1$ *e le cui* 3 *generatrici doppie sono pur tali rispettivamente di quei* 3 *coni cubici del* $1^0$ *sistema. Quanto al* $2^0$ *ed al* $3^0$ *sistema le loro particolarità si ottengono da queste del* $1^0$ *scambiando l'indice* 1 *col* 2 *o col* 3. *La superficie è inviluppata da tre serie di quadriche d'indice* 2, *per ognuna delle quali i due sistemi di generatrici di ogni quadrica appartengono rispettivamente a due dei tre sistemi di rette; così una serie di quadriche passa pei punti singolari* $B_2\,C_2\,D_2\,E_2$, $B_3\,C_3\,D_3\,E_3$, *è tangente al piano* $\sigma_1$ [20] *e dà coi suoi due sistemi di generatrici rispettivamente il* $2^0$ *ed il* $3^0$ *sistema di rette.*

*Una superficie del* $6^0$ *ordine con sestica cuspidale dotata di due soli piani doppi ha sette punti doppi, di cui uno* (7) *comune ai due piani doppi, e gli altri formanti due terne* (1, 2, 3 *e* 4, 5, 6) *poste rispettivamente sui due piani. Il sistema delle tangenti doppie si scinde in tre sistemi* (3, 5) *ed uno* (9, 10). *Dei primi tre sistemi due si comportano diversamente dal* $3^0$. *Infatti, mentre questo ha sei coni quadrici*

---

([20]) Le $\infty^1$ quadriche secondo cui una varietà cubica $\Gamma$ è segata dagli spazi passanti per un suo piano hanno una generatrice in ciascuno dei piani di $\Gamma$ che non stanno con quello in uno spazio, e però si proiettano in una serie di quadriche tangenti ai piani proiezioni di questi.

*uscenti dai punti singolari* 1, 2, 3, 4, 5, 6 *ed un cono razionale del* $4^0$ *ordine uscente da* 7, *il* $1^0$ *sistema, pur contenendo gli stessi coni quadrici uscenti da* 1, 2, 3, *ha tre coni cubici razionali uscenti da* 4, 5, 6, *ed un fascio di raggi uscente dal punto* 7, *e posto nel piano* 123; *mentre il* $2^0$ *sistema ha comuni col* $3^0$ *i coni quadrici uscenti da* 4, 5, 6, *ed ha coni cubici uscenti da* 1, 2, 3, *ed un fascio di raggi uscente da* 7 *e posto nel piano* 456. *Ciascuno dei tre sistemi di rette ha* 3 *rette doppie, le quali sono generatrici doppie per coni del sistema. Vi sono due serie di quadriche d'indice tre, inviluppanti la superficie; l'uno è composto di quadriche passanti pei punti* 1, 2, 3, 7, *tangenti al piano* 456, *e i cui due sistemi di generatrici appartengono rispettivamente al* $2^0$ *ed al* $3^0$ *sistema di tangenti doppie della superficie; l'altro si compone di quadriche passanti pei punti* 4, 5, 6, 7, *tangenti al piano* 123, *e i cui due sistemi di generatrici appartengono rispettivamente al* $1^0$ *ed al* $3^0$ *sistema.*

## Varietà cubiche con otto punti doppi.

19. Supponiamo che, rimanendo fisse le ipotesi del § precedente, vi siano ora due piani intersezioni di spazi corrispondenti delle tre reti proiettive generanti il $1^0$ sistema di rette di $\Gamma$, cioè che, oltre al piano 123, sia tale il piano 156. Allora dal $2^0$ sistema di rette si staccherà il sistema di quelle del piano 234, il quale starà pure su $\Gamma$, e taglierà 156 in un punto 8, che sarà un nuovo punto doppio di $\Gamma$. Lo spazio dei piani 1568 e 4567 taglierà ancora $\Gamma$ in un nuovo piano il quale dovrà evidentemente passare pei punti doppi 1, 8 e 4, 7: segue dunque che i punti doppi 1, 4, 7, 8 stanno su un quinto piano di $\Gamma$ (che si otterrebbe pure dallo spazio congiungente i due piani 1237 e 2348). *Ogni varietà cubica con otto punti doppi è di questa specie e contiene quindi cinque piani* (V. n$^0$ 11 e la nota al n$^0$ 4).

La proposizione vista alla fine del n$^0$ 16 prova che i due piani 123 e 156, i quali s'incontrano in un sol punto, saranno incontrati rispettivamente da due sistemi del $1^0$ ordine di rette di $\Gamma$, coniugati tra loro e che saranno diversi dai primi due, poichè il $2^0$ di questi incontra entrambi quei piani, mentre il $1^0$ non ne incontra alcuno. Osservando che un sistema di rette di $\Gamma$ non può incontrare due piani i quali si seghino in più d'un punto (poichè altrimenti giacerebbe nello spazio determinato dai due piani) si trova subito che i piani incontrati dai quattro sistemi nominati sono rispettivamente i seguenti: 1.° 2348 e 4567, 2.° 1237 e 1568, 3.° 1237 e 4567, 4.° 1568 e 2348.

Questi quattro sistemi sono tutti della stessa specie (1, 4) e formano due coppie distinte, 1° e 2°, 3° e 4°, che si possono scambiare tra di loro; e precisamente si scambiano il 1° col 3° ed il 2° col 4° quando degli otto punti doppi si scambino 1 con 8 e 4 con 7. Nessuno di quei quattro sistemi incontra il piano 1478: le rette di $\Gamma$ che incontrano questo piano e che formano la serie di quadriche posta negli spazi passanti per esso, formano un sistema residuo (2, 6).

20. Il 1° sistema di rette ha un cono cubico uscente dal punto 4, quattro coni quadrici uscenti da 2, 3, 5, 6, e tre fasci di rette di centri 1, 7, 8 e posti rispettivamente nei piani 1478, 1237, 1568. Le rette del 1° sistema appoggiate ad una retta del 2°, 3°, 4° o del sistema residuo formano rigate d'ordine 4, 2, 2, o 3. Ne segue che:

*La superficie del 4° ordine dotata di 6 piani singolari e quindi di 14 punti doppi è focale per quattro sistemi di rette* (2, 4), *ciascuno dei quali ha 6 fasci di raggi, 6 coni quadrici e 2 coni cubici (e due rette doppie). Essa è inviluppata da sette serie di quadriche, una delle quali dà con le sue generatrici il sistema residuo* (4, 6) *di tangenti doppie della superficie, mentre le altre sei corrispondono alle combinazioni binarie dei quattro sistemi* (2, 4) *sì che ciascuna di esse dà coi suoi due sistemi di generatrici due di quei sistemi.*

Le particolarità della configurazione dei 14 punti e dei 6 piani singolari e di quelle serie di quadriche scaturiscono subito dalle ultime cose esposte, ma per brevità non stiamo a darle, essendo esse alquanto complicate.

*La superficie del 6° ordine dotata di sestica cuspidale e di (quattro e quindi) cinque piani doppi ha otto punti doppi la cui distribuzione su quei piani può rappresentarsi così:*

$$\alpha:\ A_1\,A_2\,A_3\,A_4\,,$$

$$\sigma_{13}:\ A_1\,A_3\,M'M''\,;\qquad \sigma_{24}:\ A_2\,A_4\,M'\,M''$$

$$\sigma_{14}:\ A_1\,A_4\,N'\,N''\,;\qquad \sigma_{23}:\ A_2\,A_3\,N'\,N''.$$

*La superficie è focale per quattro sistemi* (3, 4) *che corrispondono in un certo senso agl'indici inferiori di quella notazione. Così il 1° sistema ha tre fasci di raggi di centri* $A_2\ A_3\ A_4$ *situati rispettivamente nei piani* $\alpha$, $\sigma_{23}$, $\sigma_{24}$, *quattro coni quadrici uscenti da* M′ M″ N′ N″, *ed un cono cubico di vertice* $A_1$ *(la cui retta doppia è l'unica retta doppia del* $1^0$ *sistema); ecc. La superficie è inviluppata da 5 serie di quadriche passanti rispettivamente per le quaterne di punti doppi poste nei 5 piani singolari: la serie passante pei punti doppi del piano* $\sigma_{13}$ *dà coi due sistemi di generatrici il* $1^0$ *ed il* $3^0$ *sistema di rette, ecc.; la serie passante per* $A_1\,A_2\,A_3\,A_4$ *dà un sistema residuo* (6, 6) *di tangenti doppie della superficie.*

## Varietà cubiche con nove punti doppi.

21. Suppongasi che per le tre reti proiettive generanti il $1^0$ sistema di rette di $\Gamma$ vi sia un terzo piano d'intersezione di spazi corrispondenti, e sia esso 246. Dal sistema coniugato ($2^0$ sistema) si staccherà analogamente il piano 135. Sia 9 il punto d'intersezione di questi due piani: esso sarà un nuovo punto doppio di $\Gamma$. Si vede in modo analogo a quello in cui al n$^0$ 19 si giunge al piano 1478, che $\Gamma$ conterrà, oltre a tutti i piani già nominati, i due 2579 e 3689, e quindi in tutto nove piani. Si vede facilmente che *in questo modo si ottiene qualunque varietà cubica con nove punti doppi, sicchè una tal varietà contiene sempre nove piani.*

Le rette di $\Gamma$ formano in questo caso sei diversi sistemi (1, 3) i quali incontrano rispettivamente i piani seguenti (21):

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $1^0$ | 4567, | 2348, | 1359 | $4^0$ | 2348, | 1568, | 2579 |
| $2^0$ | 1237, | 1568, | 2469 | $5^0$ | 1359, | 2469, | 1478 |
| $3^0$ | 1478, | 2579, | 3689 | $6^0$ | 4567, | 1237, | 3689. |

Di questi sei sistemi i primi tre sono tra loro a due a due coniugati, e così pure gli altri tre. Due sistemi appartenenti rispettivamente alle due terne hanno comune un piano d'appoggio; mentre due sistemi coniugati, cioè della stessa terna, non hanno piani d'appoggio comuni. La tabella precedente si può dedurre dall'osservazione che esistono sei spazi ciascuno dei quali contiene tre piani e (sulle loro rette d'intersezione) sei punti doppi di $\Gamma$; essi sono i seguenti:

(21) Il sistema *residuo* del n$^0$ 19 si scompone ora in quelli che qui chiamo $3^0$ e $5^0$; l'attuale $6^0$ è il $3^0$ del n$^0$ 19.

123579, 145678, 234689;

123478, 245679, 135689.

Si vede che i nove piani non sono altro che i piani d'intersezione dei primi tre di questi spazi cogli ultimi tre. Ne segue che: *la varietà cubica con nove punti doppi e quindi contenente nove piani non è altro che una varietà del fascio determinato da due terne di spazi (che si segano mutuamente in quei nove piani); e viceversa.* Si vede facilmente che in un tal fascio di varietà cubiche con nove punti doppi fissi ve n'è una sola con un decimo punto doppio ([22]); ed inoltre che per questo punto devono passare i sei piani 345, 126, 367, 258, 149, 789 (Cfr. n⁰ 24). Ciascuno di questi congiunge i tre punti doppi nei quali i tre piani d'intersezione degli spazi di una terna sono incontrati rispettivamente dai tre piani d'intersezione degli spazi dell'altra terna, prendendo questi piani in un certo ordine ([23]).

*Le varietà cubiche con nove punti doppi sono quelle generabili con tre fasci di spazi in corrispondenza trilineare.* Considerando in fatti un sistema di rette di una varietà cubica con nove punti doppi, si riferiscano tra loro i tre fasci di spazi, aventi per sostegni rispettivamente quei tre piani della varietà che sono incontrati da tutte le rette del sistema, chiamando corrispondenti tre spazi che proiettino una stessa retta del sistema: allora è chiaro che a due spazi qualunque di due fasci corrisponde uno spazio perfettamente determinato del fascio rimanente, sicchè la corrispondenza stabilita fra i tre fasci sarà trilineare. Viceversa tre fasci di spazi in corrispondenza trilineare aventi per sostegni tre piani indipendenti generano una varietà cubica che contiene quei tre piani ed inoltre ciascuna delle tre coppie di piani in cui si tagliano due spazi di due fasci aventi per corrispondente ogni spazio dell'altro fascio. Tale varietà ha in generale nove punti doppi; ma ne ha dieci nel caso particolare in

---

([22]) Se il fascio si rappresenta con l'equazione $x_1 x_2 x_3 + \lambda x_4 x_5 x_6 = 0$, dove $\lambda$ è il parametro variabile ed è $\Sigma x = 0$, quella particolare varietà corrisponderà a $\lambda = 1$, ed il suo decimo punto doppio sarà il punto $(1, 1, 1, -1, -1, -1)$. Avvertiamo a questo proposito che di tutte le particolari varietà cubiche che s'incontreranno in seguito si possono scrivere le equazioni senz'alcuna difficoltà.

([23]) La proposizione che i sei piani, che così si ottengono da due terne di piani condotte rispettivamente per due rette, passano per uno stesso punto, si può anche dimostrare per via affatto elementare. Vedi « *Alcune considerazioni elementari sull'incidenza di rette e piani nello spazio a quattro dimensioni* », Rend. Palermo, 2 [V. questo volume, p. 160-166].

cui quei tre spazi dei tre fasci che si tagliano in un piano sono corrispondenti.

22. Si possono introdurre pei nove punti doppi e pei nove piani di $\Gamma$ notazioni più espressive a due indici sia considerandoli come intersezioni delle due terne di spazi sia mediante le due terne di sistemi di rette [24]. Seguendo quest'ultimo concetto rappresentiamo con $\alpha_{ik}$ il piano di $\Gamma$ che è appoggio comune ai sistemi di rette $i$ e $k$ (essendo $i=1,2,3$, e $k=4,5,6$) e con $A_{ik}$ quel punto doppio di $\Gamma$ in cui si tagliano quei quattro dei 6 spazi i quali non passano per $\alpha_{ik}$. Si verifica allora immediatamente che un punto ed un piano si appartengono quando le loro notazioni hanno comune un indice solo. Segue dal § precedente che pel punto $A_{ik}$ passano un cono quadrico comune ai sistemi di rette $i$, $k$ e quattro fasci di raggi appartenenti rispettivamente agli altri quattro sistemi e situati nei quattro piani di $\Gamma$ passanti per quel punto; e precisamente il fascio di raggi del sistema $i'$ o $k'$ uscente da $A_{ik}$ sta nel piano $\alpha_{i'k}$ od $\alpha_{ik''}$, se $ii'i''$ e $kk'k''$ indicano permutazioni qualunque rispettivamente degl'indici 123 e 456.

Proiettando da un punto di $\Gamma$ si otterrebbero così proprietà dei sistemi di rette (2, 3) che non ci fermiamo ad enunciare, dovendone ottenere le duali pei sistemi (3, 2) in modo più simmetrico nel § seguente. Proiettando invece da un punto esterno a $\Gamma$ abbiamo:

*La superficie del* $6^0$ *ordine con sestica cuspidale e nove punti doppi ha nove piani doppi, sì che per ogni punto passano quattro piani e su ogni piano stanno quattro punti. Essa è focale per sei sistemi di rette* (3, 3) *distribuiti in due terne* 1 2 3 e 4 5 6. *Conservando ai punti e piani le notazioni precedenti* $\mathrm{A}_{ik}$, $\alpha_{ik}$, *hanno ancor luogo le relazioni dianzi esposte, sicchè per es. il* $1^0$ *sistema di rette ha tre coni quadrici uscenti dai punti* $\mathrm{A}_{14}$, $\mathrm{A}_{15}$, $\mathrm{A}_{16}$ *e sei fasci di raggi di sostegni* $\mathrm{A}_{2\mathrm{k}}\,\alpha_{3\mathrm{k}}$, $\mathrm{A}_{3\mathrm{k}}\,\alpha_{2\mathrm{k}}$ ($\mathrm{k}=4,5,6$). *La superficie è inviluppata da nove serie di quadriche; i due sistemi di generatrici di una stessa serie formano due dei detti sistemi appartenenti rispettivamente alle due terne e, detti* i, k *gl'indici di questi sistemi, la serie di quadriche passa pei punti doppi del piano* $\alpha_{ik}$ *e tocca i piani doppi passanti pel punto* $\mathrm{A}_{ik}$.

23. La considerazione delle due terne di spazi del $\mathrm{n}^0$ 21 dà altre proprietà della configurazione degli elementi singolari di quella su-

[24] Questi due modi non coincidono, perchè non vi è corrispondenza fra le due terne di spazi e le due terne di sistemi di rette.

perficie del $6^0$ ordine. I 3 piani d'intersezione degli spazi di una terna incontrano i tre piani d'intersezione degli spazi dell'altra terna secondo i 9 punti doppi di $\Gamma$. Considerando inoltre le due rette che sono sostegni sia delle due terne di spazi sia delle due terne di piani, si giunge alla seguente proprietà degli elementi singolari di $\Gamma$ e quindi anche degli elementi singolari della nostra superficie del $6^0$ ordine: *I tre piani* $A_{14} A_{25} A_{36}$, $A_{15} A_{26} A_{34}$, $A_{16} A_{24} A_{35}$ *passano per una stessa retta, e così pure i piani* $A_{16} A_{25} A_{34}$, $A_{15} A_{24} A_{36}$, $A_{14} A_{26} A_{35}$ *passano per una seconda retta; i tre punti* $\alpha_{14} \alpha_{25} \alpha_{36}$, $\alpha_{15} \alpha_{26} \alpha_{34}$, $\alpha_{16} \alpha_{24} \alpha_{35}$ *stanno su quest'ultima retta, mentre i tre punti* $\alpha_{16} \alpha_{25} \alpha_{34}$, $\alpha_{15} \alpha_{24} \alpha_{36}$, $\alpha_{14} \alpha_{26} \alpha_{35}$ *stanno sulla prima retta.*

La considerazione delle $\infty^1$ varietà cubiche aventi comuni i 9 punti doppi costituenti il fascio determinato dalle due terne di spazi ed in particolare di quella che passa pel centro di proiezione (il contorno apparente della quale si riduce al $4^0$ ordine ed acquista un nuovo piano doppio e sei nuovi punti doppi) e di quella che ha un decimo punto doppio da cui escono sei nuovi piani della varietà stessa (cfr. $n^i$ 21 e 24) ci dà:

*I 9 punti* $A_{ik}$ *ed i 9 piani* $\alpha_{ik}$ *singolari per la superficie di* $6^0$ *ordine e* $6^a$ *classe considerata sono pur tali per una serie* $\infty^1$ *di siffatte superficie. Però una di queste si riduce al* $4^0$ *ordine (ed i relativi sistemi di tangenti doppie al* $2^0$*) acquistando sei nuovi punti doppi* $\alpha_{i4} \alpha_{i5} \alpha_{i6}$, $\alpha_{1k} \alpha_{2k} \alpha_{3k}$ $(i = 1, 2, 3;\ k = 4, 5, 6)$ *ed un piano doppio su cui questi punti stanno, sicchè si ha per la configurazione dei piani* $\alpha_{ik}$ *la nuova proprietà che quei loro sei punti d'intersezione sono su una conica. Un'altra superficie di quella serie si riduce alla* $4^a$ *classe; i sei piani* $A_{i4} A_{i5} A_{i6}$, $A_{1k} A_{2k} A_{3k}$ *passano per uno stesso punto (ed inviluppano un cono quadrico) e sono insieme con questo altri elementi singolari di quella superficie.*

Il $1^0$ sistema $(3, 3)$ di tangenti doppie di una superficie qualunque di quella serie è proiezione di un sistema di rette appoggiate ai tre piani $\alpha_{14}, \alpha_{15}, \alpha_{16}$ di $S_4$. Ora le $\infty^3$ rette di $S_4$ appoggiate a questi tre piani, indipendenti fra loro, sono punteggiate proiettivamente dal fascio di spazi che passa pei tre punti $A_{14}, A_{15}, A_{16}$ in cui quei piani si tagliano a due a due, ed in queste proiettività si corrispondono i punti d'incontro coi piani stessi (cioè con gli spazi del fascio passanti per questi piani). Dunque quelle $\infty^3$ rette si proiettano su $R$ secondo le rette di un complesso tetraedrale avente per piani singolari $\alpha_{14}, \alpha_{15}, \alpha_{16}$ e $A_{14} A_{15} A_{16}$ ed abbiamo:

*I corrispondenti sistemi* $(3, 3)$ *di tangenti doppie di quella serie* $\infty^1$ *di superficie del* $6^0$ *ordine e* $6^a$ *classe costituiscono un complesso* *tetraedrale; così il luogo del* $1^0$ *sistema è un complesso tedraedrale relativo al tetraedro di facce* $\alpha_{14}, \alpha_{15}, \alpha_{16}$ *e* $A_{14} A_{15} A_{16}$.

Se il sistema delle rette appoggiate ai tre piani $\alpha_{14}, \alpha_{15}, \alpha_{16}$ si proietta da un punto di quel piano che congiunge i tre punti $A_{14}$, $A_{15}, A_{16}$, in cui quelli s'incontrano a due a due (cioè del piano 345 nelle notazioni del $n^0$ 21), è facile vedere che esso darà un complesso lineare di rette dello spazio ordinario; quindi si ottiene in questo una particolare serie di superficie del $6^0$ ordine e $6^a$ classe, per ciascuna delle quali il $1^0$ dei sei sistemi (3, 3) di tangenti doppie sta in un complesso lineare fisso. Se poi la proiezione si fa dal punto considerato al $n^0$ 21, pel quale passano i sei piani $A_{i4} A_{i5} A_{i6}$, $A_{1k} A_{2k} A_{3k}$, essa produrrà una serie notevolissima di superficie per le quali tutti sei i sistemi (3, 3) di tangenti doppie stanno rispettivamente in sei complessi lineari fissi ([25]).

## Varietà cubiche con dieci punti doppi.

24. Siano infine quattro i piani d'intersezione di spazi corrispondenti delle tre reti proiettive generanti il $1^0$ sistema di rette di $\Gamma$, cioè i quattro piani 123, 156, 246 e 345. Conservando per tutto il resto le notazioni precedenti, diciamo 0 il punto d'intersezione dei piani 345 e 126. Avremo così la più generale varietà cubica con dieci punti doppi (1, 2, ... , 9, 0). Questa varietà $\Gamma$ conterrà i quindici piani seguenti:

1237, 4567; 1568, 2348;

2469, 1359; 3450, 1260;

1478, 2579, 3689, 3670, 2580, 1490; 7890.

Le rette di $\Gamma$ formano sei sistemi (1, 2) tutti coniugati fra loro e di cui ciascuno incontra cinque (soli) dei quindici piani nel modo seguente:

---

([25]) È mio dovere dichiarare, che, prima che nell'ultimare questo lavoro io fossi condotto a questo risultato, il sig. CASTELNUOVO mi aveva già annunciato l'esistenza di un punto tale che proiettando da esso i sei sistemi di rette della varietà cubica con nove punti doppi si ottengono sistemi situati su altrettanti complessi lineari. Lo stesso fatto accadde per due o tre altre osservazioni di minor importanza.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $1^0$ | 4567, | 2348, | 1359, | 1260, | 7890 |
| $2^0$ | 1237, | 1568, | 2469, | 3450, | 7890 |
| $3^0$ | 1478, | 2579, | 3689, | 3450, | 1260 |
| $4^0$ | 1568, | 2348, | 2579, | 3670, | 1490 |
| $5^0$ | 2469, | 1359, | 1478, | 3670, | 2580 |
| $6^0$ | 1237, | 4567, | 3689, | 2580, | 1490. |

La configurazione dei dieci punti doppi e dei quindici piani di $\Gamma$ è, come si vede, molto notevole: ciascuno dei quindici piani di $\Gamma$ contiene quattro di quei punti, e per ogni punto passano sei di quei piani. I piani si raggruppano nelle sei quintuple scritte, ciascuna delle quali si compone di piani incontrantisi due a due in un sol punto; ogni piano appartiene a due quintuple, essendo incontrato secondo rette da altri sei, e in un punto solo dai rimanenti otto, i quali con esso formano quelle due quintuple. Viceversa due quintuple qualunque hanno sempre un piano comune.

25. Questa configurazione e la relativa varietà cubica $\Gamma$ non hanno invarianti assoluti. In fatti $\Gamma$ è determinata da quattro piani d'una stessa quintupla, essendo il luogo delle rette che incontrano quei quattro piani. Ora quattro piani che s'incontrino a due a due in sei punti sono sempre trasformabili proiettivamente (in un modo perfettamente determinato) in un'altra simile quaterna di piani, e ciò mediante l'omografia che fa corrispondere i gruppi dei sei punti d'intersezione dei piani stessi.

Da questa osservazione seguono immediatamente le seguenti notevoli proposizioni:

*Le rette che incontrano quattro piani indipendenti dati ad arbitrio formano una varietà cubica che contiene oltre a questi altri undici piani, uno dei quali è pure incontrato da tutte quelle rette. Quei quindici piani passano a sei a sei per dieci punti i quali sono doppi per quelle varietà cubiche.*

*Se i quattro piani dati si chiamano $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, e s'indica con $\alpha'$ il piano dei tre punti d'intersezione di $\beta, \gamma, \delta$, con $\beta'$ il piano dei tre punti d'intersezione di $\gamma, \delta, \alpha$, ecc., i quattro punti $\alpha\alpha', \beta\beta', \gamma\gamma', \delta\delta'$ staranno in uno stesso piano $\varepsilon$, e i cinque piani $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon$ formeranno* *una quintupla, tale che ogni retta la quale ne incontri quattro incontrerà anche il rimanente* [26].

*La varietà $\Gamma$ si trasforma in se stessa mediante quindici involuzioni ciascuna delle quali ha uno determinato dei quindici piani per piano direttore, scambia tra loro le due quintuple a cui questo piano appartiene e i relativi sistemi di rette, e trasforma in se stessi ciascuna delle rimanenti quintuple e il relativo sistema di rette.*

Così la involuzione (lineare) (14) (25) (36) (la quale ha il piano 7890 dei punti d'intersezione dei piani corrispondenti 123, 456; 156, 234; 246, 135; 345, 126 per piano direttore) trasforma evidentemente la 1ª quintupla di piani di $\Gamma$ nella 2ª, e non muta le rimanenti. La retta che è asse di questa involuzione sarà quella che sega le tre rette 14, 25, 36.

I sei piani di $\Gamma$ uscenti da un punto doppio costituiscono in questo caso il cono sestico intersezione di $\Gamma$ col cono $M^2$ tangente in quel punto doppio. Ne segue che uno spazio qualunque $R$ sega quei sei piani in due terne incidenti di rette, cioè due terne di generatrici dei due sistemi di una stessa quadrica.

26. La configurazione dei 10 punti doppi e dei 15 piani di $\Gamma$ si può rappresentare in modo più espressivo seguendo il concetto che ci guidò al n⁰ 22 del § precedente. Indichiamo con $(ik)$ il piano comune alle due quintuple $i$ e $k$ del n⁰ 24, cioè il piano a cui si appoggiano nello stesso tempo i due sistemi di rette di $\Gamma$ d'indici $i$ e $k$. Osserviamo poi che pel punto doppio 0 passano, secondo la tabella del n⁰ 24, i piani che ora rappresentiamo con (12), (23), (31); (45), (56), (64); e noi rappresenteremo quindi 0 con $(123) \equiv (456)$, ed analogamente faremo per tutti i dieci punti doppi di $\Gamma$. Allora la tabella citata mostra che: *pel punto doppio* $(\mathrm{ikl}) \equiv (\mathrm{mnp})$ *passa un fascio di raggi di ciascuno dei sei sistemi, e che precisamente il fascio di raggi del sistema d'indice* i *sta nel piano* (kl), *ecc.*

Proiettando da un punto $P$ di $\Gamma$ si ottiene come contorno apparente la *superficie di* KUMMER *di* 4⁰ *ordine e* 4ª *classe con* 16 *punti e* 16 *piani singolari.* Questi elementi sono, oltre alle proiezioni dei 10 punti doppi e dei 15 piani di $\Gamma$, le tracce su $R$ dei raggi dei sei diversi sistemi uscenti da $P$ ed il piano di questi punti. Indicando questi rispettivamente con (1), (2), ..., (6) ed il loro piano

---

[26] Questa proposizione, che appartiene agli elementi della geometria proiettiva di $S_4$, si può anche dimostrare mediante considerazioni affatto elementari. V. la Nota citata dei *Rendiconti* di Palermo.

con (0) si ritrova così la notazione introdotta dal sig. WEBER pei 16 punti e 16 piani singolari della superficie di KUMMER. Si ritroverebbero inoltre molte proprietà note di quella configurazione e di questa superficie seguendo questa via; ma non vogliamo fermarci su ciò ([27]).

Se invece il centro di proiezione sta fuori di $\Gamma$ abbiamo:

*La superficie di 4ª classe e 6⁰ ordine con sestica cuspidale e con dieci punti e quindici piani doppi è superficie focale per sei sistemi di rette. Conservando a quei punti e piani le notazioni degli elementi di $\Gamma$ di cui sono proiezioni si hanno ancora in quei vari sistemi i fasci di raggi su menzionati. La superficie è inviluppata da quindici serie di quadriche corrispondenti in un certo modo ai quindici piani; la serie che corrisponde al piano* (ik) *passa pei quattro punti doppi situati in esso e tocca gli otto piani che hanno comune con quello un solo punto doppio, cioè i piani* (il), (kl), *dove* l *è diverso da* i *e* k; *i due sistemi di generatrici di questa serie di quadriche costituiscono rispettivamente i due sistemi di rette nominati d'indici* i *e* k ([28]).

27. Prima di lasciare le varietà cubiche studiate dal n⁰ 12 in poi, cioè generabili mediante tre reti proiettive ed aventi un numero finito di punti doppi, dimostreremo che: *Le sole varietà cubiche prive di linee doppie che contengano sistemi di rette del* 1⁰ *ordine sono appunto quelle generabili mediante tre reti proiettive; anzi, se si fa astrazione da quel sistema* (1, 5) *di rette di una varietà cubica contenente due soli piani il quale s'appoggia ad entrambi questi piani* (v. n⁰ 17), *ogni sistema di rette del* 1⁰ *ordine di una varietà cubica priva di linee doppie è esso stesso generabile mediante tre reti proiettive.*

Invero se una varietà cubica $\Gamma$, che non abbia infiniti punti doppi, è tale che dal sistema delle sue rette se ne stacchi uno del 1⁰ ordine e di classe $n$, uno spazio qualunque conterrà $n$ rette di questo sistema, le quali saranno in generale tutte sghembe tra loro, perchè altrimenti pel punto comune a due di esse dovrebbero passare infinite rette del sistema, il che può solo accadere per un numero finito di punti di $\Gamma$. Dunque quelle $n$ rette formano una *$n$-pla di rette* (sghembe) per la superficie cubica sezione di $\Gamma$ con quello spazio; ne segue che $n \leq 6$. Inoltre, per altre note proprietà delle

---

([27]) V. la mia Nota citata sulla varietà cubica con 10 punti doppi.

([28]) Il luogo dei poli del piano (*ik*) rispetto alla serie delle quadriche di $\Gamma$ poste negli spazi passanti per quel piano, oppure, nello spazio ordinario, rispetto alla corrispondente serie di quadriche, si riduce ora ad una retta.

superficie cubiche, se si esclude il caso in cui $n = 5$ e la quintupla si appoggia completamente a *due* diverse rette, si può sempre, per due rette $p$, $p'$ della $n$-pla trovare due altre rette $r$, $r'$ della superficie cubica tali che $r$ tagli tutte le rette della $n$-pla salvo $p$ e che $r'$ tagli tutte le rette della $n$-pla eccetto $p'$. Allora facendo rotare lo spazio considerato attorno ad $r$, oppure attorno ad $r'$, si vede per ragione di continuità che in esso vi sarà sempre una sola retta del sistema di $1^0$ ordine considerato la quale non incontri $r$, oppure rispettivamente $r'$; quindi se nelle due reti degli spazi passanti per $r$ od $r'$ si fanno corrispondere due spazi quando vanno ad una stessa retta di quel sistema (la quale non incontri nè $r$ nè $r'$) la corrispondenza sarà univoca. Si potrà anzi dimostrare che la corrispondenza è proiettiva con un ragionamento identico a quello usato al n$^0$ 13 per provare la stessa proprietà della corrispondenza univoca fra le due reti ivi considerate, dopo che quella corrispondenza era stata riconosciuta univoca. Si può dunque conchiudere che il nostro sistema di rette è generabile mediante tre reti proiettive.

Nel caso escluso in cui il sistema considerato abbia in uno spazio qualunque una quintupla di rette appoggiate a *due* altre rette della superficie cubica, a queste si appoggeranno rispettivamente due altre quintuple (dell'altra specie, cioè dotate ciascuna di *una* sola cinquisecante); ed un ragionamento della stessa natura di quello svolto dianzi prova che queste apparterranno rispettivamente a due altri sistemi $(1, 5)$ generabili con reti proiettive e coniugati fra loro. Quindi il sistema di $1^0$ ordine escluso è il $3^0$ sistema $(1, 5)$ del n$^0$ 17.

Le considerazioni fatte in questo numero dànno anche la proposizione seguente (che servirà più tardi), *sempre* valida: *Se su una varietà cubica stanno due sistemi di rette* $(1, \mathrm{n})$ *tali che i due gruppi di loro rette giacenti in qualunque spazio si corrispondano per guisa che ogni retta dell'uno tagli tutte quelle dell'altro tranne la retta corrispondente, i due sistemi saranno coniugati in generazioni con reti proiettive di spazi.*

## Varietà cubiche con punti doppi di specie superiore.

28. Un punto doppio di una varietà qualunque $V^m_{n-1}$ ad $n - 1$ dimensioni dello spazio ad $n$ dimensioni $S_n$ può presentare vari casi, a seconda che il cono quadrico $M^2_{n-1}$ tangente in esso alla varietà è di 1$^a$, 2$^a$, 3$^a$,... specie, cioè ha un $S_0$, $S_1$, $S_2$,... (di punti doppi) per *sostegno*; a seconda di questi vari casi diremo il punto doppio

*di* 1ª, 2ª, 3ª,... *specie.* Il punto doppio di 1ª specie costituisce il caso più generale; i punti doppi di $(n-1)$-esima o di $n$-esima specie hanno per coni tangenti rispettivamente una coppia di spazi $S_{n-1}$ distinti o coincidenti, e si possono anche chiamare punti doppi *bispaziale* od *unispaziale.*

*La* $\mathrm{M}_{\mathrm{n}-1}^{\mathrm{m}-1}$ *prima polare di un punto qualunque* P *rispetto ad una varietà* $\mathrm{V}_{\mathrm{n}-1}^{\mathrm{m}}$ *avente un punto doppio* D *di specie* r *è tangente in* D *al sostegno* $\mathrm{S}_{\mathrm{r}-1}$ *del cono tangente in* D *alla varietà* (29). In fatti si conduca un piano qualunque $S_2$ per $P$ e per una retta di quell'$S_{r-1}$, la quale passi per $D$; la sezione fatta da questo piano in $V_{n-1}^{m}$ sarà una curva avente in $D$ una cuspide con quella retta per tangente cuspidale. La prima polare di $P$ rispetto a questa curva, cioè l'intersezione del piano con la $M_{n-1}^{m-1}$ polare di $P$ rispetto a $V$, sarà dunque tangente in $D$ a quella retta. Da ciò segue immediatamente il teorema enunciato.

E da questo possiamo dedurre che:

*Un punto doppio* D *di specie* $\mathrm{r}>1$ *di una varietà* $\mathrm{V}_{\mathrm{n}-1}^{\mathrm{m}}$ *di* $\mathrm{S}_{\mathrm{n}}$ *ne abbassa in generale la classe di* $3.2^{\mathrm{r}-2}$ *unità.* La *classe* di $V$, cioè il numero dei suoi $S_{n-1}$ tangenti appartenenti ad un fascio qualunque, sarà diminuita da $D$ di tante unità quanti sono i punti d'intersezione assorbiti da $D$ della varietà $V$ con le prime polari rispetto a $V$ di $n-1$ punti (indipendenti) di $S_n$. Levando una di queste ultime varietà, la $V$ e le rimanenti si taglieranno secondo una curva passante per $D$ con un certo numero di rami, tutti tangenti al sostegno $S_{r-1}$ del cono tangente in $D$ a $V$, e perciò tangenti anche alla varietà che si è tolta; dunque il numero cercato è il doppio di quel numero di rami, ossia, segando con un $S_{n-1}$ passante per $D$ la $V$ e le $n-2$ prime polari rimaste, è il doppio del numero delle intersezioni assorbite da $D$ delle $n-1$ varietà così ottenute nell'$S_{n-1}$, vale a dire di quel numero che si ottiene dal cercato diminuendo simultaneamente $n$ ed $r$ di 1. Per questa via, riducendosi infine al caso di $r=2$, si dimostra la proposizione enunciata.

29. *Se una varietà* $\mathrm{V}_{\mathrm{n}-1}^{\mathrm{m}}$ *di* $\mathrm{S}_{\mathrm{n}}$ *ha una* $\mathrm{M}_{\mathrm{r}-1}$ *di ordine qualunque doppia, ogni punto* D *di questa è in generale un punto doppio di specie* r, *in cui il cono tangente ha per sostegno l'*$\mathrm{S}_{\mathrm{r}-1}$ *tangente nel punto stesso alla* $\mathrm{M}_{\mathrm{r}-1}$ *doppia.*

(29) Si vede anche facilmente che: *lo spazio* $\mathrm{S}_{\mathrm{n}-1}$ *tangente in* D *a quella prima polare è lo spazio polare di* P *rispetto al cono* $\mathrm{M}_{\mathrm{n}-1}^{2}$ *tangente alla varietà* V *in* D.

Si consideri in fatti una retta $l$ che congiunga $D$ ad un punto della $M_{r-1}$ infinitamente vicino ad esso, vale a dire una retta tangente in $D$ a questa varietà. Una generatrice del cono tangente in $D$ alla $V$, vale a dire una retta che incontri tre volte in $D$ la $V$, sarà congiunta ad $l$ da un piano il quale taglierà $V$ in una curva avente in $D$ un punto di contatto di due rami (cioè la riunione del punto doppio $D$ col punto doppio infinitamente vicino considerato) con la tangente singolare $l$, ed avente oltre a questa un'altra retta tangente in $D$; dunque quella curva avrà in $D$ un punto triplo, e quindi tutte le rette di quel piano passanti per $D$ apparterranno al cono tangente in $D$ a $V$. Applicando questo risultato a ciascuna delle tangenti $l$ in $D$ ad $M$, risulta che il cono tangente in $D$ a $V$ si compone di infiniti $S_r$ passanti per l'$S_{r-1}$ che è tangente in $D$ ad $M$; il che prova appunto l'asserto.

Lo stesso ragionamento si applicherebbe a provare la seguente proposizione di cui la precedente si potrebbe considerare come un corollario:

*Se in una varietà ad* n — 1 *dimensioni di* $\mathrm{S_n}$ *si fanno avvicinare indefinitamente in direzioni tutte indipendenti tra loro* r — 1 *punti doppi di* 1ª *specie ad un* r*-esimo fisso, si ottiene come limite un punto doppio di specie* r.

30. Una varietà cubica di $S_4$ può avere punti doppi di 1ª, 2ª, 3ª e 4ª specie. Nel 3⁰ caso i due spazi tangenti nel punto doppio (bispaziale) segheranno la varietà in due coni cubici aventi comuni le tre generatrici costituenti l'intersezione del piano comune a quei due spazi con la varietà. Similmente lo spazio tangente in un punto unispaziale segherà la varietà in un cono cubico. Mentre in questi ultimi due casi il cono sestico di $\Gamma$ uscente dal punto doppio si scinde, nel caso di un punto doppio di 2ª specie esso non presenta altra particolarità che quella di avere per sezione con uno spazio una sestica situata su un cono quadrico.

Il caso in cui $\Gamma$ ha in $D$ un punto unispaziale è caratterizzato da ciò che in *ogni* piano passante per $D$ la cubica d'intersezione con $\Gamma$ ha in $D$ una cuspide, la cui tangente cuspidale appartiene allo spazio tangente in $D$ a $\Gamma$. In particolare, se il piano è condotto per una generatrice $l$ del cono cubico di $\Gamma$ uscente da $D$, la residua intersezione del piano con $\Gamma$ sarà una conica tangente in $D$ ad $l$; e se il piano deve essere tangente a $\Gamma$ in un determinato punto di $l$ diverso da $D$, quella conica deve spezzarsi in $l$ ed un'altra retta, e quindi quel piano sarà tangente a $\Gamma$ lungo tutta la $l$. Ne segue immediatamente che:

*Se $\Gamma$ ha un punto unispaziale, vi sarà per ogni retta di $\Gamma$ uscente da quel punto uno spazio tangente a $\Gamma$ lungo tutta quella retta; questo spazio segherà $\Gamma$ secondo una rigata cubica avente quella retta per retta doppia.*

Segue da questa proposizione che proiettando dal punto unispaziale il sistema delle rette di $\Gamma$ si ottiene nello spazio $R$ il sistema delle rette tangenti ad una superficie cubica nei punti di una sua sezione piana. Da un punto bispaziale invece il sistema delle rette di $\Gamma$ si proietta secondo il sistema delle rette di $R$ appoggiate a due cubiche piane le quali s'incontrano in tre punti ed è dalla coincidenza di queste due cubiche piane che si può considerare come proveniente il caso precedente.

Riguardo ai casi in cui $\Gamma$ ha più punti doppi di specie superiore osserviamo soltanto che se $\Gamma$ oltre ad un punto unispaziale ha un altro punto doppio essa avrà la congiungente di questi due punti per retta doppia (come risulta segando $\Gamma$ con un piano passante per la retta stessa). In particolare se $\Gamma$ ha due punti unispaziali, ogni altro punto della loro congiungente sarà bispaziale; questo caso si presenterà più tardi (n⁰ 46).

31. Nel contorno apparente di $\Gamma$ rispetto ad un punto qualunque $P$, il punto singolare $D'$ che si ottiene come proiezione di un punto doppio $D$ di $\Gamma$ ha le tangenti tripunte date dai piani passanti per $P$ e tangenti al cono tangente in $D$ a $\Gamma$ (poichè tre delle tangenti condotte da un punto ad una curva piana dotata di cuspide coincidono nella retta che va da quel punto alla cuspide). Ne segue [30] che se $D$ è punto doppio di 2ª specie per $\Gamma$, $D'$ sarà un punto doppio *biplanare* pel contorno apparente, e se $D$ è bispaziale per $\Gamma$, $D'$ sarà *uniplanare* per quella superficie. Infine se $D$ è unispaziale per $\Gamma$, $D'$ sarà un punto *triplo* per il contorno apparente; si vede poi subito che allora il cono tangente in esso sarà la proiezione fatta da $P$ del cono cubico di $\Gamma$ uscente da $D$.

Si possono quindi ottenere, come contorni apparenti di varietà cubiche dotate di punti doppi di specie superiore, superficie particolari di $4^0$ e $6^0$ ordine con punti doppi biplanari od uniplanari o con un punto triplo.

---

[30] In generale in $S_n$ il contorno apparente di una varietà qualunque $V_{n-1}$ avrà nella proiezione di un punto doppio di specie $r$ di quella, un punto doppio della stessa specie se $r < n$, un punto triplo se $r = n$.

## Varietà cubiche con infiniti punti doppi.

32. Dal fatto che la retta congiungente due punti doppi di una varietà cubica $\Gamma$ irriduttibile sta su questa segue che $\Gamma$ non può avere una linea doppia, riduttibile o no, la quale appartenga ad uno spazio e sia tale che per ogni punto di quello spazio passi qualcuna delle sue corde. Osserviamo inoltre che la linea doppia di $\Gamma$ non può essere di ordine superiore al $4^0$, poichè una superficie cubica sezione spaziale di $\Gamma$ non può avere punti doppi in numero (finito) $> 4$. E una curva doppia piana di $\Gamma$ non può essere di ordine superiore al $2^0$, poichè una superficie cubica non può avere più di due punti doppi (staccati) su di una retta. Da tutto ciò segue che le sole linee che possono essere doppie per una varietà cubica irriduttibile sono le seguenti: $1.^0$) una retta, $2.^0$) due rette incidenti, $3.^0$) tre rette passanti per uno stesso punto ma non poste nello stesso piano, $4.^0$) una conica, $5.^0$) due coniche non appartenenti allo stesso spazio ma aventi un punto comune, $6.^0$) una quartica razionale normale di $S_4$.

Se poi $\Gamma$ ha una superficie doppia, si vede subito che questa non potrà essere che un piano. Esamineremo ora successivamente questi vari casi.

33. **Varietà cubiche con una retta doppia.** — Detta $\Gamma$ una tal varietà e $d$ la sua retta doppia, $\Gamma$ avrà in ogni punto di $d$ per cono tangente un cono quadrico di $2^a$ specie di sostegno $d$ (v. $n^0$ 28). Tutti questi coni formano un fascio la cui base si compone di quattro piani passanti per $d$: ciascuno di questi è un piano tangente a $\Gamma$ lungo $d$. Vi saranno tre punti di $d$ per ciascuno dei quali il cono quadrico tangente si spezzerà in due spazi contenenti ciascuno una coppia di quei piani, cioè $d$ avrà tre punti bispaziali.

Il sistema delle rette di $\Gamma$ si scinde in questo caso nel sistema di quelle che incontrano $d$, il quale è $(1, 6)$, e in un sistema residuo $(4, 15)$ (poichè lo spazio tangente a $\Gamma$ in un punto qualunque $P$ sega $\Gamma$ in una superficie cubica con un punto doppio su $d$ ed un altro in $P$, sicchè per questo, oltre alla congiungente i due punti doppi, non passano più che quattro rette della superficie cubica, cioè di $\Gamma$).

Il contorno apparente di $\Gamma$ da un suo punto $P$ sarà una *superficie del $4^0$ ordine dotata di una retta doppia e di un piano tangente doppio* (piano contenente, oltre al punto d'intersezione con la retta doppia, altri quattro punti doppi; questa superficie è focale per un sistema di rette (2, 6) avente la retta doppia per retta focale, ed inoltre per un sistema di rette (8, 15).

Il contorno apparente di $\Gamma$ preso da un punto esterno sarà una *superficie del* $6^0$ *ordine con sestica cuspidale e retta doppia*; questa superficie è focale per un sistema di rette (3, 6) avente la retta doppia per retta focale, ed inoltre per un sistema (12, 15).

Entrambi questi contorni apparenti $F^4$ ed $F^6$ hanno sulla retta doppia tre punti cuspidali nelle proiezioni dei tre punti bispaziali di $d$ ($n^0$ 31). Un altro punto singolare di quella retta è proiezione di quel punto di $d$ il cui cono tangente passa per $P$, cioè del punto d'intersezione di $d$ con lo spazio polare di $P$ rispetto a $\Gamma$. Per $F^4$ esso è il punto d'intersezione di $d$ col piano doppio $\mu$, ed è un quarto punto cuspidale della retta doppia. Per $F^6$ esso è un *punto triplo* (*uniplanare*) e cioè l'unico punto comune alla retta doppia ed alla sestica cuspidale: esso è per questa un punto doppio di cui quella retta è una tangente [31]. Se però il centro di proiezione $P$ si prende su uno dei piani tangenti a $\Gamma$ lungo $d$, sicchè stia simultaneamente sui coni tangenti a $\Gamma$ in tutti i punti di questa retta doppia, il contorno apparente che si otterrà sarà una *superficie del* $6^0$ *ordine con sestica cuspidale degenerata in una quartica sghemba di* $2^a$ *specie ed una sua trisecante contata doppiamente, retta che è tripla per la superficie.*

34. La varietà $\Gamma$ con retta doppia $d$ è nel caso più generale di classe 12, ma può diminuire di classe acquistando 1, 2, 3, 4 punti doppi fuori di $d$. Un tal punto doppio è congiunto a $d$ mediante un piano, il quale dovrà evidentemente appartenere a $\Gamma$. Viceversa se $\Gamma$ contiene un piano passante per $d$, su questo piano vi sarà un punto doppio posto fuori di $d$, nel quale si taglieranno le generatrici diverse da $d$ d'intersezione di quel piano con le quadriche costituenti l'intersezione residua di $\Gamma$ e degli spazi passanti pel piano stesso. Ogni piano di $\Gamma$ passante per $d$ è uno dei piani

---

[31] Tutto ciò si vede assai facilmente considerando al solito delle sezioni piane di $\Gamma$ passanti per $P$ e per il punto singolare di cui si tratta, ed inoltre la sestica di $\Gamma$ che dà per proiezione la sestica cuspidale di $F^6$. Così si ottengono pure cose analoghe per varietà cubiche aventi una conica doppia ecc. Ed in generale osserviamo, che per questa via si troverebbero assai facilmente tutte le principali proprietà di certi punti notevoli di linee doppie o cuspidali delle superficie $F^4$ ed $F^6$ studiate in questo lavoro.

comuni ai coni quadrici tangenti a $\Gamma$ nei punti di $d$; il che s'accorda col fatto che non vi possono essere più di quattro piani di $\Gamma$ passanti per $d$.

Nel caso in cui $\Gamma$ ha un punto doppio (fuori di $d$) cioè un piano $\pi$ passante per $d$, le rette di $\Gamma$ formano (trascurando quelle di quel piano) tre sistemi, cioè uno (1, 5) di rette appoggiate a $d$, un altro (1, 5) composto di rette appoggiate a $\pi$ ma non a $d$, ed infine un sistema residuo (3, 10). I due primi sistemi costituiscono rispettivamente i due sistemi di generatrici delle quadriche di $\Gamma$ poste negli spazi passanti per $\pi$.

35. Se $\Gamma$ ha due punti doppi, e quindi due piani $\pi$, $\pi'$ passanti per $d$, essa conterrà ancora un terzo piano $\sigma$, posto nello spazio di $\pi$ e $\pi'$, e passante per quei due punti doppi. Si vede facilmente che dei quattro punti doppi di una varietà cubica, che devono giacere su qualunque piano di questa, pel piano $\sigma$ del caso nostro, due coincideranno nel suo punto d'intersezione con $d$ (punto bispaziale per $\Gamma$).

Le rette di $\Gamma$ formano in questo caso quattro sistemi: un sistema (1, 4) di rette appoggiate a $d$, due altri sistemi (1, 4) composti rispettivamente di rette appoggiate ai piani $\pi$ e $\pi'$ (e non a $d$), ed infine un sistema (2, 6) composto di rette appoggiate a $\sigma$. Si vede anche subito come questi sistemi di rette si distribuiscano nelle quadriche di $\Gamma$ poste negli spazi passanti per $\pi$, $\pi'$ e $\sigma$. Un ragionamento identico a quello già fatto altrove prova che il $2^0$ ed il $3^0$ sistema si possono generare mediante reti proiettive, cioè che le reti degli spazi che proiettano da due rette qualunque dell'un sistema le rette dell'altro (non appoggiate a quelle) sono proiettive.

36. Se $\Gamma$ ha tre punti doppi $D_1, D_2, D_3$, cioè contiene tre piani $\pi_1, \pi_2, \pi_3$ passanti per $d$ (e rispettivamente per $D_1, D_2, D_3$), essa conterrà altri tre piani $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ posti rispettivamente negli spazi $\pi_2\pi_3, \pi_3\pi_1, \pi_1\pi_2$, ed i quali a due a due s'incontrano *soltanto* nei tre punti $D_1, D_2, D_3$. Le rette di $\Gamma$ formano cinque sistemi (1, 3) di cui uno si compone di rette appoggiate a $d$, tre di rette appoggiate rispettivamente a $\pi_1$ e $\sigma_1$, $\pi_2$ e $\sigma_2$, $\pi_3$ e $\sigma_3$, ed infine un quinto di rette appoggiate a $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Sono coniugati fra loro in generazioni con reti proiettive il $1^0$ ed il $5^0$ sistema, ed anche i rimanenti tre combinati a due a due. Si genera sempre una tal varietà $\Gamma$ (cioè il suo $5^0$ sistema di rette) mediante tre reti proiettive tali che quei loro piani i quali passano per la retta $d$ incidente alle 3 rette so-

stegni delle reti siano corrispondenti in queste; perocchè quella retta $d$ e gli altri tre punti (v. la fine della 2ª nota al n⁰ 12) in ciascuno dei quali si tagliano tre piani corrispondenti delle tre reti saranno doppi per la varietà generata da queste: i piani $\pi_1, \pi_2, \pi_3$ saranno allora quei tre piani passanti per $d$, ciascuno dei quali è intersezione di tre spazi corrispondenti delle tre reti.

37. Se finalmente $\Gamma$ ha quattro punti doppi $D_1, D_2, D_3, D_4$ e contiene quattro piani $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ passanti rispettivamente per quelli, essa conterrà altri sei piani $\sigma_{12}, \sigma_{13}, \ldots, \sigma_{34}$, posti rispettivamente negli spazi determinati da quei quattro a due a due $\pi_1 \pi_2, \pi_1 \pi_3, \ldots, \pi_3 \pi_4$. Di più il piano $D_1 D_2 D_3$ incontrando $\pi_4$, come è facile vedere in un punto solo, il quale non sta su $d$, nè su alcuna delle tre rette di $\Gamma$ che congiungono a due a due i punti doppi $D_1, D_2, D_3$, quel piano starà su $\Gamma$, e questo punto dovendo essere doppio per $\Gamma$ (n⁰ 15) sarà precisamente $D_4$. Cosicchè si conclude che se una varietà cubica contiene, oltre una retta doppia, quattro punti doppi, questi staranno in un piano della varietà. Chiameremo $\tau$ il piano dei punti $D_1 D_2 D_3 D_4$: per esso passano tre spazi contenenti rispettivamente i piani $\sigma_{12}$ e $\sigma_{34}$, $\sigma_{13}$ e $\sigma_{42}$, $\sigma_{14}$ e $\sigma_{23}$.

Le rette di $\Gamma$ formano cinque sistemi (1, 2) tutti coniugati fra loro a due a due e di cui uno è composto di rette appoggiate a $d$ ed a $\tau$ e gli altri quattro corrispondono rispettivamente ai piani $\pi_1$, $\pi_2, \pi_3, \pi_4$ in modo che il sistema corrispondente a $\pi_1$ incontra i piani $\pi_1, \sigma_{23}, \sigma_{24}$ e $\sigma_{34}$ e non gli altri piani di $\Gamma$; e analogamente per gli altri tre sistemi.

Nel contorno apparente della varietà cubica con retta doppia, considerato al n⁰ 33 si possono così far comparire 1, 2, 3, 4 nuovi punti doppi e conseguentemente più piani doppi; e risultano immediatamente dalle particolarità viste delle varietà cubiche corrispondenti quelle che così vengono ad acquistare quelle superficie del 4⁰ e 6⁰ ordine, ed in particolare il modo in cui si scinde il sistema delle tangenti doppie. Senza fermarci ad enunciare esplicitamente i risultati che così si ottengono, osserviamo soltanto che per la varietà considerata in questo n⁰, cioè avente quattro punti doppi staccati, il contorno apparente preso da un suo punto è la più generale *Complexfläche* di PLÜCKER relativa al complesso quadratico.

38. **Varietà cubiche con conica doppia.** — Se una varietà cubica $\Gamma$ ha una conica doppia $k^2$, situata in un piano $\pi$, gli spazi passanti per questo determinano su $\Gamma$ una serie di quadriche pas-

santi per $k^2$; lo spazio $T$ tangente a $\Gamma$ in un punto di $\pi$ non situato su $k^2$ taglierà evidentemente $\Gamma$ in una superficie cubica composta del piano $\pi$ contato due volte e di un altro piano $\sigma$, e sarà quindi tangente a $\Gamma$ in tutti i punti di $\pi$. I punti di $k^2$ avranno coni quadrici tangenti di 2ª specie con le tangenti di $k^2$ per sostegni (e le rette di $\Gamma$ uscenti da un tal punto formeranno, oltre al piano $\pi$ contato due volte, un cono quartico); però i due punti d'intersezione di $k^2$ con la retta $\pi\sigma$ saranno punti bispaziali, avendo entrambi per uno spazio tangente lo spazio $T$ già considerato. E quei due punti saranno i soli punti bispaziali di $k^2$; giacchè se un punto di questa conica è bispaziale per $\Gamma$, uno dei due spazi tangenti in esso a questa varietà dovrà passare per $\pi$ e tagliare $\Gamma$ oltre che in questo piano in un cono quadrico avente il vertice in quel punto e passante per $k^2$, cono che perciò si spezza in $\pi$ ed un altro piano passante pel punto stesso, sicchè quello spazio sarà $T$ e quel punto uno dei due punti bispaziali considerati. — Nella serie nominata di quadriche di $\Gamma$ poste negli spazi passanti per $\pi$ vi sono *quattro* coni, in generale non degeneri; poichè il luogo dei poli di $\pi$ rispetto a quelle quadriche si riduce ora ad una conica tangente a $\Gamma$ in un punto del piano $\pi$, e questa conica (che sta sui coni tangenti a $\Gamma$ in tutti i punti di $k^2$, ed in particolare nel piano $\xi$ comune ai due spazi diversi da $T$ tangenti a $\Gamma$ nei due punti bispaziali di $k^2$) taglia ancora $\Gamma$ in 4 punti, vertici di quei coni.

Gli spazi passanti per $\sigma$ determinano su $\Gamma$ un'altra serie di quadriche incontranti $\sigma$ secondo un fascio di coniche che si toccano nei due punti bispaziali di $k^2$, avendo ivi due tangenti comuni che sono congiunte rispettivamente alle rette tangenti nei punti stessi a $k^2$ dai due piani sostegni delle coppie di spazi tangenti a $\Gamma$ in quei punti.

Il luogo dei poli di $\sigma$ rispetto a questa serie di quadriche è ancora una conica, la quale sta evidentemente anch'essa nel piano $\xi$, e tocca $\Gamma$ nel punto in cui questo piano incontra $\sigma$, mentre taglia $\Gamma$ nel punto d'incontro di $\xi$ con $\pi$ e quindi ancora in altri 3 punti, vertici dei tre coni, in generale non degeneri, che fan parte della serie di quadriche.

Dal fatto che i due punti bispaziali della retta $\pi\sigma$ hanno comune lo spazio tangente $T$ segue che i punti di quella retta hanno tutti le loro prime polari rispetto a $\Gamma$ composte di $T$ e di un altro spazio variabile passante per $\xi$. Quindi la varietà cubica $\Gamma$ dotata di conica doppia gode della proprietà di essere trasformata in se stessa da $\infty^1$ omologie armoniche, i cui centri e spazi direttori sono i punti di una retta $\pi\sigma$ e gli spazi di un fascio di sostegno $\xi$ (punteggiata e fascio in posizione involutoria); e per conseguenza anche da una omografia involutoria avente per asse la retta $\pi\sigma$ e per piano direttore $\xi$.

Le rette di $\Gamma$ formano due sistemi che costituiscono rispettivamente le generatrici delle due serie di quadriche nominate. L'uno di essi $(2, 8)$ è tutto composto di rette appoggiate a $k^2$ (e non a $\sigma$), l'altro $(2, 6)$ di rette appoggiate a $\sigma$ (e non a $\pi$).

39. La varietà cubica dotata di conica doppia è in generale di $8^a$ classe; ma può ridursi alla $6^a$ od alla $4^a$, acquistando 1 o 2 nuovi punti doppi. Se $\Gamma$ ha un punto doppio $D$ fuori di $k^2$, questo non potrà stare su $\pi$, nè su $\sigma$, e gli spazi che lo congiungono a questi piani segheranno ancora $\Gamma$ secondo coni quadrici uscenti da $D$, che costituiscono (contando il $1^0$ doppiamente) il cono sestico delle rette di $\Gamma$ uscenti da $D$.

Se $\Gamma$ ha due punti doppi $D, D'$, la loro congiungente essendo una retta di $\Gamma$ deve incontrare o $\pi$ o $\sigma$; però il $1^0$ caso non può verificarsi, altrimenti lo spazio congiungente quella retta a $\pi$ taglierebbe ancora $\Gamma$ secondo una coppia di piani passanti per $D$ e $D'$, la quale non potrebbe contenere $k^2$. Dunque la retta $DD'$ incontra $\sigma$ in un punto (non posto su $\pi$), e lo spazio che la congiunge a $\sigma$ taglierà ancora $\Gamma$ secondo una coppia di piani $\tau, \tau_1$, incontranti $\pi$ rispettivamente nei due punti bispaziali di $k^2$. Gli spazi passanti per $\tau$ incontrano $\Gamma$ secondo quadriche aventi un punto doppio nel punto d'intersezione variabile degli spazi stessi con $k^2$, vale a dire secondo coni; e lo stesso dicasi degli spazi passanti per $\tau_1$. Quindi per ogni punto di $k^2$ il cono quartico di rette di $\Gamma$ uscente da esso si scinde in due coni quadrici.

Il sistema delle rette di $\Gamma$ comprende in questo caso due sistemi $(1, 4)$ generabili con reti proiettive di spazi e tra loro coniugati, l'uno dei quali si compone di rette appoggiate a $k^2$ e a $\tau$, l'altro di rette appoggiate a $k^2$ e a $\tau_1$; vi è inoltre su $\Gamma$ un sistema $(2, 4)$ composto di rette appoggiate soltanto a $\sigma$. I primi due sistemi si compongono degli infiniti coni quadrici già considerati uscenti dai punti di $k^2$.

40. Il contorno apparente di una varietà cubica $\Gamma$ con conica doppia $k^2$ rispetto ad un suo punto è in generale una *superficie del* $4^0$ *ordine avente una conica doppia ed inoltre una coppia di punti doppi per la quale passa una coppia di piani doppi*; mentre prendendo il

centro di proiezione fuori di $\Gamma$ si ha in generale una *superficie del $6^0$ ordine con sestica cuspidale e conica doppia passanti entrambe per due punti tripli della superficie stessa.* Proiettando invece da un punto della conica già considerata al $n^0$ 38 comune ai coni $M^2$ tangenti a $\Gamma$ nei punti di $k^2$ si ha per contorno apparente di $\Gamma$ una *superficie del $6^0$ ordine dotata di una conica tripla ed una conica cuspidale aventi comuni due punti e delle quali la prima può pure considerarsi come cuspidale.* Ma se oltre a ciò il centro di proiezione sta su $\Gamma$, si ottiene una *superficie del $4^0$ ordine a conica cuspidale.* Dalle proposizioni del $n^0$ 38 seguirebbero subito varie proposizioni su tutte queste superficie (relative alle quadriche che le inviluppano, a certe loro trasformazioni collineari involutorie in se stesse, ecc.); ma non ci fermiamo ad enunciarle.

41. **Varietà cubiche con due rette doppie incidenti.** — Sono casi particolari delle varietà cubiche con conica doppia: la conica è ora degenerata in una coppia di rette. Una tal varietà $\Gamma$ è ancora in generale di $8^a$ classe. Dette $k_1, k_2$ le due rette doppie e $\pi$ il loro piano, lo spazio tangente a $\Gamma$ lungo questo la taglia ancora in un piano $\sigma$; i punti d'intersezione di questo con $k_1$ e $k_2$ sono due punti bispaziali aventi uno spazio tangente comune nello spazio $\pi\sigma$, mentre il punto $k_1k_2$, pure bispaziale, ha per spazi tangenti altri due spazi passanti per $\pi$. Questi determinano su $\Gamma$ due coni quadrici passanti entrambi per le due rette $k_1, k_2$.

Il sistema delle rette di $\Gamma$ si scinde in due sistemi (1, 4) di rette appoggiate rispettivamente a $k_1$ e $k_2$ ed un sistema (2, 6) di rette appoggiate a $\sigma$.

Se $\Gamma$ ha un punto doppio $D$ (fuori dello spazio $\pi\sigma$), essa conterrà i due piani $Dk_1, Dk_2$ e le rette di $\Gamma$ formeranno due sistemi (1, 3) di rette appoggiate rispettivamente a $k_1$ e $k_2$ ed altri due sistemi (1, 3) appoggiati entrambi a $\sigma$, ma di cui l'uno s'appoggia inoltre al piano $Dk_1$, l'altro al piano $Dk_2$. Sono coniugati fra loro in generazioni con reti proiettive il $1^0$ ed il $4^0$ sistema, il $2^0$ ed il $3^0$, il $3^0$ ed il $4^0$.

Se poi $\Gamma$ ha i due punti doppi $D, D'$ essa conterrà i piani $Dk_1, Dk_2, D'k_1, D'k_2$ e la retta $DD'$ starà col piano $\sigma$ in uno spazio il quale taglierà ancora $\Gamma$ in una coppia di piani $\tau_1, \tau_2$ passanti rispettivamente pei due punti $\sigma k_2, \sigma k_1$. Le rette di $\Gamma$ formano allora quattro sistemi (1, 2) tutti coniugati fra loro a due a due ed appoggiati uno a $k_1$ e $\tau_1$, un $2^0$ a $k_2$ e $\tau_2$, un $3^0$ a $Dk_1, D'k_2$ e $\sigma$, e il $4^0$ a $Dk_2, D'k_1$ e $\sigma$.

42. **Varietà cubiche con tre rette doppie passanti per uno stesso punto.** — Dette $k_1, k_2, k_3$ le tre rette doppie di una tal varietà $\Gamma$, i piani $\pi_1, \pi_2, \pi_3$ che le congiungono a due a due staranno pure su $\Gamma$ e lungo essi questa varietà sarà toccata da tre spazi che la segheranno rispettivamente in tre nuovi piani $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Il punto di $\Gamma$ comune a $k_1, k_2, k_3$ sarà unispaziale ed avrà lo spazio di quelle tre rette per spazio tangente; inoltre su $k_1$ vi sarà un punto bispaziale per cui passeranno $\sigma_2$ e $\sigma_3$, ed analogamente vi saranno i punti bispaziali $k_2 \sigma_3 \sigma_1$ e $k_3 \sigma_1 \sigma_2$. Le rette di $\Gamma$ formano tre sistemi (1, 2) a due a due coniugati ed appoggiati rispettivamente a $k_1$ e $\sigma_1$, $k_2$ e $\sigma_2$, $k_3$ e $\sigma_3$.

Il contorno apparente di questa varietà rispetto ad un suo punto è la *superficie di* STEINER *di* $4^0$ *ordine e* $3^a$ *classe con tre rette doppie ed un punto triplo.* Rispetto ad un punto esterno il contorno apparente è invece una *superficie di* $6^0$ *ordine e* $3^a$ *classe con sestica cuspidale e tre rette doppie concorrenti in un punto triplo ed appoggiate a quella sestica in altri tre punti tripli della superficie*; avendo questa tre piani tangenti lungo coniche (proiezioni dei piani $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$), essa sarà la duale della superficie cubica con tre punti conici ([32]).

43. **Varietà cubiche con quartica doppia.** — La varietà cubica $\Gamma$ avente per curva doppia una quartica razionale normale $C^4$ non è altro che il luogo delle *corde* di $C^4$. Considerando la superficie cubica con 4 punti doppi sezione di $\Gamma$ con uno spazio qualunque si scorge che oltre al sistema (1, 6), di quelle corde, vi è su $\Gamma$ un altro sistema di rette (2, 3) che diremo *assi*. Lo spazio tangente a $\Gamma$ in un suo punto sega $\Gamma$ in una rigata cubica avente per direttrice doppia la corda uscente da quel punto e per generatrici le coppie di assi uscenti dai varî punti di quella corda (cfr. n$^0$ 4). Gli spazi tangenti a $\Gamma$ formano dunque solo una $\infty^2$, essendo ciascuno di essi tangente lungo tutta una corda. Le corde appoggiate ad un asse formano pure una rigata cubica, ma non più situata in uno spazio; esse punteggiano $C^4$ in coppie di un'involuzione. Viceversa, ogni involuzione (quadratica) di punti di $C^4$ dà come luogo delle corde contenenti le sue coppie una rigata cubica normale avente per direttrice (*asse* dell'involuzione) un asse di $C^4$; dunque il sistema degli assi di $C^4$ non è altro che il sistema degli assi delle involuzioni che si possono immaginare su $C^4$.

---

([32]) Cfr. CAYLEY: *A Memoir on Cubic Surfaces*, Phil. Trans., 159, p. 231, n.$^i$ 122 e segg.

Ciascuna di queste involuzioni appartiene ad una determinata omografia involutoria di $S_4$, la quale muta $C^4$ in se stessa ed ha per *asse* l'asse di $\Gamma$ corrispondente e per *piano direttore* il piano polare di quell'asse rispetto a quella varietà quadratica $M_3^2$ che, per un noto teorema di CLIFFORD, passa per $C^4$ ed è tangente in ogni punto di questa al rispettivo spazio osculatore. Siccome la $\infty^2$ degli spazi tangenti a $\Gamma$, che si verifica facilmente essere della $4^a$ classe, si compone degli spazi congiungenti a coppie le tangenti di $C^4$, sicchè comprende in particolare lo spazio osculatore di $C^4$ in un suo punto qualunque (spazio che toccherà $\Gamma$ lungo la tangente a $C^4$ in quel punto), così si ottiene come polare rispetto ad $M_3^2$ una superficie omaloide del $4^0$ ordine $F_2^4$ (i cui spazi tangenti corrispondono ai punti di $\Gamma$), luogo dei punti d'incontro dei piani osculatori di $C^4$, passante per $C^4$ ed avente questi piani per piani tangenti nei punti di questa curva. I piani direttori sono i piani delle $\infty^2$ coniche di questa superficie, mentre i piani d'intersezione di spazi osculatori di $C^4$ (cioè polari rispetto ad $M_3^2$ delle corde di $C^4$) ne sono i piani tangenti. Risulta ancora dalla polarità rispetto ad $M_3^2$ che per ogni punto passano tre piani direttori concorrenti in una retta e che per ogni piano passano tre spazi tangenti ad $F_2^4$, ciascuno dei quali contiene due piani direttori.

44. Il sistema delle corde di $\Gamma$ gode della proprietà che proiettandolo da due qualunque di esse si hanno due reti proiettive di spazi; ne segue che $\Gamma$ è generabile con tre reti proiettive, ma che in tal generazione si ha la particolarità che i due sistemi di rette coniugati coincidono.

La varietà cubica $\Gamma$ si può considerare come una sezione spaziale qualunque di quella varietà $M_4^3$ dello spazio a 5 dimensioni che è luogo delle corde della superficie omaloide di $4^0$ ordine normale per questo spazio e che, rappresentando linearmente la serie delle coppie di rette di un piano (considerate come coniche degeneri), si può definire analiticamente con un determinante cubico simmetrico uguagliato a zero. Da ciò si possono trarre alcune delle precedenti proprietà di $\Gamma$. Inoltre, siccome una varietà cubica di $S_4$ generabile con reti proiettive e tale che le due generazioni coniugate coincidano si può rappresentare, come facilmente si vede, con un determinante cubico simmetrico (i cui sei elementi sono legati da un'equazione lineare), ed è perciò una sezione spaziale della suddetta $M_4^3$ di $S_5$, così si conclude che *la sola varietà cubica generabile con reti proiettive sì che le due generazioni coniugate coincidano, vale a* *dire il solo sistema* $\infty^2$ *di rette, tale che da due qualunque di esse le altre si proiettino mediante reti proiettive, è la varietà od il sistema delle corde di una quartica.*

Proiettando da un punto $P$ esterno a $\Gamma$ si ha dalla $C^4$ una quartica razionale $\gamma^4$ appartenente allo spazio ordinario $R$ e, come contorno apparente di $\Gamma$, la *superficie sviluppabile di* $4^a$ *classe e* $6^0$ *ordine* inviluppata dai piani bitangenti di quella quartica. *Tutte le proprietà note e molte nuove della quartica razionale dello spazio ordinario si otterrebbero assai semplicemente per questa via.* Le bitangenti (propriamente dette) di quella sviluppabile, essendo proiezioni del sistema degli assi di $\Gamma$, sono gli assi delle involuzioni di punti della quartica $\gamma^4$.

In ciascuna di queste involuzioni ogni coppia è separata armonicamente dall'asse e da un certo piano *direttore*; gli $\infty^1$ piani direttori che così si ottengono e dei quali ognuno appartiene a due diverse involuzioni inviluppano una *superficie di* STEINER di $4^0$ ordine e $3^a$ classe avente $\gamma^4$ per curva asintotica (per le proprietà viste al n$^0$ precedente della superficie $F^4$ di cui quella è proiezione). Le tre omografie involutorie di $S_4$ i cui piani direttori passano per $P$ dànno in $R$ tre involuzioni assiali che mutano $\gamma^4$ in se stessa: le tre rette doppie di quella superficie di STEINER sono direttrici per queste involuzioni. Ecc. ecc. Ci limitiamo a questo accenno sul metodo che qui ci si presentò per studiare le quartiche di $2^a$ specie dello spazio ordinario, perchè esso non sembra offrire veruna difficoltà; se il punto $P$ si prende su $\Gamma$ si ottengono le quartiche con punto doppio e le loro sviluppabili bitangenti.

45. **Varietà cubiche con due coniche doppie.** — Si possono considerare come casi particolari della varietà studiata nei due n$^i$ precedenti; qui la curva $C^4$ si scinde nelle due coniche doppie, le quali avranno un punto comune ma non staranno in uno stesso spazio. La varietà $\Gamma$ si comporrà ora delle rette che si appoggiano a quelle due coniche; essa contiene i piani di queste, ha in ogni punto di ciascuna di esse per $M_3^2$ tangente un cono di $2^a$ specie avente la tangente nel punto stesso per sostegno, ma nel punto $D$ comune alle due coniche ha un punto bispaziale i cui due spazi tangenti sono tangenti a $\Gamma$ lungo i piani delle due coniche e si segano nel piano delle tangenti in $D$ a queste, piano che evidentemente apparterrà pure a $\Gamma$. Questa varietà contiene un secondo sistema (2, 3) di rette appoggiate appunto a questo piano e ciascuna delle quali è direttrice di una rigata cubica normale le cui generatrici, rette

del $1^0$ sistema di $\Gamma$, punteggiano le due coniche proiettivamente col punto unito $D$; le $\infty^2$ rette di quel $2^0$ sistema corrispondono così alle $\infty^2$ proiettività col punto unito $D$ tra le due coniche. Gli spazi tangenti a $\Gamma$ la toccano ancora lungo rette del $1^0$ sistema e formano quindi una $\infty^2$ che è ancora della $4^a$ classe. Ecc. ecc.

46. **Varietà cubiche con rette doppie di $2^a$ specie.** — Intendiamo per linea doppia *di specie* $r$ di una varietà una linea di cui ogni punto sia doppio di specie $r+1$ per la varietà stessa. Ora, cominciando dal caso della retta doppia $d$ di una varietà cubica $\Gamma$, osserviamo che le $M_3^2$ tangenti a $\Gamma$ nei punti di $d$ devono formare un fascio (proiettivo alla punteggiata $d$), e che d'altra parte vi sono due sorta di fasci di coppie di spazi, cioè una in cui il piano sostegno delle coppie è fisso e queste sono coppie di un'involuzione in un fascio di spazi, ed un'altra in cui tutte le coppie di spazi hanno uno spazio comune fisso, mentre il rimanente descrive un fascio ([33]); corrispondentemente a ciò avremo due casi in cui $d$ è *retta doppia di* $2^a$ *specie* per $\Gamma$. — Se $d$ fosse retta doppia di $3^a$ specie, allora non essendovi il fascio di spazi doppi, dovrebbero tutti i punti di $d$ avere la $M_3^2$ tangente ridotta ad uno stesso spazio doppio, ma vi sarebbe su $d$ un punto per cui quella $M_3^2$ diventerebbe indeterminata (per la corrispondenza proiettiva suddetta tra la punteggiata $d$ ed il fascio di $M_3^2$), cioè un punto triplo per $\Gamma$; questa varietà sarebbe quindi un cono proiettante un'ordinaria superficie cubica dotata di un punto uniplanare.

Nel caso in cui $d$ è retta doppia di $2^a$ specie tale che le coppie di spazi tangenti a $\Gamma$ nei suoi punti formano un'involuzione nel fascio di spazi avente per sostegno un certo piano $\pi$ passante per $d$, vi saranno su questa retta due punti unispaziali aventi per spazi tangenti i due spazi doppi di quell'involuzione. Si vede facilmente che in questo caso $\Gamma$ è di $6^a$ classe. Il piano $\pi$ la tocca lungo $d$ e su ogni spazio passante per esso l'intersezione con $\Gamma$ è un cono cubico col vertice nel punto di $d$ per cui quello è uno spazio tangente e con la retta $d$ per generatrice cuspidale lungo cui il cono

---

([33]) Cfr. le mie *Ricerche sui fasci di coni quadrici in uno spazio lineare qualunque,* Atti Acc. Torino, XIX [V. queste « Opere », III, pp. 485-501]. La classificazione ivi studiata dei fasci di coni quadrici condurrebbe analogamente a distinguere varie sorta di rette doppie di data specie per varietà cubiche ad $n-1$ dimensioni di $S_n$, a seconda cioè della natura del fascio dei coni tangenti nei punti di una retta doppia.

medesimo è toccato da $\pi$. Le rette di $\Gamma$ formano un sistema (1, 6) appoggiato a $d$ ed un altro sistema (3, 9). Può $\Gamma$ presentare la particolarità di contenere il piano $\pi$. Un caso più particolare ancora si avrebbe se $\Gamma$ avesse fuori di $d$ un nuovo punto doppio $A$, poichè allora il piano $Ad$ dovendo appartenere a $\Gamma$ sarebbe precisamente il piano $\pi$; ma allora in uno spazio qualunque per $\pi$ il cono cubico d'intersezione con $\Gamma$ dovrebbe scindersi in quel piano ed un cono quadrico tangente a $\pi$ lungo $d$ e passante inoltre per $A$, cono quadrico che perciò dovrebbe ancora comporsi di $\pi$ ed un altro piano; dunque $\pi$ sarebbe allora un *piano doppio* per $\Gamma$, caso che considereremo più tardi.

Il contorno apparente di $\Gamma$ da un suo punto è ora una *superficie del* $4^0$ *ordine (e* $6^a$ *classe) con due punti tripli congiunti da una retta cuspidale dotata di un piano tangente fisso* (proiezione di $\pi$), *superficie avente inoltre un piano tangente lungo una conica e su questa tre punti doppi all'infuori del punto che essa ha comune con la retta cuspidale.* Il contorno apparente rispetto ad un punto esterno $P$ è invece in generale una *superficie di* $6^0$ *ordine e* $6^a$ *classe avente per linee cuspidali una sestica ed una retta con un punto comune; questo ed altri due punti della retta cuspidale sono tripli per la superficie, la quale è toccata lungo quella retta da un piano fisso, che la taglia ancora in tre rette concorrenti nel primo punto triplo (uniplanare).* Ma se $P$ si prende su $\pi$, la sua $M_3^2$ polare rispetto a $\Gamma$ diventa un cono di $2^a$ specie avente per sostegno $d$ (poichè ogni piano che passi per $P$ e per un punto $D$ di $d$ sega $\Gamma$ secondo una cubica avente in $D$ una cuspide con la tangente $DP$ e quindi la conica polare di $P$ rispetto a quella cubica, cioè l'intersezione di quel piano con la $M_3^2$ suddetta, si scinde in due rette passanti per $D$), mentre il suo spazio polare passa per $d$. Da ciò e da altre semplici considerazioni si trae che allora il contorno apparente di $\Gamma$ diventa una *superficie rigata di* $6^0$ *ordine avente una retta quadrupla direttrice* d *e due generatrici cuspidali; per ogni punto di quella direttrice* d *escono due coppie di generatrici situate rispettivamente in due piani passanti per* d; *così le coppie di piani (bitangenti) corrispondenti ai vari punti di* d *formano un'involuzione, ecc. ecc.*

47. Passiamo ora al caso in cui una varietà cubica $\Gamma$ ha la retta doppia di $2^a$ specie $d$ tale che in tutti i suoi punti uno spazio tangente è fisso, e sia $T$, mentre gli altri formano un fascio avente per sostegno un certo piano $\pi$ passante per $d$. Uno qualunque di questi spazi passanti per $\pi$ sega $\Gamma$ in un cono cubico che ha $d$ per

generatrice doppia lungo cui sono tangenti il piano $\pi$ e quello in cui lo spazio considerato sega $T$; non è dunque più $d$ una generatrice cuspidale, tranne quando $\pi$ cade in $T$. La varietà è segata da $T$ secondo una superficie cubica che ha $d$ per retta tripla, vale a dire secondo tre piani $\pi_1\,\pi_2\,\pi_3$ passanti per $d$. Le rette di $\Gamma$ formano quindi quattro sistemi (1, 3), di cui uno appoggiato a $d$ e gli altri tre mutuamente coniugati in generazioni con reti proiettive ed appoggiati rispettivamente a $\pi_1$, $\pi_2$, $\pi_3$. In ogni spazio passante per $\pi_i$ l'intersezione con $\Gamma$ si compone ancora di una quadrica passante per $d$ e tangente al piano $\pi_i$ in un punto fisso, che è quel punto $P_i$ di $d$ che ha per spazio tangente (oltre a $T$) lo spazio $\pi_i$. In questo caso $\Gamma$ è ancora di 6ª classe.

Si ottengono dei casi più particolari supponendo che questa varietà acquisti un punto doppio $A$ fuori di $d$; siccome il piano $Ad$ dovrà appartenere a $\Gamma$ e quindi alle $M_3^2$ (coppie di spazi) che la toccano nei punti di $d$, così esso dovrà, o, $a$) coincidere con due dei tre piani $\pi_1$, $\pi_2$, $\pi_3$; oppure, $b$) coincidere con $\pi$.

Cominciando dall'ipotesi $a$) in cui ad esempio $\pi_1$ e $\pi_3$ coincidano col piano $Ad$, su ogni spazio passante per questo la quadrica d'intersezione con $\Gamma$ dovrà passare per la retta fissa $d'$ che congiunge $P_1$ ad $A$, e però non solo quest'ultimo punto, ma tutta quella retta sarà doppia per $\Gamma$; e si ha allora il caso più generale di una *varietà cubica $\Gamma$ con due rette doppie, l'una* d *di 2ª e l'altra* d′ *di 1ª specie*. Questa varietà è ancora di 6ª classe. Fra i punti di $d'$ solo quello $P_1$ che essa ha comune con $d$ è bispaziale. Le rette di $\Gamma$ formano ora tre sistemi (1, 3) di cui uno appoggiato a $d$, un altro appoggiato a $d'$ (e nel quale coincidono ora i due che si appoggiavano rispettivamente a $\pi_1$ e $\pi_3$) ed uno appoggiato a $\pi_2$ e coniugato al secondo.

Nell'ipotesi $b$) si ha una *varietà cubica $\Gamma$ (di 4ª classe)* con *una retta doppia* d *di 2ª specie e con un punto doppio*. $\Gamma$ contiene allora, oltre a $\pi_1$, $\pi_2$, $\pi_3$ ed al piano $\pi$ che congiunge $d$ ad $A$, altri tre piani $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\sigma_3$ passanti per $A$ e situati negli spazi che congiungono $\pi$ rispettivamente a $\pi_1$, $\pi_2$, $\pi_3$. Le sue rette formano quattro sistemi (1, 2) tutti mutuamente coniugati e di cui uno s'appoggia a $d$ e gli altri rispettivamente ai piani $\pi_1\,\sigma_2\,\sigma_3$, $\pi_2\,\sigma_3\,\sigma_1$, $\pi_3\,\sigma_1\,\sigma_2$.

Un caso particolare di $a$) si presenta quando anche la retta $d'$ che ivi compare è doppia di 2ª specie, sicchè si ha una *varietà cubica con due rette doppie di 2ª specie*; ma questo caso sarà esaminato in seguito (n⁰ 51). Per ora osserviamo invece che esiste una varietà cubica che è in pari tempo caso particolare di $a$) e $b$), cioè una *varietà cubica $\Gamma$ (di 4ª classe) con una retta doppia* d *di 2ª specie, una* d' *di* 1ª *specie ed un punto doppio* $A$. Essa contiene i piani $\pi$ di $A$ e $d$, $\pi_1$ di $d$ e $d'$, $\sigma_1$ di $A$ e $d'$, $\pi_2$ d'intersezione di $\Gamma$ con lo spazio che la tocca lungo $\pi_1$, e $\sigma_2$ d'intersezione residua di $\Gamma$ con lo spazio $\pi\pi_2$. Le sue rette formano tre sistemi (1, 2) mutuamente coniugati ed appoggiati rispettivamente a $d$, a $d'$ e $\sigma_2$, a $\pi_2$ e $\sigma_1$.

In tutti i casi del presente n⁰ essendo il piano d'intersezione dei due spazi tangenti a $\Gamma$ in un punto di $d$ variabile con questo punto, accadrà pure che in qualunque contorno apparente di $\Gamma$ la proiezione di $d$ sarà una *retta cuspidale avente in ciascun punto un piano tangente variabile.* Come contorno apparente preso da un suo punto, $\Gamma$ darà in generale una *superficie di* 4⁰ *ordine (e* 6ª *classe) avente una retta cuspidale e tre punti conici situati in un piano doppio, superficie che è focale per quattro sistemi* (2, 3) *l'uno dei quali appoggiato alla retta cuspidale.* I tre casi particolari considerati di $\Gamma$ daranno: a) *una superficie di* 4⁰ *ordine (e* 6ª *classe) con una retta cuspidale, una retta doppia e un punto conico;* b) *una superficie di* 4⁰ *ordine (e* 4ª *classe) con una retta cuspidale e quattro punti conici* (cioè la *Complexfläche* di Plücker relativa ad un complesso quadratico e ad una retta di questo); c) una *superficie di* 4⁰ *ordine (e* 4ª *classe) con una retta cuspidale, una retta doppia e due punti conici.*

Il contorno apparente di $\Gamma$ da un punto esterno è invece in generale una *superficie di* 6⁰ *ordine (e* 6ª *classe) avente per linee cuspidali una sestica ed una retta e per punto triplo il punto comune a queste, superficie che è focale per quattro sistemi* (3, 3) *l'uno dei quali appoggiato alla retta cuspidale.* Questa superficie presenta un caso particolare *a*) in cui essa acquista una retta doppia incontrante la sestica in un nuovo punto triplo della superficie, uno *b*) in cui essa (abbassandosi alla 4ª classe) acquista invece un punto conico ed infine uno *c*) in cui si verificano entrambe quelle particolarità. Ma se il punto esterno a $\Gamma$ dal quale questa vien proiettata si prende su $\pi$ si ottiene in generale una *superficie rigata di* 6⁰ *ordine avente tre generatrici cuspidali ed una retta direttrice tripla per ciascun punto della quale passano tre generatrici situate in un piano con essa; questa superficie è focale per tre sistemi di rette* (3, 3) *(non appoggiati alla retta tripla).*

48. La retta doppia di 2ª specie $d$ di una varietà cubica $\Gamma$ può presentare simultaneamente i due casi considerati ai nⁱ 46, 47, e ciò quando uno dei due spazi che toccano $\Gamma$ in ogni punto di $d$ sia uno spazio fisso $T$, mentre l'altro rota intorno ad un piano fisso $\pi$ di $T$. Allora $T$ sega $\Gamma$ secondo tre piani $\pi_1\pi_2\pi_3$, e vi è su $d$ un punto unispaziale avente $T$ per unico spazio tangente. Le rette

di $\Gamma$ formano ancora come nel caso più generale del n$^0$ 47 quattro sistemi (1, 3) di cui uno appoggiato a $d$ e gli altri tre mutuamente coniugati ed appoggiati rispettivamente a $\pi_1$, $\pi_2$ e $\pi_3$. La classe di $\Gamma$ è ancora 6.

Può presentarsi il caso particolare che $\pi$ stia su $\Gamma$ e coincida quindi con uno dei piani $\pi_1 \pi_2 \pi_3$; però se ciò accadesse pel fatto che in $\pi$ vi fosse, fuori di $d$, un punto doppio di $\Gamma$, questa varietà avrebbe $\pi$ per piano doppio (v. n$^0$ 46). Se invece $\Gamma$ ha un punto doppio fuori di $\pi$, la retta che lo congiunge al punto unispaziale di $d$ sarà per $\Gamma$ retta doppia (di 1$^a$ specie in generale, ma di 2$^a$ specie in un caso particolare che s'incontrerà più tardi); questa varietà si riduce allora alla 5$^a$ classe.

I contorni apparenti di $\Gamma$ hanno ora nella proiezione di $d$ una *retta cuspidale con piano tangente fisso e con un punto triplo* (nella proiezione del punto unispaziale di $d$), pel quale in un caso particolare passa un'altra retta doppia; ma non ci fermiamo ad enunciare le proprietà corrispondenti ai varî casi.

**49. Varietà cubiche dotate di conica doppia di 2$^a$ specie.** — Se $\Gamma$ è una varietà cubica avente la conica $k^2$ doppia, sicchè il piano $\pi$ di quella conica sta su $\Gamma$ e lungo esso questa varietà è toccata da uno spazio fisso $T$ (n$^0$ 38), risulta da ciò che si vide al n$^0$ citato riguardo ai punti bispaziali di $k^2$ che affinchè questa conica sia doppia di 2$^a$ o 3$^a$ specie lo spazio $T$ dovrà tagliare $\Gamma$ (non più in $\pi$ contato due volte ed un altro piano, ma solo) secondo il piano $\pi$ contato tre volte. Viceversa se questa condizione si verifica, è chiaro che $k^2$ sarà doppia di 2$^a$ specie per $\Gamma$ e che nei suoi varî punti sarà lo spazio fisso $T$ uno dei due spazi tangenti a $\Gamma$. Da una proposizione vista alla fine del n$^0$ 30 segue che se un punto di $k^2$ fosse unispaziale, il piano $\pi$ sarebbe doppio per $\Gamma$; quindi se $k^2$ è doppia di 2$^a$ (e non 3$^a$) specie per $\Gamma$, nessun suo punto sarà unispaziale. Una varietà cubica non può avere una conica doppia di 3$^a$ specie se non quando abbia un piano doppio. Vedremo poi, studiando la varietà cubica con piano doppio, che essa ha effettivamente una conica doppia di 3$^a$ specie; per ora limitiamoci al caso della conica doppia di 2$^a$ specie.

Dal fatto che $T$ sega $\Gamma$ secondo $\pi$ contato tre volte segue che le $M_3^2$ polari rispetto a $\Gamma$ dei varî punti di $\pi$ si scindono tutte nello spazio fisso $T$ ed in un altro spazio variabile; stante la corrispondenza proiettiva fra i punti di $\pi$ e le loro $M_3^2$ polari, quello spazio variabile descrive una rete che è in corrispondenza proiettiva (involutoria) con $\pi$. Evidentemente $\Gamma$ è omologica-armonica rispetto a qualunque punto di $\pi$ ed allo spazio corrispondente di quella rete; chiamando $p$ la retta che è sostegno di questa, ne segue pure che $\Gamma$ corrisponde a se stessa nell'omografia involutoria che ha $\pi$ e $p$ per *direttrici*. Passano per $p$ in particolare gli spazi diversi da $T$ i quali toccano $\Gamma$ nei punti di $k^2$: essi inviluppano il cono quadrico di 2ª specie che proietta $k^2$ da $p$; la corrispondenza proiettiva considerata fra i punti di $\pi$ e gli spazi per $p$ può considerarsi come una polarità rispetto a quel cono quadrico. La retta $p$ sega $\Gamma$ in tre punti, vertici dei tre coni quadrici appartenenti alla serie di quadriche secondo cui $\Gamma$ è segata dagli spazi passanti per $\pi$; i due sistemi di generatrici di queste quadriche formano un sistema (2, 6) che costituisce tutto l'insieme delle rette di $\Gamma$.

Le $\infty^2$ omologie armoniche nominate che trasformano $\Gamma$ in se stessa trasformano un punto qualunque $A$ di $S_4$ nei varî punti di una quadrica situata in uno spazio passante per $\pi$ e generata dalle due stelle reciproche di cui l'una proietta da $A$ il sistema piano (punteggiato) $\pi$ e l'altra proietta dal punto $A'$ che è separato armonicamente da $A$ mediante $\pi$ e $p$ il sistema (rigato) secondo cui $\pi$ sega la rete considerata $p$ di spazi; risulta anche da questa considerazione che le infinite quadriche in cui vengono così a distribuirsi i punti di $S_4$, ciascuna delle quali è trasformata in se stessa dalle $\infty^2$ omologie armoniche, passano per $k^2$ e sono toccate lungo questa conica dagli $\infty^1$ spazi già considerati inviluppanti il cono che proietta $k^2$ da $p$. Il cono (a tre dimensioni) del $6^0$ ordine circoscritto a $\Gamma$ da un punto qualunque di $p$ si scinderà, dietro quanto s'è detto, in tre coni quadrici segati da uno spazio passante per $\pi$ secondo tre quadriche siffatte. Pel cono circoscritto a $\Gamma$ da un punto $P$ posto fuori di $p$ ciò non accade più; però, siccome il punto $P$ è doppio per quelle $\infty^1$ tra le omologie armoniche considerate i cui spazi d'omologia passano pel piano $Pp$ ed i cui centri costituiscono quindi una certa retta $m$ di $\pi$, e queste $\infty^1$ omologie trasformano un punto qualunque di $S_4$ nei punti di una conica passante pei due punti d'incontro di $m$ con $k^2$ e tangente in questi punti ai corrispondenti spazi per $Pp$ (come si vede in modo analogo a quello usato per le quadriche cui dànno luogo tutte le $\infty^2$ omologie armoniche), così il cono (a tre dimensioni) circoscritto da $P$ a $\Gamma$ sarà trasformato in se stesso da quelle $\infty^1$ omologie armoniche, mentre il cono (a 2 dimensioni) di $6^0$ ordine costituito dalle tangenti tripunte di $\Gamma$ passanti per $P$ si scinderà in tre coni quadrici ordinari passanti pei due punti nominati di $k^2$ e tangenti in questi ai due spazi suddetti.

La varietà $\Gamma$ è in generale di $6^a$ classe, ma si riduce alla $4^a$ quando acquista un punto doppio fuori di $k^2$: allora due dei tre coni quadrici di $\Gamma$ coincidono in quello che proietta $k^2$ da quel punto doppio.

50. Come contorno apparente della varietà cubica $\Gamma$ dotata di conica doppia di $2^a$ specie rispetto ad un punto di $\Gamma$ si ottiene la *superficie del* $4^0$ *ordine (e* $6^a$ *classe) dotata di conica cuspidale*; e si ritrovano immediatamente per questa via tutte le principali proprietà di questa superficie, come i due punti singolari della conica cuspidale, la serie d'indice 2 di quadriche passanti per questa conica ed inviluppanti la superficie ed in particolare i 3 coni di KUMMER di questa, ecc. ecc.

Se invece il centro di proiezione è fuori di $\Gamma$ si ottiene come contorno apparente una *superficie del* $6^0$ *ordine (e* $6^a$ *classe) avente per linee cuspidali quattro coniche che passano tutte per due punti tripli (uniplanari) della superficie. Questa è l'inviluppo di quattro serie d'indice* 3 *di quadriche passanti rispettivamente per le quattro coniche cuspidali e tangenti nei due punti tripli ai piani che toccano in questi la superficie. La retta* p *d'intersezione di questi due piani contiene i poli rispetto a ciascuna serie di quadriche del piano della corrispondente conica cuspidale ed in particolare contiene i vertici dei* 3 *coni di ogni serie;* p *contiene pure il vertice dei* 4 *coni quadrici inviluppati dai piani che toccano la superficie nei punti delle coniche cuspidali. La superficie corrisponde a se stessa in* $\infty^1$ *omologie armoniche i cui piani passano per* p *ed i cui centri costituiscono la retta congiungente i due punti tripli (e quindi anche in un'involuzione assiale avente* p *e questa retta per assi). Assumendo una delle quattro coniche cuspidali come assoluto, la superficie diventa quella che è generata dalla rotazione intorno ad un suo asse di simmetria di una sestica piana con otto cuspidi di cui due nei punti ciclici del suo piano.*

51. **Varietà cubiche con due rette doppie di $2^a$ specie.** — Una varietà $\Gamma$ siffatta è un caso particolare di quella avente una conica doppia di $2^a$ specie; questa conica si scinde ora in due rette $d$ e $d'$ passanti per uno stesso punto $D$; e si ha così un caso già nominato al $n^0$ 47. Vi sarà anche qui, come in generale quando una varietà cubica ha una conica doppia di $2^a$ specie, uno spazio $T$ tangente a $\Gamma$ lungo il piano $dd'$ e non avente comuni altri punti con $\Gamma$ e $T$ sarà uno dei due spazi tangenti relativi ad ogni punto di $d$ o di $d'$. Lo spazio tangente variabile relativo ai vari punti di $d$ de-

scriverà un fascio avente per sostegno un piano $\pi$ passante per $d$ e similmente vi sarà un piano $\pi'$ passante per $d'$ e nel quale s'intersecano tutti gli spazi (diversi da $T$) che toccano $\Gamma$ nei punti di $d'$; evidentemente $\pi$ e $\pi'$ saranno incidenti, cioè staranno nello spazio che insieme con $T$ costituisce il cono tangente a $\Gamma$ in $D$. Questo spazio sega $\Gamma$ (oltre che nel piano $dd'$) in un cono quadrico tangente a $\pi$ e $\pi'$ in $d$ e $d'$. Esso può però venir a coincidere con $T$; i piani $\pi$ e $\pi'$ vengono cioè a stare simultaneamente in $T$, quando il punto $D$ comune alle due rette doppie sia unispaziale. In ogni caso del resto $\Gamma$ corrisponde ancora a se stessa in $\infty^2$ omologie armoniche coi centri sul piano $dd'$ e cogli spazi d'omologia passanti per la retta $\pi\pi'$. Il sistema delle sue rette si scinde in due (1, 3) appoggiati rispettivamente a $d$ e $d'$ (nel secondo di essi coincidono i tre sistemi non appoggiati a $d$ della varietà considerata al n$^0$ 47).

Attualmente $\Gamma$ è in generale di 6$^a$ classe. Ma si riduce alla 5$^a$ nel caso dianzi nominato (in cui le due rette doppie di 2$^a$ specie $d$, $d'$ presentano il caso del n$^0$ 48, cioè) in cui il punto $D$ è unispaziale. E si riduce alla 4$^a$ classe nel caso in cui il cono quadrico di $\Gamma$ che nel caso generale esce da $D$ degenera (anzi che nel piano $dd'$ contato due volte, come in quel caso particolare) nei due piani $\pi\pi'$; ciò accade quando $\Gamma$ acquista un punto doppio $A$ fuori di $dd'$, chè allora i piani $Ad$, $Ad'$ stanno su $\Gamma$ e coincidono appunto con $\pi, \pi'$; e viceversa. In questo caso vi sono su $\Gamma$ due sistemi di rette (1, 2) coniugati fra loro.

Il contorno apparente di $\Gamma$ da un suo punto è in generale una *superficie di 4$^0$ ordine (e 6$^a$ classe) con due rette cuspidali* [34]. Invece se il centro di proiezione è esterno si ottiene in generale una *superficie di 6$^0$ ordine (e 6$^a$ classe) con quattro coniche cuspidali di cui una scissa in due rette*; questa superficie essendo un caso particolare ovvio di quella del n$^0$ 50 non stiamo a descriverla ulteriormente; essa presenta un caso particolare (di 5$^a$ classe) in cui il punto comune alle due rette cuspidali è triplo per la superficie ed un altro (di 4$^a$ classe) in cui essa acquista invece un punto conico.

52. **Varietà cubiche con piano doppio, cioè dotate di conica doppia di 3$^a$ specie.** — Sia $\Gamma$ una varietà cubica con piano doppio

---

[34] V. per le proprietà che così si ritroverebbero di questa superficie e dei due casi particolari (con punto triplo e con punto conico) provenienti dai casi particolari di $\Gamma$, i n$^i$ 82, 90 e 119 della mia Memoria già citata sulle superficie di 4$^0$ ordine.

$\pi$. Il fascio degli spazi passanti per $\pi$ segherà ancora $\Gamma$ secondo una $\infty^1$ di piani (*generatori*); i punti di $\pi$ sono tutti bispaziali ($n^0$ 29) avendo ciascuno di essi la sua $M_3^2$ polare scissa in due spazi di quel fascio. In causa della corrispondenza proiettiva fra i punti di $\pi$ e le coppie di spazi di quel fascio il luogo dei punti di $\pi$ pei quali la corrispondente coppia di spazi si compone di due spazi coincidenti sarà una curva di $2^0$ ordine $k^2$; $\Gamma$ ha dunque tutti i punti di $k^2$ come unispaziali, cioè $k^2$ per conica doppia di 3ª specie. L'inverso, cioè che una varietà cubica avente una conica doppia di 3ª specie ha il piano di questa per piano doppio, fu già notato al $n^0$ 49.

Si vede facilmente che due piani generatori di $\Gamma$ non possono essere incidenti. Quindi gli $\infty^1$ piani generatori tagliano $\pi$ secondo $\infty^1$ rette tali che per ogni punto di $\pi$ ne passano in generale due, appartenenti ai piani generatori che stanno nei due spazi tangenti a $\Gamma$ in quel punto; quelle $\infty^1$ rette costituiscono dunque un inviluppo di 2ª classe ed ogni punto di questo sarà unispaziale; si ritrova così la conica $k^2$. Lo spazio tangente a $\Gamma$ in un suo punto qualunque la sega secondo il piano generatore $\alpha$ passante per quel punto e secondo una quadrica che ha comuni con $\alpha$ la retta $\alpha\pi$ ed un'altra retta $a$: quello spazio tocca dunque $\Gamma$ lungo $a$. I piani generatori di $\Gamma$ tagliano quella quadrica secondo le generatrici del sistema di $a$; considerando l'altro sistema di generatrici abbiamo dunque che: *all'infuori delle rette situate nei suoi piani, $\Gamma$ contiene ancora un sistema* (1, 1) *di rette (generatrici) ciascuna delle quali è tagliata da ogni piano generatore.* Nel piano $\pi$ vanno considerate come generatrici di $\Gamma$ le tangenti di $k^2$. Due generatrici qualunque sono punteggiate proiettivamente dai piani generatori (come sezioni del fascio $\pi$ di spazi). Due piani generatori $\alpha, \alpha'$ sono punteggiati proiettivamente dalle generatrici; giacchè se $r$ è una retta qualunque di $\alpha$ ed $m, n$ sono due generatrici appoggiate ad $r$, nello spazio $mn$ i piani generatori di $\Gamma$ determinano un sistema di rette di una quadrica (cioè le congiungenti i punti corrispondenti delle punteggiate proiettive $m, n$), di cui l'altro sistema si comporrà delle generatrici di $\Gamma$ uscenti dai vari punti di $r$ e queste incontreranno dunque anche $\alpha'$ secondo punti di una retta $r'$. Segue che *$\Gamma$ si può generare sia mediante i piani congiungenti i punti corrispondenti di tre rette (generatrici) punteggiate proiettivamente, sia con le rette congiungenti i punti corrispondenti di due piani (generatori) punteggiati proiettivamente.* Inoltre siccome proiettando i piani generatori di $\Gamma$ da una sua generatrice qualunque si hanno evidentemente gli spazi tangenti al cono quadrico di 2ª specie che proietta $k^2$ da quella retta, così $\Gamma$

*si può anche generare mediante le intersezioni degli spazi di un fascio* ($\pi$) *coi corrispondenti spazi tangenti di un cono quadrico di 2ª specie riferito proiettivamente a quel fascio.* Viceversa è evidente che in questo modo si genera sempre una varietà cubica avente un piano doppio nel sostegno del fascio di spazi. Così pure i piani congiungenti i punti omologhi di tre rette punteggiate proiettivamente costituiscono una tal varietà, poichè essi son proiettati da una di quelle rette secondo il sistema degli spazi tangenti di un cono quadrico di 2ª specie mentre dal piano incidente a tre di quegli $\infty^1$ piani questi son proiettati mediante un fascio riferito proiettivamente a quel cono. Infine le $\infty^2$ rette congiungenti i punti omologhi di due piani $\alpha$, $\alpha'$ punteggiati proiettivamente costituiscono una varietà cubica; e siccome, dette $a$, $a'$ le due rette corrispondenti di $\alpha$, $\alpha'$ che passano pel punto comune a questi piani, per ogni punto del piano $aa'$ passano due delle $\infty^2$ rette nominate, così quel piano sarà doppio per la varietà cubica.

Segue subito dalla generazione di $\Gamma$ con piani proiettivi che $\Gamma$ si può considerare come la proiezione della varietà cubica razionale normale di $\infty^1$ piani appartenente ad $S_5$ (35).

Il sistema delle sue rette generatrici si può anche definire come l'insieme delle rette che incontrano quattro piani (generatori di $\Gamma$) quando questi sono incidenti ad uno stesso piano $\pi$; od anche si può generare mediante tre reti proiettive di spazi aventi un piano *unito* $\pi$ (e quindi per sostegni tre rette di $\pi$).

Proiettando $\Gamma$ sullo spazio ordinario da un punto esterno ad essa i piani generatori di $\Gamma$ dànno i piani di un inviluppo di 3ª classe ed il contorno apparente di $\Gamma$ è appunto la superficie sviluppabile di 4º ordine inviluppata da quei piani (fatta astrazione dal piano proiezione di $\pi$ contato due volte, il quale appartiene all'inviluppo e taglia la sviluppabile secondo la conica proiezione di $k^2$).

---

(35) V. la nota al nº 9 del mio lavoro *Sulle varietà normali a tre dimensioni composte di serie semplici razionali di piani*, Atti di quest'Acc., XXI [V. queste « Opere », I, pp. 17-35]; da quanto ivi è detto si potrebbero dedurre parecchie delle proprietà di $\Gamma$ dianzi trovate.

## Su una classe di trasformazioni doppie e triple dello spazio e sulla rappresentazione in questo dei sistemi di rette studiati nel presente lavoro.

53. Le varietà cubiche di $S_4$ rappresentabili univocamente sullo spazio ordinario ([36]) forniscono una classe notevole di trasformazioni di questo spazio. Considerando in fatti, oltre alla rappresentazione univoca di una tal varietà $\Gamma$ su uno spazio $R'$, la sua rappresentazione su uno spazio doppio o triplo $R$ che si ha proiettandola su $R$ da un punto $P$ posto su $\Gamma$ o fuori di $\Gamma$, e facendo corrispondere in $R$ e $R'$ due punti i quali siano imagini di uno stesso punto di $\Gamma$ si viene a stabilire fra quegli spazi una corrispondenza (1, 2) o (1, 3), cioè una *trasformazione doppia* o *tripla* dello spazio (*doppio* o *triplo*) $R$ nello spazio (*semplice*) $R'$ ([37]). Per rappresentazione univoca di $\Gamma$ su $R'$ noi assumeremo la proiezione su questo spazio di quella varietà fatta da un suo punto doppio $D$.

Allora le coppie o terne di punti (*congiunti*) di $R'$ le quali corrispondono ai singoli punti di $R$ saranno situate sulle rette che passano per un certo punto fisso $P'$ (proiezione su $R'$ di $P$ dal centro $D$) e su ognuna di quelle rette si avrà così un'involuzione di $2^0$ o $3^0$ grado; nel $1^0$ caso, cioè nel caso della trasformazione doppia, il punto $P'$ sarà fondamentale in $R'$, avendo per corrispondente in $R$ un piano $\mu$. I punti doppi delle involuzioni che così si hanno sulle varie rette passanti per $P'$, cioè i punti di $R'$ in ciascuno dei quali coincidono due punti corrispondenti ad uno stesso punto di $R$, formano una superficie $\varphi^4$ (*superficie doppia* di $R'$) del $4^0$ ordine, che è la proiezione della $S^{2\cdot 3}$ intersezione di $\Gamma$ colla prima polare di $P$ rispetto a questa varietà fatta dal punto doppio $D$. Siccome se $P$ sta su $\Gamma$, quella $S^{2\cdot 3}$ ha in $P$ un punto doppio, così nel caso della trasformazione doppia $\varphi^4$ avrà in $P'$ un punto doppio; essa conterrà poi sempre la sestica $\delta^6$ secondo cui $R'$ sega il cono sestico di rette di $\Gamma$ uscenti da $D$. La quadrica su cui sta $\delta^6$ è imagine di un punto fondamentale di $R$, cioè della proiezione $D_1$ di $D$ fatta da $P$ su $R$.

---

([36]) Se tutte le varietà cubiche di $S_4$ (fatta astrazione dal cono di $2^a$ specie che proietta da una retta una cubica ellittica) siano rappresentabili univocamente sullo spazio ordinario, o se sieno tali solo quelle che hanno punti doppi, è una questione che qui non intendo risolvere.

([37]) Per la teoria generale delle trasformazioni doppie dello spazio veggasi il lavoro del sig. De Paolis nelle Memorie della R. Acc. dei Lincei, (4) 1.

Questo punto $D_1$ è doppio per la superficie $F^4$ od $F^6$ (*superficie limite* di $R$) che corrisponde in $R$ alla superficie doppia $\varphi^4$ di $R'$, cioè per la proiezione delle $S^{2\cdot 3}$ dal centro $P$. Il cono sestico circoscritto da $D_1$ a questa superficie $F$ (proiezione del cono di rette di $\Gamma$ uscente da $D$) ha le sue singole generatrici corrispondenti ai singoli punti della sestica $\delta^6$, sicchè questa è fondamentale per $R'$. Per ogni punto doppio diverso da $D$ che vi sia su $\Gamma$ quella curva e quel cono hanno un elemento doppio; le degenerazioni loro si corrispondono perfettamente, essendo la curva proiettiva a curve situate sul cono.

La superficie limite $F$ di $R$, contorno apparente di $\Gamma$ rispetto al punto $P$, ha tutte le proprietà e può presentare tutte le particolarità che furono studiate nei §§ precedenti. Distinguendo i due casi, vi è da osservare che i sei punti doppi di $F^4$ situati nel piano $\mu$ (tangente lungo una conica a questa superficie) sono punti fondamentali per $R$; ad essi corrispondono in $R'$ sei rette di $\Phi^4$ uscenti da $P'$ ed appartenenti ad un cono quadrico (proiezioni delle sei rette di $\Gamma$ uscenti da $P$). $F^6$ ha invece una sestica cuspidale a cui corrisponde una sestica *tripla* per $R'$. Il cono $M_3^6$ circoscritto da $P$ a $F$, cioè proiettante da $P$ la $S^{2\cdot 3}$ d'intersezione di $\Gamma$ con la $M_3^2$ polare di $P$, taglia ancora $\Gamma$ secondo una superficie di $6^0$ ordine situata su un'altra $M_3^2$ che tocca quella lungo la sua intersezione con lo spazio polare di $P$ (per una estensione facile a farsi di una nota proprietà delle cubiche piane a varietà cubiche di spazi superiori) e che tocca $\Gamma$ nel punto in cui la retta $PD$ taglia ancora questa varietà. Questa nuova superficie si proietta da $D$ su $R'$ secondo una superficie di $6^0$ ordine $\Psi^6$ (*congiunta* di $\Phi^4$) luogo dei punti che con quelli di $\Phi^4$ contati due volte corrispondono a punti di $F^6$. $\Psi^6$ avrà $P'$ per punto doppio e $\delta^6$ per linea doppia; ogni nuovo punto doppio di $\Phi^4$ (cioè di $\Gamma$), darà un corrispondente punto doppio di $\Psi^6$. $\Phi^4$ e $\Psi^6$ si toccano lungo la sestica tripla di $R'$ avendo entrambe uno stesso cono sestico di vertice $P'$ tangente lungo questa curva.

54. Per poter compiere la descrizione della trasformazione irrazionale del numero precedente conviene che ci occupiamo in questo n$^0$ di *curve e superficie del* $3^0$ *ordine iscritte nella superficie* $\mathrm{F}^4$ *od* $\mathrm{F}^6$ contorno apparente di $\Gamma$ rispetto al punto $P$.

Uno spazio qualunque $S$ sega $\Gamma$ secondo una superficie cubica che vien proiettata su $R$ dal centro $P$ mediante un cono $M^3$ tangente a $\Gamma$ in tutti i punti in cui $S$ sega la $S^{2\cdot 3}$ di contatto di $\Gamma$ col cono circoscritto di vertice $P$, cioè nei punti di una sestica. Il cono $M^3$ considerato sega inoltre $\Gamma$ secondo una superficie del $6^0$ ordine intersezione di $\Gamma$ con una $M^2$; questa nel caso che $P$ stia su $\Gamma$ tocca $\Gamma$ in $P$, sicchè allora quella superficie del $6^0$ ordine ha in $P$ un punto doppio. In ogni caso poi la superficie medesima incontra $S$ nella sestica già nominata, sicchè la quadrica in cui questa è contenuta sta simultaneamente sulla $M^2$ suddetta e sulla prima polare di $P$ rispetto a $\Gamma$.

Analogamente la cubica intersezione di $\Gamma$ con un piano non passante per $P$ è proiettata da questo mediante un cono che incontra ancora $\Gamma$ in una sestica (situata su una quadrica); questa curva e la $S^{2\cdot 3}$ incontrano il piano negli stessi 6 punti e questi sono punti di contatto di quel cono cubico con $\Gamma$. Da queste e da altre facili osservazioni si hanno per le proiezioni su $R$ da $P$ le proposizioni seguenti:

*La superficie* $\mathrm{F}^4$ *od* $\mathrm{F}^6$ *ammette un sistema* $\infty^4$ *di superficie cubiche che la toccano lungo sestiche ed un sistema* $\infty^6$ *di cubiche piane che la toccano in sestuple di punti situate su coniche*; i quali sistemi sono proiezioni delle sezioni fatte su $\Gamma$ rispettivamente con spazi e con piani [38], e si diranno superficie e curve del $3^0$ ordine *iscritte* in $F^4$ od $F^6$. *Due superficie cubiche iscritte si segano in una cubica piana iscritta (ed in una sestica). Le* $\infty^4$ *quadriche contenenti le sestiche di contatto di* $\mathrm{F}^6$ *colle superficie cubiche ad essa iscritte toccano lungo coniche la quadrica contenente la sestica cuspidale; invece le superficie cubiche iscritte in* $\mathrm{F}^4$ *contengono i sei punti doppi di questa superficie situati nel piano doppio* $\pi$.

Ogni punto dello spazio è punto doppio per *due* o *tre* superficie cubiche iscritte in $F^4$ od $F^6$; le *due* o *tre* sestuple di tangenti doppie di queste superficie uscenti da quel punto considerate al $n^0$ 3 appartengono rispettivamente a quelle due o tre superficie cubiche iscritte. Ne segue, ad esempio, per la $F^4$, quest'altra proprietà, che *ognuna delle due sestuple considerate di tangenti doppie della* $\mathrm{F}^4$ *uscenti da un punto taglia il piano doppio* $\pi$ *in sei punti (di una conica) situati coi sei punti doppi di* $\pi$ *in una stessa cubica.*

In generale le rette di ogni superficie cubica iscritta in $F^4$ od $F^6$ si distribuiscono tra i varî sistemi in cui il sistema delle tangenti doppie di questa può scindersi (eccettuato solo per $F^4$ il si-

---

[38] Altre linee e superficie di $3^0$ ordine formanti altri sistemi possono avere le stesse relazioni con $F$; ma noi qui consideriamo solo quelle che si ottengono in questo modo.

stema delle rette di $\pi$) precisamente come nella sezione spaziale di $\Gamma$, di cui quella superficie cubica è proiezione, le varie rette si distribuiscono tra i varî sistemi di rette di $\Gamma$. Quindi tale distribuzione risulterà subito nei varî casi particolari di $F^4$ od $F^6$ da proprietà viste dei corrispondenti casi di $\Gamma$. Una conseguenza di quell'osservazione è ad esempio questa, che *il numero delle rette di qualunque sistema di tangenti doppie di* $F^4$ *od* $F^6$ *contenute in ogni superficie cubica iscritta è uguale alla classe di quel sistema.*

55. Ritornando ora a considerare la corrispondenza fra i due spazi $R$ e $R'$, osserviamo che ogni sezione spaziale di $\Gamma$ si proietta da $D$ su $R'$ secondo una superficie cubica passante per $\delta^6$; e viceversa, siccome le superficie cubiche passanti per questa sestica formano sempre un sistema lineare $\infty^4$ (purchè per certe degenerazioni molto particolari di $\delta^6$ s'intenda convenientemente il *passaggio* per essa), così esse costituiranno sempre il sistema delle proiezioni delle sezioni spaziali di $\Gamma$. Quindi a quelle $\infty^4$ superficie cubiche di $R'$ corrispondono in $R$ le $\infty^4$ superficie cubiche iscritte in $F$. In particolare ai piani di $R'$ corrispondono in $R$ $\infty^3$ superficie cubiche iscritte ad $F$ ed aventi un punto doppio nel punto fondamentale $D_1$; invece ai piani di $R$ corrispondono in $R'$ le superficie cubiche passanti per $\delta^6$ e formanti un sistema lineare $\infty^3$, che nel caso della trasformazione doppia (cioè quando $P$ sta su $\Gamma$) è definito, oltre che da $\delta^6$, dal passaggio pel punto fondamentale $P'$. Ad ogni piano di $R'$ è *congiunta* (cioè corrispondente alla stessa superficie cubica di $R$ che a quel piano corrisponde) una superficie del $4^0$ ordine passante per $\delta^6$ ed avente in $P'$ un punto triplo o doppio, secondo che si tratta della trasformazione doppia o tripla.

Alle rette di $R$ corrispondono in $R'$ cubiche piane ellittiche appoggiate in 6 punti a $\delta^6$; alle rette di $R'$ corrispondono in $R$ cubiche piane iscritte in $F$ ed aventi un punto doppio in $D_1$. Ma è da notare che si corrispondono fra loro il sistema delle rette di $R$ che son tangenti doppie di $F$ ed il sistema delle rette di $R'$ che sono corde di $\delta^6$; sicchè questi sistemi si scindono simultaneamente in altri con lo scindersi di $\delta^6$.

56. Quest'osservazione ci conduce all'ultima questione di cui intendiamo occuparci, cioè della *rappresentazione piana dei sistemi di rette studiati in questo lavoro*, sistemi di tangenti doppie di $F$ ovvero sistemi di rette di $\Gamma$ che dànno quelli come proiezioni. La rappresentazione piana (univoca) sarà possibile se rappresentabile

sul piano o (come diremo più brevemente) *razionale* sarà il corrispondente sistema di corde di $\delta^6$. Ora si dimostra facilmente che *il sistema delle rette che si appoggiano a due curve distinte o coincidenti è razionale solo quando le due curve sono esse stesse razionali.* Applicando questa proposizione nei varî casi che può presentare $\delta^6$ ai sistemi costituiti dalle sue corde si riconoscerà immediatamente per ogni caso da noi studiato di $\Gamma$ o di $F$ quali sistemi di rette di $\Gamma$ o di tangenti doppie di $F$ siano razionali. Così, se $\delta^6$ non si scinde, essa deve acquistare 4 punti doppi per diventare razionale; e se ne trae che *se $\Gamma$ ha meno di 5 punti doppi il sistema delle sue rette non è razionale, mentre esso è tale se $\Gamma$ ha 5 punti doppi indipendenti* (ed analogamente per $F$).

Tra i sistemi di rette che così si riconoscono come razionali si trovano in particolare tutti quelli che si ottengono mediante la generazione con stelle proiettive di spazi. Ma la rappresentazione piana del sistema di rette generato (in $S_4$) da tre stelle proiettive di spazi $r$, $r'$, $r''$ si può anche ottenere direttamente riferendo proiettivamente quelle stelle di spazi ad un piano punteggiato $\varrho$, e considerando ogni punto di questo come imagine della retta d'intersezione degli spazi corrispondenti. Allora, chiamando $n$ ($\leq 6$) la classe del sistema di rette, alla rigata d'ordine $n + 3$ costituita da quelle sue rette che si appoggiano ad un piano qualunque $\alpha$ corrisponderà in $\varrho$ una curva del $3^0$ ordine, giacchè $\alpha$ sega le tre stelle di spazi secondo tre piani rigati proiettivi e le rette di ciascuno di questi che concorrono in un punto con le corrispondenti rette degli altri due inviluppano una curva di $3^a$ classe, e però gli spazi di ciascuna stella che proiettano quella rigata formano una $\infty^1$ di $3^a$ classe [39]. Le infinite curve di $3^0$ ordine che così si ottengono su $\varrho$ come imagini delle rigate appoggiate agl'infiniti piani di $S_4$ avranno $n + 3$ intersezioni variabili e quindi $6 - n$ punti fissi, poichè due qualunque di quelle rigate hanno appunto $n + 3$ rette comuni. Alla $\infty^{n+3}$ lineare di cubiche di $\varrho$ passanti per quei punti fissi corrisponderà una $\infty^{n+3}$ lineare di rigate d'ordine $n + 3$ del sistema di rette, la quale comprenderà in particolare le infinite rigate già considerate.

---

[39] Come questa, così la corrispondente curva del $3^0$ ordine di $\varrho$ sarà razionale solo quando $\alpha$ sega la varietà cubica $\Gamma$ secondo una curva razionale e quindi ciò non accadrà in generale, salvo nel caso in cui $\Gamma$ abbia un piano doppio; ma in questo caso particolare il sistema delle generatrici di $\Gamma$ si potrebbe rappresentare su un piano $\varrho$ in modo che alle rigate ($\infty^5$ in questo caso) appoggiate ai varî piani di $S_4$ corrispondano le coniche di $\varrho$.

Proiettando quel sistema di rette da un punto $P$ posto o no su $\Gamma$ si ha nello spazio $R$ un sistema $(2, n)$ o $(3, n)$ rappresentato sul piano $\varrho$ in modo che alle rigate d'ordine $n+2$ od $n+3$ costituite da quelle sue rette che si appoggiano alle varie rette dello spazio corrispondono cubiche piane con $n+2$ od $n+3$ intersezioni variabili, cioè con $7-n$ ovvero $6-n$ punti fissi. Le altre proprietà delle rappresentazioni piane di quei sistemi di rette si dedurrebbero subito da questa (40).

(40) Pei sistemi di 2° ordine queste rappresentazioni sono in parte note ed in parte contenute implicitamente nelle rappresentazioni note dei sistemi stessi su quadriche. V. (anche per citazioni dei lavori precedenti): Loria, *Intorno alla geometria su un complesso tetraedrale* (Atti Acc. Torino, XIX), e *Rappresentazione su un piano delle congruenze* $[2, 6]_2$ *e* $[2, 7]$ (ibid., XXI).