La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Robert J. Aumann

Guerra e pace

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **1** (2008), n.1, p. 93–105.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2008_1_1_1_93_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2008.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. I, Aprile 2008, 93-105

Guerra e pace (1)

ROBERT J. AUMANN

"Le guerre e gli altri conflitti sono fra le maggiori cause della miseria umana". Comincia così l'*Advanced Information* del Premio in Economia 2005 in memoria di Alfred Nobel offerto dalla Banca di Svezia, attribuito per l'analisi dei conflitti e della cooperazione mediante la teoria dei giochi. Perciò è opportuno dedicare questa conferenza ad una delle questioni più pressanti e profonde per l'umanità: quella della guerra e della pace.

Vorrei suggerire che forse dovremmo indirizzare diversamente i nostri sforzi per realizzare la pace nel mondo. Fino ad ora, tutti gli sforzi sono stati fatti per risolvere conflitti specifici: India-Pakistan, Nord-Sud dell'Irlanda, svariate guerre africane, le guerre nei Balcani, Russia e Cecenia, Israele e Paesi Arabi, ecc. Proporrei di spostare l'attenzione sullo studio della guerra in generale.

Permettetemi un confronto. Ci sono due approcci nella lotta al tumore. Uno è clinico. Per esempio, se si ha un tumore al seno, cosa si può

Il premio Nobel per l'Economia è stato assegnato per l'anno 2005 ai professori Robert J. Aumann (Center for the Study of Rationality and Department of Mathematics, The Hebrew University, Jerusalem, Israel) e Thomas Schelling (University of Maryland, Department of Economics and School of Public Policy, College Park, MD, USA) in parti uguali "for having enhanced our understanding of conflict and cooperation through game-theory analysis". Ringraziamo la Fondazione Nobel per averci concesso il permesso di traduzione e riproduzione della "Prize Lecture" tenuta dal prof. Aumann a Stoccolma l'8 dicembre 2005. Traduzione di M. Cristina Molinari.

(1) Questo articolo è una versione solo leggermente rivista della conferenza di quaranta minuti tenuta alla Royal Swedish Academy of Sciences di Stoccolma. L'autore è grato al Prof. Nicolaus Tideman per aver segnalato un errore in una versione precedente.

fare? Un intervento chirurgico? Radiazioni? Chemioterapia? Quale chemioterapia? Quante radiazioni? Rimuovere anche i linfonodi? Le risposte sono basate su test clinici, cioè su cosa funziona meglio. Si procede caso per caso, usando al meglio l'informazione disponibile. E lo scopo è di curare il male, o di alleviarlo, nello specifico paziente che si sta trattando.

E c'è un altro approccio. Non si fanno interventi chirurgici, non si fanno radiazioni, non si fa chemioterapia, non si guardano le statistiche, non si guarda affatto il paziente. Si cerca semplicemente di capire cosa accade ad una cellula cancerogena. C'è una relazione con il DNA? Cosa succede? Qual è il processo? *Non* si prova a curare. Si tenta solo di *capire.* Si lavora con le cavie, non con gli uomini. Si cerca di farle ammalare, non di curarle.

Louis Pasteur era un medico. Per lui era importante curare le persone, guarirle. Ma Robert Koch non era medico, egli non provava a guarire le persone. Voleva solo sapere come funzionano le malattie infettive. E alla fine il suo lavoro ebbe un ruolo fondamentale nel curarle e nel guarirle.

La guerra è con noi dagli albori della civiltà. Niente è più costante della guerra nella storia. È un fenomeno, non una serie di eventi isolati. Gli sforzi di risolvere conflitti specifici sono certamente lodevoli e talvolta davvero fruttuosi. Ma c'è un altro modo di affrontare i conflitti — studiare la guerra come un fenomeno generale, studiare le caratteristiche generali che lo definiscono, cercare il comune denominatore e le differenze. Storicamente, sociologicamente, psicologicamente e — certo — *razionalmente.* Perché l'*homo economicus* — l'uomo razionale — va in guerra?

Che cosa intendo con razionalità? Questo:

> *Il comportamento di un individuo è* **razionale** *se soddisfa al meglio il* **suo** *interesse, data la* **sua** *informazione.*

Con questa definizione, la guerra può essere razionale? Purtroppo la risposta è sì; può esserlo. In uno dei migliori discorsi di tutti i tempi — il suo secondo discorso inaugurale — Abraham Lincoln disse: "Entrambe le parti disapprovavano la guerra; ma una avrebbe fatto la guerra piuttosto che far sopravvivere la nazione; l'altra avrebbe accettato la guerra piuttosto che lasciarla morire. E la guerra venne."

È un grande errore dire che la guerra è irrazionale. Prendiamo tutti i mali del mondo — guerre, scioperi, discriminazioni razziali — e li liquidiamo chiamandoli irrazionali. Non sono necessariamente irrazionali. Anche se fanno del male, possono essere razionali. Se la guerra è razionale, una volta che abbiamo capito che lo è, possiamo almeno in qualche modo affrontare il problema. Se semplicemente la liquidiamo come irrazionale, non possiamo nemmeno abbordare il problema.

Molti anni fa ho assistito ad un incontro di studenti all'Università di Yale. Anche Jim Tobin, che in seguito vinse il Premio Nobel per l'Economia, era presente. Si discuteva a ruota libera e una delle domande sollevate fu: "Si può riassumere l'economia in una parola?" La risposta di Tobin fu affermativa. La parola è *incentivi.* L'economia si occupa essenzialmente di incentivi.

Perciò quello che vorrei fare è un'analisi economica della guerra. Questo *non* significa quel che sembra. Non sto parlando dei modi di finanziare la guerra o di come ricostruire dopo la guerra o argomenti simili. Sto parlando degli *incentivi* che conducono alla guerra e alla costruzione di incentivi che la prevengono.

Permettetemi un esempio. L'economia ci insegna che le cose non sono sempre quello che sembrano. Per esempio, supponiamo di voler aumentare le entrate fiscali. Per farlo si devono ovviamente alzare le aliquote fiscali, giusto? No, sbagliato. Potrebbe essere preferibile abbassarle. Per dare alle persone un incentivo a lavorare o per ridurre l'elusione e l'evasione delle tasse o per rimettere in moto l'economia o quant'altro. Questo è solo un esempio; ce ne sono migliaia di simili. L'economia è un gioco: gli incentivi delle persone interagiscono in modi complessi e conducono a risultati sorprendenti e, spesso, controintuitivi. Ma, a conti fatti, l'economia funziona proprio così.

Torniamo ora alla guerra e a come l'*homo economicus* — l'uomo razionale — entra in questo quadro. Un esempio, nello spirito di quello precedente, è questo. Vogliamo evitare la guerra. Per farlo è chiaro che si deve diminuire il livello degli armamenti, ovvero disarmare. Giusto? No, sbagliato. Potrebbe essere meglio fare l'esatto contrario. Nei lunghi anni della Guerra Fredda fra Stati Uniti e Unione Sovietica, ciò che ha evitato guerre "calde" è stata la presenza nei cieli di bombardieri con armi nucleari 24 ore su 24, 365 giorni all'anno. Disarmare avrebbe portato alla guerra.

La conclusione è — ancora una volta — che dovremmo studiare la guerra, e da tutti i punti di vista, per se stessa. Cercare di capire cosa la fa accadere. Scienza pura, di base. *Questo* potrebbe portare, alla fine, alla pace. L'approccio graduale, caso per caso, non ha funzionato troppo bene fino ad ora.

Ora vorrei parlare di alcuni miei contributi fra quelli citati dalla Commissione del premio. In particolare, vorrei parlare di giochi ripetuti e della loro attinenza alla guerra e agli altri conflitti, come gli scioperi e, in generale, a tutte le situazioni in cui gli individui interagiscono.

I giochi ripetuti rappresentano le interazioni di lungo periodo. La teoria dei giochi ripetuti è in grado di spiegare fenomeni come l'altruismo, la cooperazione, la fiducia, la fedeltà, la vendetta, le minacce (autodistruttive e non) — fenomeni che possono sembrare a prima vista irrazionali — in termini del paradigma "egoistico" di massimizzazione dell'utilità caratteristico della teoria dei giochi e dell'economia neoclassica.

Che la teoria sia "in grado di spiegare" questi fenomeni non significa che le persone decidono di vendicarsi o di essere generose in base a motivi consapevolmente egoistici e razionali. Piuttosto, nei secoli, le persone hanno sviluppato norme di comportamento che, nel loro insieme, funzionano bene o sono addirittura ottime. Questa evoluzione, in realtà, può essere biologica, genetica. O può essere "memetica"; questa parola deriva dalla parola "meme", un termine coniato dal biologo Richard Dawkins in analogia con la parola "gene", ma allo scopo di esprimere ereditarietà ed evoluzione di natura sociale invece che biologica.

Una delle grandi scoperte della teoria dei giochi risale agli inizi degli anni Settanta, quando i biologi John Maynard Smith e George Price si accorsero che l'equilibrio strategico nei giochi e l'equilibrio della popolazione nel mondo vivente sono definiti dalle stesse equazioni. L'evoluzione — sia essa genetica o memetica — conduce all'equilibrio strategico. Pertanto, ciò che stiamo dicendo è che nei giochi *ripetuti* l'equilibrio strategico manifesta fenomeni come l'altruismo, la cooperazione, la fedeltà, la vendetta, le minacce, ecc. Vediamo come ciò accade.

Che cosa intendo con "equilibrio strategico"? Grosso modo, dato un gioco, si dice che i suoi giocatori sono in *equilibrio strategico* (o semplicemente *equilibrio*) quando il loro modo di giocare è *mutuamente ottimo:* quando le strategie e i piani di ciascun giocatore sono razionali nella situazione strategica data — cioè quando ciascuno conosce le strategie e i piani degli altri.

Per aver formulato e sviluppato il concetto di equilibrio strategico, John Nash ha ricevuto il Premio Nobel in Economia nel 1994, in concomitanza con il cinquantesimo anniversario della pubblicazione di *Theory of Games and Economic Behavior* di John von Neumann e Oskar Morgenstern. Il premio era condiviso con John Harsanyi, che ha formulato e sviluppato il concetto di equilibrio *bayesiano*, cioè l'equilibrio strategico nei giochi ad informazione incompleta; e con Reinhard Selten, che ha formulato e sviluppato il concetto di equilibrio *perfetto,* un raffinamento dell'equilibrio di Nash su cui diremo di più in seguito. Insieme ai concetti di equilibrio *correlato* (Aumann 1974, 1987) e di equilibrio *forte* (Aumann 1959), entrambi citati nell'annuncio del Premio del 2005, i tre concetti fondamentali di cui sopra costituiscono le fondamenta della teoria dei giochi noncooperativi.

Dopo il premio del 1994, altri due Premi Nobel per l'Economia sono stati attribuiti per *applicazioni* di questi concetti fondamentali. Il primo nel 1996, quando William Vickrey ottenne il premio postumo per il suo lavoro sulle aste. (Vickrey morì dopo l'annuncio del premio ma prima della cerimonia.) Il disegno delle aste e delle strategie di offerta sono fra le principali applicazioni della teoria dei giochi; una buona rassegna — anche se un po' datata — è Wilson 1992.

Il secondo arriva quest'anno — 2005. Il Professor Schelling naturalmente parlerà e scriverà da sé. Quanto a me, vostro umile servitore, ho ricevuto il premio per aver applicato i concetti fondamentali di equilibrio menzionati sopra ai *giochi ripetuti.* Mi spiego: supponete di giocare lo stesso gioco G, con gli stessi giocatori, anno dopo anno. Si può guardare a questa situazione come ad un singolo, grande gioco, il cosidetto *supergioco* di G, indicato con G^∞ — le cui regole sono: "gioca G ogni anno". L'idea è di applicare i concetti di equilibrio prima citati al supergioco G^{∞} invece che al gioco uniperiodale G e di vedere cosa si ottiene.

La teoria dei giochi ripetuti che emerge da questo processo è estremamente ricca e profonda (buone rassegne — anche se un po' datate — sono Sorin 1992, Zamir 1992 e Forges 1992). Nei pochi minuti a disposizione posso solo sfiorare l'argomento. Ma lasciatemi ugualmente provare. Discuterò brevemente solo un aspetto, quello *cooperativo*. A grandi linee la conclusione è che

la ripetizione rende possibile cooperare.

Approfondiamo meglio questa conclusione. Usiamo il termine *cooperativo* per indicare ogni possibile risultato del gioco in cui ciascun giocatore non può *garantirsi*, senza la collaborazione degli altri, un risultato migliore. È importante sottolineare che, in generale, un risultato cooperativo *non è* un equilibrio; è il risultato di un accordo. Per esempio, nel familiare "dilemma del prigioniero", il risultato in cui nessun prigioniero confessa è un risultato cooperativo; non è nell'interesse di nessun giocatore eppure è meglio per entrambi dell'unico equilibrio.

Un esempio ancora più semplice è il gioco H seguente. Ci sono due giocatori, la signora Rigoni e il signor Colonna. La signora Rigoni deve decidere se lei e il signor Colonna riceveranno lo stesso importo — vale a dire 10 euro — o se lei riceverà dieci volte tanto e il signor Rigoni un decimo. Contemporaneamente, il signor Colonna deve decidere se intraprendere un'azione punitiva, penalizzando sia la signora Rigoni sia se stesso; se Colonna punisce, il tipo di divisione scelta non conta ed entrambi ottengono zero. La matrice del gioco è

	Abbozza	**P**unisce
Divide **E**quamente	10 10	0 0
Divide **I**ngordamente	1 100	0 0

Il risultato (**E, A**), che attribuisce 10 a ciascun giocatore, è un risultato cooperativo, poiché nessun giocatore può garantirsi una vincita più alta; ma come nel dilemma del prigioniero, non si può raggiungere in equilibrio.

Perché i risultati cooperativi sono interessanti, anche se non sono raggiungibili in equilibrio? La ragione è che si possono ottenere per contratto — con un accordo — in quei contesti in cui *si possono far rispettare i contratti.* E questi contesti sono numerosi. Per esempio, pensate al sistema di tribunali di una nazione. Il Talmud (Avot, 3,2) dice,

הוי מתפלל בשלומה של מלכות, שאלמלא מוראה, איש את רעהו חיים בלעו.

"Prega per la pace dello Stato, perché se non fosse l'autorità che esso esercita, gli uomini uno coll'altro si inghiottirebbero vivi." ([2]) Se i contratti si possono far rispettare, Rigoni e Colonna possono raggiungere il risultato cooperativo (**E, A**) con un accordo; altrimenti per consistenza (**E, A**) è a tutti gli effetti irraggiungibile.

La teoria dei giochi cooperativi che è sorta da queste considerazioni risale a circa dieci anni prima del lavoro di Nash (von Neumann e Morgenstern 1944). Essa è molto ricca e fruttuosa e, secondo me, ha fornito *le* intuizioni principali della teoria dei giochi. Tuttavia, non discuteremo qui queste intuizioni; sono per un futuro Premio Nobel in Economia.

Quello che vorrei discutere qui è la relazione fra la teoria dei giochi cooperativi e i giochi ripetuti. L'idea fondamentale è che la ripetizione funziona come un meccanismo coattivo *(enforcement mechanism)* che fa emergere i risultati cooperativi come *equilibri* — situazioni in cui ciascuno sta agendo nel suo interesse.

Intuitivamente, questo è ben noto e compreso. Le persone sono molto più cooperative nelle relazioni di lungo periodo. Sanno che c'è un futuro, che un comportamento inappropriato sarà punito domani. Un uomo d'affari che truffa i suoi clienti può ottenere un profitto nel breve periodo, ma non resterà a lungo sul mercato.

([2]) N.d.T. Pirquê Abôth, traduzione italiana a cura di Yoseph Colombo, Carucci Editore, Roma, 1985.

Vediamolo nel gioco H. Se il gioco è ripetuto solo una volta, la signora Rigoni guadagna certamente dividendo **I**ngordamente e il Signor Colonna **A**bbozzando. (Infatti, queste strategie sono *dominanti.*) A Colonna questo risultato non piacerà molto — non ottiene quasi nulla — ma non ci può fare niente. Tecnicamente, (**I, A**) è *l'unico* equilibrio.

Ma nel supergioco H^∞ c'*è* qualcosa che Colonna può fare. Egli può minacciare di **P**unire per sempre la signora Rigoni se prova anche solo una volta a dividere **I**ngordamente. Perciò non le converrà essere ingorda. Infatti, per H^∞ questo è proprio un equilibrio nel senso di Nash. La strategia della signora Rigoni è "gioca **E** per sempre"; la strategia di Colonna è "gioca **A** fino a quando la signora Rigoni gioca **E**; ma se lei gioca anche una sola volta **I**, gioca **P** da quel momento in poi."

Chiariamo bene questo punto. Ciò che mantiene l'equilibrio in questi giochi è la *minaccia di una punizione.* Se vi pare, chiamatela "MAD" — distruzione mutuamente assicurata — il motto della guerra fredda.

Occorre fare una precisazione affinché tutto funzioni: il tasso di sconto non deve essere troppo alto. Se è sopra il 10% — se 1 euro fra un anno vale meno di 90 centesimi oggi — allora la cooperazione è impossibile, perché è ancora conveniente per Rigoni essere ingorda. La ragione è che anche se Colonna la punisse — punendo anche se stesso! — da quel punto in poi, l'intera punizione eterna, valutata oggi, varrebbe complessivamente meno di 90 euro, che è il guadagno che la signora Rigoni ottiene oggi dividendo ingordamente invece che equamente.

Non mi riferisco semplicemente al tasso di sconto monetario, quello che si ottiene in banca. Mi riferisco al tasso di sconto personale, soggettivo. Affinché la ripetizione promuova la cooperazione, i giocatori non devono essere troppo ansiosi di ottenere risultati immediati. Il presente, l'oggi, non deve essere troppo importante. Se vuoi la pace adesso, potresti non ottenerla mai. Ma se hai tempo — se puoi aspettare — questo cambia l'intero quadro; *allora* puoi ottenere la pace. È uno di quei risultati paradossali, controintuitivi, della teoria dei giochi e, a dire il vero, di gran parte della scienza. Solo una o due settimane fa, ho saputo che il riscaldamento globale potrebbe causare un raffreddamento dell'Europa, perché potrebbe causare un cambio di direzione della Corrente del Golfo. Il riscaldamento potrebbe portare al raffreddamento. Volere la pace adesso può far sì che non si raggiunga mai — né adesso né in futuro. Ma se puoi aspettare, forse avrai la pace adesso.

La ragione è come sopra: le strategie che conducono alla cooperazione in un equilibrio del supergioco richiedono punizioni negli incontri successivi se la cooperazione non si ottiene adesso. Quando i tassi di sconto sono troppo alti, i giocatori sono più interessati al presente che al futuro, e farla franca oggi può più che compensare le perdite nel futuro. Questo rende inutilizzabile la minaccia di punire negli incontri successivi.

Per riassumere: nel supergioco H^∞ del gioco H, il risultato cooperativo (**E, A**) si può ottenere in equilibrio. Questo è un caso speciale di un principio molto più generale, noto come *Teorema del Volgo (Folk Theorem)* che dice che *ogni* risultato cooperativo di *ogni* gioco G si può ottenere come risultato di un equilibrio strategico del supergioco G^∞ — anche se quel risultato non è un equilibrio di G. Viceversa, ogni risultato di equilibrio strategico è un risultato cooperativo di G. In breve, per ogni gioco G abbiamo:

TEOREMA DEL VOLGO. *I risultati cooperativi di G coincidono con i risultati di equilibrio del supergioco G^∞.*

Per dirla in un altro modo, la ripetizione funziona come un meccanismo coattivo: rende la cooperazione raggiungibile quando essa, nel gioco ripetuto solo una volta, non lo è. Naturalmente, la precisazione di cui sopra continua a valere: affinché ciò funzioni, il tasso di sconto di tutti gli individui deve essere basso; le persone non devono essere troppo interessate al presente rispetto al futuro.

È opportuna un'ulteriore osservazione, anche essa legata al Premio del 1994. John Nash ha ottenuto il Premio per il suo studio dell'equilibrio. Reinhard Selten per il suo studio dell'equilibrio *perfetto*. Equilibrio perfetto significa, grosso modo, che la punizione è *credibile*; cioè *se* sei costretto a punire, dopo che hai punito, sei ancora in equilibrio — non hai incentivo a deviare.

Questo *non è* certamente vero per l'equilibrio del supergioco H^∞ del gioco H che abbiamo descritto. Se Rigoni gioca **I** malgrado la minaccia di Colonna, a Colonna *non* conviene punire per sempre. Questo solleva una domanda: nel gioco ripetuto, si può sostenere (**E, A**) non solo in un equilibrio strategico ma anche in un equilibrio *perfetto?*

La risposta è affermativa. Nel 1976 Lloyd Shapley — che io considero il più grande teorico dei giochi di tutti i tempi — ed io abbiamo dimostrato ciò che è noto come *Teorema del Volgo Perfetto*; un risultato simile fu trovato, indipendentemente e simultaneamente, da Ariel Rubinstein. Entrambi i risultati furono pubblicati solo molto tempo dopo (Aumann e Shapley 1994, Rubinstein 1994). Il Teorema del Volgo Perfetto dice che nel supergioco G^∞ di ogni gioco G, ogni risultato cooperativo di G si può ottenere come risultato di un equilibrio *perfetto* di G^∞ — come prima, anche se il risultato non è un risultato di equilibrio per G. Naturalmente, vale anche l'inverso. In breve, per ogni gioco G, abbiamo:

TEOREMA DEL VOLGO PERFETTO. *I risultati cooperativi di G coincidono con i risultati di equilibrio perfetto del supergioco G^∞.*

Quindi, ancora una volta, la ripetizione funziona come un meccanismo coattivo: rende la cooperazione raggiungibile quando essa non lo è nel gioco ripetuto una sola volta, anche se sostituiamo il concetto più stringente di equilibrio *perfetto* a quello di equilibrio strategico come criterio per valutare cosa è raggiungibile. Come sempre, vale la precisazione sul tasso di sconto: affinché questo funzioni il tasso di sconto degli agenti deve essere basso; essi non devono essere troppo interessati al presente rispetto al futuro.

La dimostrazione del Teorema del Volgo Perfetto è decisamente interessante; la illustrerò a grandi linee nel gioco H, per il risultato cooperativo (**E, A**). Prima di tutto, l'equilibrio prescrive di giocare sempre (**E, A**). Se Rigoni devia scegliendo di dividere **I**ngordamente, Colonna la punisce — gioca **P**. Tuttavia, non lo fa per sempre, ma solo fino a quando la deviazione di Rigoni diventa non conveniente. Questo, d'altra parte, da solo non è sufficiente; ci vuole qualcosa che motivi Colonna ad imporre la punizione. Ed ecco l'idea centrale della dimostrazione: se Colonna non punisce Rigoni, allora Rigoni deve punire

Colonna — giocando **I** — per non averla punita. Inoltre, il processo continua — ogni giocatore che non infligge la punizione prescritta è punito dall'altro giocatore per non averlo fatto.

Gran parte della società è tenuta insieme da questo tipo di ragionamento. Se un poliziotto ti ferma per eccesso di velocità, non gli offri una bustarella perché hai paura che ti denunci per aver tentato di corromperlo. Ma perché lui non accetta la bustarella? Perché ha paura che tu lo denunci per averla accettata. Ma perché dovresti denunciarlo? Perché se non lo fai, ti potrebbe denunciare per non averlo denunciato. E così via.

Questo ci porta all'ultimo tema. La teoria dei giochi cooperativi non delinea solo tutti i possibili risultati cooperativi ma sceglie anche fra di essi. Ci sono vari modi per farlo ma forse il più noto è la nozione di *nucleo (core)*, sviluppata da Lloyd Shapley all'inizio degli anni Cinquanta del secolo scorso. Un risultato x di un gioco appartiene al suo "nucleo" se nessun insieme S di giocatori può *ottenere di più* — cioè assicurare a ciascun giocatore in S un risultato migliore di quanto egli ottiene con x. Fra l'altro, il concetto di nucleo gioca un ruolo fondamentale nelle applicazioni economiche della teoria dei giochi; precisamente, le allocazioni del nucleo di un'economia con molti agenti, individualmente trascurabili, sono le stesse dell'equilibrio concorrenziale (detto anche Walrasiano) — cioè quelle allocazioni definite da un sistema di prezzi per cui l'offerta di ogni bene è uguale alla sua domanda (si vedano, per esempio, Debreu e Scarf 1963, Aumann 1964). Un'altra importante applicazione del nucleo è ai mercati per gli *abbinamenti (matching markets)* (per esempio, Gale e Shapley 1962, Roth e Sotomayor 1990). Il nucleo ha anche molte altre applicazioni (per alcune rassegne si vedano Anderson 1992, Gabszewicz e Shitovitz 1992, Kannai 1992, Kurz 1994 e Young 1994).

Ancora una volta c'è qui un collegamento forte con l'equilibrio nei giochi ripetuti. Quando in un gioco gli agenti sono in equilibrio (strategico), a nessuno di loro conviene seguire una diversa strategia. Un equilibrio *forte* è definito in modo simile, ma si richiede che deviare non sia conveniente per nessun *insieme* di giocatori — almeno uno dei giocatori che dovrebbero deviare non deve trarre vantaggio dalla deviazione. Quindi abbiamo il seguente

TEOREMA (Aumann 1959). *I risultati associati al nucleo di G coincidono con i risultati associati agli equilibri forti del supergioco G^∞.*

Nella sua tesi del 1950, in cui sviluppa la nozione di equilibrio strategico per cui ha ottenuto il Premio Nobel in Economia nel 1994, John Nash propose anche ciò che è noto come *Programma di Nash* — esprimere i concetti della teoria dei giochi cooperativi attraverso un gioco noncooperativo opportunamente definito; costruire un ponte fra la teoria dei giochi cooperativi e noncooperativi. I tre teoremi sopra presentati mostrano che la ripetizione costituisce proprio quel ponte — è una realizzazione del Programma di Nash.

Chiudiamo con un brano dal Profeta Isaia (2, 2–4):

והיה באחרית הימים. נכון יהיה הר בית יי בראש ההרים. ונישא מגבעות. ונהרו אליו כל הגוים. והלכו עמים רבים ואמרו, לכו ונעלה אל הר יי. אל בית אלהי יעקב. ויורנו מדרכיו, ונלכה באורחותיו; כי מציון תצא תורה. ודבר יי מירושלם. ושפט בין הגוים, והוכיח לעמים רבים: וכיתתו חרבותם לאיתים. והניתותיהם למזמרות; לא ישא גוי אל גוי חרב, ולא ילמדו עוד מלחמה.

"Alla fine dei giorni, [. . .] verranno molti popoli e diranno: "Venite, saliamo sul monte del Signore, [. . .], perchè ci indichi le sue vie e possiamo camminare per i suoi sentieri" [. . .]. Egli sarà giudice fra le genti e sarà arbitro tra molti popoli. Forgeranno le loro spade in vomeri, le loro lance in falci; un popolo non alzerà più la spada contro un altro popolo, non si eserciteranno più nell'arte della guerra" ([3]).

Isaia dice che le nazioni possono forgiare le loro spade per farne vomeri quando c'è un governo centrale — un Signore, riconosciuto da tutti. In sua assenza, forse si *può* avere la pace — nessuna nazione che sollevi la sua spada contro un'altra. Ma le spade devono restare — non possono essere trasformate in vomeri — e le nazioni devono continuare ad *imparare* la guerra, al fine di *non* combatterla!

([3]) N.d.T. Traduzione da Bibbia Tob, Antico testamento, Vol. 1, Editrice ElleDiCi, Leummann, Torino, pp. 803–4.

BIBLIOGRAFIA

[1] R. M. ANDERSON, *The core in perfectly competitive economies*, in [6] (1992), 413-457.
[2] R. J. AUMANN, *Acceptable points in general cooperative n-person games*, in *Contributions to the theory of games IV,* Annals of Mathematics Study 40, (a cura di) A. W. Tucker e R. D. Luce, Princeton University Press, Princeton, NJ (1959), 287-324.
[3] R. J. AUMANN, *Markets with a continuum of traders*, Econometrica, **32** (1964), 39-50.
[4] R. J. AUMANN, *Subjectivity and correlation in randomized strategies*, Journal of Mathematical Economics, **1** (1974), 67-96.
[5] R. J. AUMANN, *Correlated equilibrium as an espression of Bayesian rationality*, Econometrica, **55** (1987), 1-18.
[6] R. J. AUMANN - S. HART (a cura di), *Handbook of Game Theory, with economic applications,* volumi 1, 2, 3, Elsevier, Amsterdam (1992, 1994, 2002).
[7] R. J. AUMANN - L. S. SHAPLEY, *Long-term competition: a game-theoretic analysis*, in *Essays in Game Theory in Honor of Michael Maschler,* (a cura di) N. Megiddo, Springer, New York (1994), 1-15.
[8] G. DEBREU - H. SCARF, *A limit theorem on the core of an economy*, International Economic Review, **4** (1963), 235-246.
[9] F. FORGES, *Repeated games of incomplete information: non-zero-sum*, in [6] (1992), 155-177.
[10] J. J. GABSZEWICZ - B. SHITOVITZ, *The core in imperfectly competitive economies*, in [6] (1992), 459-483.
[11] D. GALE - L. S. SHAPLEY, *College admissions and the stability of marriage*, American Mathematical Monthly, **69** (1962), 9-15.
[12] Y. KANNAI, *The core and balancedness*, in [6] (1992), 355-395.
[13] M. KURZ, *Game theory and public economics*, in [6] (1994), 1153-1192.
[14] B. PELEG, *Axiomatizations of the core*, in [6] (1992), 397-412.
[15] A. ROTH - M. SOTOMAYOR, *Two-Sided Matching: A Study in Game-Theoretic Modeling and Analysis,* Econometric Society Monograph Series, Cambridge University Press, Cambridge (1990).
[16] A. RUBINSTEIN, *Equilibrium in supergames*, in *Essays in Game Theory in Honor of Michael Maschler*, (a cura di) N. Megiddo, Springer, New York (1994), 17-28.
[17] S. SORIN, *Repeated games with complete information*, in [6] (1992), 71-107.
[18] J. VON NEUMANN - O. MORGENSTERN, *Theory of Games and Economic Behavior,* Princeton University Press, Princeton, NJ (1944).
[19] R. WILSON, *Strategic analysis of auctions*, in [6] (1992), 227-279.
[20] H. P. YOUNG, *Cost allocations*, in [6] (1994), 1193-1236.
[21] S. ZAMIR, *Repeated games of incomplete information: zero-sum*, in [6] (1992), 109-154.

Robert J. Aumann,
Center for the Study of Rationality
and Department of Mathematics, The Hebrew University of Jerusalem, Israel.
E-mail: nobel@huji.ac.il.