La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Paola F. Antonietti

Tecniche di decomposizione di dominio, correttezza spettrale e prestazioni numeriche dei metodi Discontinuous Galerkin

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **1** (2008), n.2 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 211–214.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2008_1_1_2_211_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2008.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. I, Agosto 2008, 211-214

Tecniche di decomposizione di dominio, correttezza spettrale e prestazioni numeriche dei metodi Discontinuous Galerkin

PAOLA F. ANTONIETTI

La teoria dell'approssimazione mediante metodi *discontinuous Galerkin* (DG) di problemi di diversa natura e provenienti da diversi contesti applicativi è stata ampiamente sviluppata nel corso degli ultimi anni. Questa tesi contiene lo studio di tre applicazioni distinte dei metodi DG:

1. la costruzione ed analisi di metodi di decomposizione di dominio per la risoluzione iterativa dei sistemi lineari generati dai metodi DG;
2. l'approssimazione mediante metodi DG di problemi agli autovalori per operatori ellittici;
3. il confronto numerico di diversi metodi DG per il problema di Darcy.

1. – Tecniche di Decomposizione di Dominio.

Assegnati un dominio convesso, poligonale o poliedrico Ω e $f \in L^2(\Omega)$, si è considerato il seguente problema modello:

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{su } \partial\Omega. \tag{1}$$

Sia V_h uno spazio di funzioni polinomiali a tratti discontinue (di grado $\ell \geq 1$) su una mesh $\mathcal{T}_h$ di granularità $h > 0$; la formulazione discreta del problema 1 fornita da un'ampia classe di metodi DG (cf. [5]) è data da

$$\text{trovare } u_h \in V_h >: \qquad \mathcal{A}_h(u_h, v_h) = \int_\Omega f v_h \qquad \forall\, v \in V_h. \tag{2}$$

Ad esempio, posto $(\nabla_h v)|_K := (\nabla v)|_K$ $\forall K \in \mathcal{T}_h$ e $\forall v \in V_h$, per il metodo *symmetric interior penalty* $\mathcal{A}_h(\cdot,\cdot) : V_h \times V_h \to \mathbb{R}$ è definita come:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_h(u,v) = &\int_\Omega \nabla_h u \cdot \nabla_h v \,\mathrm{dx} - \sum_{F \in \mathcal{F}_h} \int_F \{\!\{\nabla_h\}\!\} u \cdot [\![v]\!] \mathrm{ds} \\ &- \sum_{F \in \mathcal{F}_h} \int_F [\![u]\!] \cdot \{\!\{\nabla_h v\}\!\} \mathrm{ds} + \sum_{F \in \mathcal{F}_h} \int_F \frac{a}{\mathrm{diam}(F)} [\![u]\!] \cdot [\![v]\!] \mathrm{ds}, \end{aligned} \tag{3}$$

dove $\mathcal{F}_h$ è lo scheletro della mesh, $a \geq a_{\min} \geq 1$ e $[\![\cdot]\!]$, $\{\!\{\cdot\}\!\}$ sono, rispettivamente, gli operatori di salto e di media (cf. [5]). Il condizionamento spettrale dei sistemi lineari ottenuti con discretizzazioni DG è dell'ordine $O(a\, h^{-2})$; di conseguenza la loro risoluzione con metodi iterativi sarà caratterizzata da una convergenza molto lenta. Gli ingredienti per la costruzione di precondizionatori di Schwarz, che possono essere utilizzati per accelerare la convergenza dei solutori iterativi, sono i seguenti.

Partizioni. Sia $\mathcal{T}_N$ una partizione di Ω in N sottodomini non sovrapposti, e siano $\mathcal{T}_h$ e $\mathcal{T}_H$ due griglie di granularità, rispettivamente, H e h tali che $\mathcal{T}_N \subseteq \mathcal{T}_H \subseteq \mathcal{T}_h$.

Solutori locali. Per $i = 1, \ldots, N$, sia V_h^i uno spazio ad elementi finiti discontintinui costruito sul sottodominio Ω_i e sia $\mathcal{A}_h^i(\cdot,\cdot) : V_h^i \times V_h^i \to \mathbb{R}$, la forma bilineare ottenuta approssimando con un metodo DG la restrizione a Ω_i del problema 1;

Solutore "coarse". Il solutore *corse* $\mathcal{A}_h^0(\cdot,\cdot)$ è definito come la restrizione di $\mathcal{A}_h(\cdot,\cdot)$ ad uno spazio V_h^0 di elementi finiti conformi/discontinui (di grado $0 \le \ell_C \le \ell$) associato alla reticolazione *coarse* $\mathcal{T}_H$;

Per $i = 0, \ldots, N$, sia $R_i^T : V_h^i \longrightarrow V_h$ il classico operatore di inclusione da V_h^i in V_h, e sia $P_i : V_h \longrightarrow V_h^i$ l'operatore di proiezione $\mathcal{A}_h^i(P_i u, v_i) = \mathcal{A}_h(u, R_i^T v_i)$ $\forall v_i \in V_h^i$. Gli operatori di Schwarz additivo e moltiplicativo sono definiti rispettivamente come:

$$P_{ad} := R_0^T P_0 + R_1^T P_1 + \ldots + R_N^T P_N, \quad P_{mu} := I - (I - R_N^T P_N) \ldots (I - R_1^T P_1)(I - R_0^T P_0),$$

È immediato verificare che gli operatori di Schwarz posso essere visti come opportuni precondizionatori per i sistemi lineari ottenuti mediante la discretizzazione con metodi DG. Sono stati dimostrati i seguenti risultati di convergenza (vedi anche [2, 3]).

TEOREMA 1. – *Il numero di condizionamento spettrale dell'operatore di Schwarz additivo, $\mathcal{K}(P_{ad})$, soddisfa*

$$\mathcal{K}(P_{ad}) \lesssim a\, \frac{H}{h}.$$

Inoltre, posto $E_{mu} := (I - R_N^T P_N) \ldots (I - R_1^T P_1)(I - R_0^T P_0)$, esiste $\overline{a} \ge 1$ tale che, se $a \ge \overline{a}$, esiste $C \ge 1$ tale che

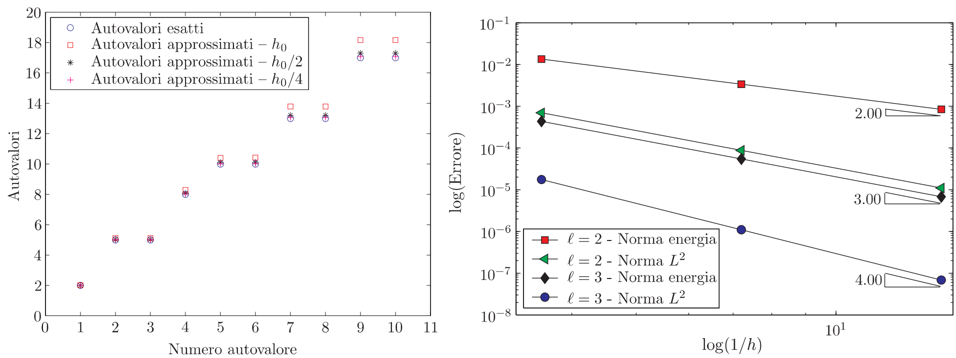
$$\|E_{mu}\|_{\mathcal{A}_h}^2 := \sup_{\substack{u \in V_h \\ u \neq 0}} \frac{\mathcal{A}_h(E_{mu} u, E_{mu} u)}{\mathcal{A}_h(u,u)} \le 1 - \frac{1}{C\, a H h^{-1}} < 1,$$

e quindi il metodo di Richardson applicato al metodo di Schwarz moltiplicativo converge.

2. – Correttezza Spettrale.

Si è studiato se i metodi DG approssimino correttamente le autocoppie del problema agli autovalori ellittico associato al problema modello 1. L'analisi condotta estende al caso di approssimazioni non conformi la teoria astratta sviluppata da

Descloux, Nassif e Rappaz per approssimazioni conformi di operatori in spazi di Banach. Si è dimostrato (vedi anche [1]) che condizione sufficiente affinchè un metodo DG fornisca un'approssimazione corretta del problema agli autovalori in questione è che esso approssimi in modo quasi-ottimale il corrispondente problema sorgente. Inoltre, i metodi DG simmetrici presentano convergenza ottimale sia per le autofunzioni che per gli autovalori (cf. Figura 1), mentre i metodi DG non simmetrici approssimano in modo ottimale le autofunzioni ma in modo subottimale gli autovalori. Esperimenti numerici hanno effettivamente confermato questi risultati.



(a) Griglie triangolari, $\ell = 1$. (b) Griglie Cartesiane, $\ell = 2, 3$.

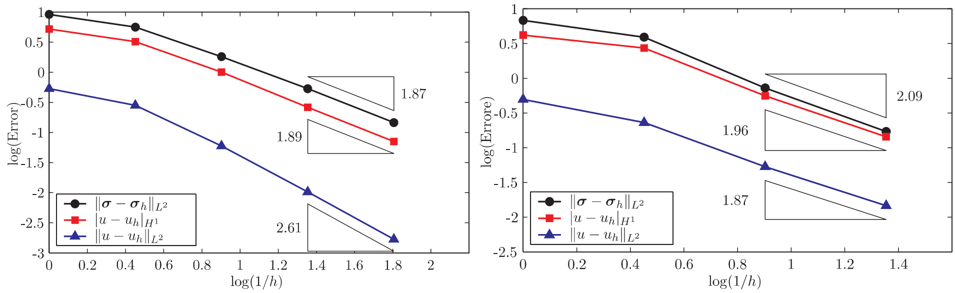
Fig. 1. – (a) Spettro discreto; (b) Grafici dell'errore della prima autofunzione.

3. – Prestazioni Numeriche.

Si sono considerate le prestazioni numeriche di un'ampia classe di metodi DG in forma mista per l'approssimazione del problema di Darcy:

$$\boldsymbol{\sigma} = -\kappa \nabla u \quad \text{in } \Omega, \qquad \nabla \cdot u = f \quad \text{in } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{su } \partial\Omega, \tag{4}$$

dove $\kappa > 0$ è il coefficiente di permeabilità, sia nel caso di κ regolare che discontinuo. Si è mostrato, inoltre, che le stime dell'errore, note nel caso bidimensionale, rimangono valide nei casi tridimensionali considerati nella tesi (cf. [4]). I risultati numerici, svolti su diversi tipi di reticolazioni, confermano la robustezza e le proprietà di approssimazione dimostrate teoricamente, sia nella norma L^2 della velocità $\boldsymbol{\sigma}$ che nella norma dell'energia della pressione u. Infatti, nel caso di soluzioni regolari, indicando rispettivamente con p ed ℓ i gradi polinomiali utilizzati per l'approssimazione di $\boldsymbol{\sigma}$ e u, si è osservato un ordine di convergenza $s = \min\{p+1, \ell\}$ (cf. Figura 2). Per quanto riguarda le stime nella norma L^2 della pressione, i risultati delle simulazioni numeriche condotte posso essere riassunti come segue. Nel caso di metodi DG simmetrici i risultati numerici confermano le stime teoriche: in tutti i casi presi in esame è stato



(a) $p = 1$, $\ell = 2$. (b) $p = 2$, $\ell = 2$.

Fig. 2. – Grafici dell'errore in un test tridimensionale (griglie Cartesiane): (a) Metodo DG simmetrico; (b) Metodo DG non simmetrico.

osservato un ordine di convergenza ottimale $s + 1$ (cf. Figura 2(a)). Nel caso di metodi DG non simmetrici, a causa della mancanza di consistenza del problema aggiunto, i risultati teorici forniscono una stima subottimale di ordine s. Le simulazioni condotte confermano questo risultato nel caso di s pari, mentre mostrano chiaramente un ordine di convergenza ottimale $s + 1$ nel caso di s dispari (cf. Figura 2(b)).

BIBLIOGRAFIA

[1] Antonietti P.F., Buffa A. and Perugia I., *Discontinuous Galerkin approximation of the Laplace eigenproblem*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **195** (2006), 3483-3503.

[2] Antonietti P.F. and Ayuso B., *Schwarz domain decomposition preconditioners for discontinuous Galerkin approximations of elliptic problems: non-overlapping case*, M2AN Math. Model. Numer. Anal., **41** (2007), 21-54.

[3] Antonietti P.F. and Ayuso B., *Multiplicative Schwarz methods for discontinuous Galerkin approximations of elliptic problems*, M2AN Math. Model. Numer. Anal., (2008), on–line version available.

[4] Antonietti P.F. and Heltai L., *Numerical validation of a class of mixed discontinuous Galerkin methods for Darcy flow*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **196** (2007), 4505-4520.

[5] Arnold D.N., Brezzi F., Cockburn B. and Marini L.D., *Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems*, SIAM J. Numer. Anal., **39** (2001/02), 1749-1779.

Dipartimento di Matematica "F. Brioschi", Politecnico di Milano
e-mail: Paola.Antonietti@mate.polimi.it
Dottorato di Ricerca in Matematica e Statistica
(sede amministrativa: Università di Pavia) - Ciclo XIX
Direttori di Ricerca: Dott.ssa Annalisa Buffa, IMATI–CNR Pavia;
Prof.ssa Ilaria Perugia, Università degli Studi di Pavia