La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Sara Barile

Esistenza di soluzioni per alcuni problemi ellittici non lineari

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **1** (2008), n.2 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 231–234.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2008_1_1_2_231_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2008.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. I, Agosto 2008, 231-234

Esistenza di soluzioni per alcuni problemi ellittici non lineari

SARA BARILE

In questa tesi di Dottorato è stato condotto lo studio di alcuni problemi ellittici non lineari provenienti dalla Fisica-Matematica. In particolare, si sono affrontate alcune delle problematiche relative ad alcune classi di equazioni ellittiche semilineari e quasilineari. Essa consiste di due parti. Nella prima parte, ci si è occupati della ricerca di soluzioni stazionarie $\psi(x,t) = e^{-iEt\hbar^{-1}}u(x)$, $E \in \boldsymbol{R}$, $t \in \boldsymbol{R}$, $u : \boldsymbol{R}^N \to \boldsymbol{C}$ per classi di equazioni di Schrödinger non lineari, provenienti dalla Meccanica Quantistica e dall'Ottica non lineare, del tipo

$$(1) \qquad i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(\frac{\hbar}{i}\nabla - A(x)\right)^2 \psi + U(x)\psi - f(|\psi|^2)\psi,$$

dove $\hbar$ è la costante di Planck, $L^{\hbar}_{A,U} := \left(\frac{\hbar}{i}\nabla - A(x)\right)^2 + U(x)$ denota un operatore di Schrödinger con potenziale (vettore) magnetico A e potenziale (scalare) elettrico U, vale a dire

$$L^{\hbar}_{A,U} := -\hbar^2 \Delta - \frac{2\hbar}{i} A \cdot \nabla + |A|^2 - \frac{\hbar}{i}\ \mathrm{div} A + U$$

ed $f(|\psi|^2)\psi$ è un termine non lineare. Dal punto di vista matematico, la ricerca di onde stazionarie ψ per (1) porta a cercare soluzioni $u : \boldsymbol{R}^N \to \boldsymbol{C}$ dell'equazione ellittica semilineare in $\boldsymbol{R}^N$:

$$(2) \qquad -\Delta^{\hbar}_{A} u + V(x)u = f(|u|^2)u$$

dove $V(x) = U(x) - E$. Nella tesi, ci si è occupati dell'esistenza e della molteplicità delle soluzioni di (2) nel limite semiclassico (i.e., $\hbar \to 0$) che descrive, dal punto di vista matematico, la transizione dalla Meccanica Quantistica alla Meccanica Classica. In particolare, si è studiato il problema di trovare una famiglia di soluzioni semiclassiche $u_\hbar$ che esibiscono un comportamento di *concentrazione* attorno ad un punto critico x_0 di V, cioè, soluzioni che hanno punti di massimo che convergono a tale punto x_0 mentre si annulla per $\hbar \to 0$ nel resto del dominio. A partire dai celebri lavori di A. Floer e A. Weinstein, *J. Functional Analysis* (1986) e P. Rabinowitz, *Z.A.M.P.* (1992), intense ricerche di carattere internazionale sono state dedicate, negli ultimi venti anni, allo studio di equazioni di Schrödinger non lineari nel caso non magnetico ($A = 0$) mediante differenti approcci da vari autori. Citiamo Y.G. Oh, *Comm. PDE*

(1988), X. Wang, *Comm. Math. Phys.* (1993), M. Del Pino, P. Felmer, *Calc. Var. PDE* (1996), A. Ambrosetti, M. Badiale, S. Cingolani, *A.R.M.A.* (1997), M. Grossi, *Math. Z.* (1997), Y.Y. Li, *Adv. Diff. Eq.* (1997), S. Cingolani, M. Lazzo, *J. Diff. Equations* (2000).

Il primo risultato di esistenza mediante argomenti variazionali, per equazioni di Schrödinger non lineari magnetiche ($A \neq 0$) per $\hbar$ fissato, $V(x) = 1$ ed un termine non lineare f avente crescita sottocritica (nel senso delle immersioni di Sobolev) risale al lavoro di M. Esteban e P.L. Lions, *PDE and the calculus of variations* (1989). Recentemente, K. Kurata, *Nonlin. Anal.* (2000), ha provato, nel limite semiclassico, l'esistenza e la concentrazione di soluzioni di minima energia attorno a minimi globali di V, sotto opportune ipotesi per A e V. In particolare, ha provato che la presenza di un campo magnetico A produce una fase nell'onda complessa che dipende da A, ma non influenza la concentrazione del modulo dell'onda complessa. Risultati di molteplicità sono stati provati da S. Cingolani, S. Secchi, *J. Math. Anal. Appl.* (2002) e *J. Math. Phys.* (2005), S. Cingolani, *J. Diff. Eq.* (2003) e risultati di esistenza per multi-picchi da T. Bartsch, E.N. Dancer, S. Peng, *Adv. Diff. Eq.* (2006), D. Cao, Z. Tang, *J. Diff. Eq.* (2006). Nella tesi e nel lavoro [2], sono stati ottenuti risultati di molteplicità per (2) nel caso di potenziali elettrici illimitati, vale a dire per

$$\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - A(x)\right)^2 u + (V(x) - \varepsilon(\hbar)W(x))u = f(|u|^2)u \quad \text{in } \boldsymbol{R}^N \tag{3}$$

in cui il potenziale elettrico $V(x)$ limitato viene perturbato da un potenziale $\varepsilon(\hbar)W(x)$ eventualmente singolare dipendente dal parametro $\hbar$, che permette di coprire i casi fisicamente interessanti $W(x) = \dfrac{1}{|x|}, \dfrac{1}{|x|^2}$. In particolare, il numero delle soluzioni di (3) è stato relazionato alla topologia dell'insieme dei minimi globali di V nel limite semiclassico, mediante argomenti topologici introdotti da J.M. Coron, *C.R. Acad. Sci.* (1984) e V. Benci, G. Cerami, *A.R.M.A.* (1991) e *Calc. Var. PDE* (1994). Tale risultato copre il caso di potenziali magnetici a crescita polinomiale e dunque illimitati.

Relativamente alla crescita critica di f, recenti risultati di esistenza e non esistenza per (2) nel caso $A = 0$ sono stati stabiliti rispettivamente da S. Cingolani, *Nonlin. Anal.* (2002) e da S. Cingolani, A. Pistoia, *Z.A.M.P.* (2004); nel caso magnetico, G. Arioli, A. Szulkin, *A.R.M.A.* (2003) si sono occupati del caso di potenziali A, V periodici ed $\hbar > 0$ fissato e J. Chabrowski, A. Szulkin, *Nonlin. Anal. TMA* (2005) hanno provato alcune proprietà di regolarità delle soluzioni. Nella tesi ed in [3], si sono cercate soluzioni $u : \boldsymbol{R}^N \to \boldsymbol{C}$ dell'equazione ellittica semilineare

$$\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - A_\varepsilon(x)\right)^2 u + V_\varepsilon(x)u = |u|^{2^*-2}u \quad \text{in } \boldsymbol{R}^N \tag{4}$$

dove $2^* = 2N/(N-2)$, $N > 4$, $A_\varepsilon(x) = \varepsilon A(x)$ e $V_\varepsilon(x) = \varepsilon^a V(x)$, $a \in [1,2]$, sono rispettivamente un potenziale magnetico ed un potenziale elettrico dipendenti da un parametro $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo. Tale ricerca si è tradotta nello studio di punti critici di opportuni funzionali in spazi di Sobolev, essendo il problema di natura variazionale. Mediante teoremi perturbativi sviluppati da Ambrosetti, Badiale, Cingolani, *Arch. Ration. Mech. Anal.* (1996) per $A = 0$ e da Ambrosetti e Malchiodi, *J. Functional Analysis* (1999) per il problema di Yamabe, ci si è ricondotti ai punti critici di una funzione ausiliaria Γ, detta funzione di Melnikov, sulla varietà *non-degenere* finito-dimensionale $Z = \{e^{i\sigma} z_{\mu,\xi} : \sigma \in S^1, \mu > 0, \xi \in \boldsymbol{R}^N\}$ dove

$$z_{\mu,\xi}(x)\kappa_N \frac{\mu^{(\frac{N}{2}-1)}}{(\mu^2 + |x-\xi|^2)^{\frac{N-2}{2}}}, \quad \kappa_N = (N(N-2))^{\frac{N-2}{4}}$$

sono tutte e sole le soluzioni di minima energia dell'equazione (4) per $\varepsilon = 0$. L'ipotesi sulla dimensione $N > 4$ assicura che le $z_{\mu,\xi}$ siano sommabili L^2 e che la Γ abbia un opportuno comportamento asintotico. Relativamente a tale problema, osserviamo che la presenza di un potenziale elettrico V non banale è cruciale per lo studio del comportamento asintotico della funzione di Melnikov Γ. Infatti, poichè si prova che $\lim\limits_{\mu \to 0^+} \dfrac{\Gamma(\mu,\xi)}{\mu^2} = \dfrac{1}{2} V(\xi) C_0$ (con C_0 costante), Γ è una funzione non-costante se $V(\xi) \neq 0$ per qualche $\xi \in \boldsymbol{R}^N$ da cui consegue il risultato di esistenza. Se poi V cambia segno, abbiamo un risultato di molteplicità dal momento che esistono 2 soluzioni. Quindi si può dire che V è in competizione con A. Nel caso in cui $V = 0$, congetturiamo che alcune ipotesi aggiuntive sul modulo di A dovrebbero essere fatte.

Nella seconda parte della tesi e nel lavoro [1], si è affrontato lo studio di alcune delle possibili estensioni per equazioni ellittiche quasilineari. Si è studiata l'esistenza di soluzioni positive per problemi ellittici quasilineari con crescita quadratica nel gradiente del tipo

$$-\Delta w(x) + g(x, w(x))|\nabla w(x)|^2 = a(x), \quad x \in \Omega,$$
$$w \in H_0^1(\Omega),$$

con Ω dominio limitato in $\boldsymbol{R}^N$ $(N \geq 3)$, $a \in L^q(\Omega)$ per qualche $q > N/2$, e $g : \Omega \times (0, +\infty) \to \boldsymbol{R}$ funzione di Carathéodory che può cambiare segno e può avere una singolarità in $w = 0$. L'obiettivo è stato quello di migliorare alcuni risultati di esistenza stabiliti recentemente da D. Arcoya, J. Carmona, P.J. Martìnez, *Nonlinear. Stud.* (2007) e D. Arcoya, P.J. Martìnez, *Rev. Mat. Iberoamericana* (2007) in cui la nonlinearità g è comunque singolare in $w = 0$ ma positiva. Il modello più semplice a cui si è fatto riferimento, è rappresentato dall'equazione

$$-\Delta w(x) + \frac{1}{w}|\nabla w(x)|^2 = a(x), \qquad x \in \Omega.$$

Lo studio di una nonlinearità g singolare e non necessariamente positiva è del tutto nuovo, persino nell'ambito delle equazioni ellittiche quasilineari a "crescita naturale". Infatti tale risultato costituisce pure un miglioramento di precedenti studi: a) per una nonlinearità $g : \Omega \times \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ di Carathéodory non singolare che verifica la condizione di segno

$$sg(x,s) \geq 0, \quad \forall s \in \boldsymbol{R}, \quad \text{per quasi ogni } x \in \Omega,$$

svolti da L. Boccardo, F. Murat, J.P. Puel, *Nonlin. PDE and their appl.* (1981) e *Ann. Scuola Normale di Pisa* (1984), A. Bensoussan, L. Boccardo, F. Murat, *Ann. Inst. Henri Poincarè* (1988) e b) per un termine di Carathéodory generale $g(x,w,\nabla w)$ che soddisfa una più generale condizione di segno che, nel caso di un termine puramente quadratico, non è altro che la suddetta condizione, da L. Boccardo, F. Murat, J.P. Puel, *Portugaliae Mathematica* (1982). Tale studio è stato motivato principalmente dalla ricerca di soluzioni positive per problemi ellittici semilineari del tipo

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= a(x)f(u(x)), \quad x \in \Omega, \\ u(x) &= +\infty, \quad x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

ove f è positiva di classe C^1 su $[0,+\infty)$, provenienti dallo studio dei moti subsonici di un gas (J.B. Keller, *Comm. Pure Appl. Math.* (1957), R. Osserman, *Pacific J. Math.* (1957)) e di superfici Riemanniane di curvatura costante negativa (C. Loewner, L. Nirenberg, *Contrib. to Anal.* (1974)). Tali soluzioni, usualmente conosciute come *esplosive* sono state studiate da molti autori, come C. Bandle , M. Marcus, *J. Analyse Math.* (1992), S. Tao, Z. Zhang, *Nonlin. Anal.* (2002), con un metodo di sotto e sopra soluzioni. Qui invece è stato sviluppato un nuovo approccio: mediante un opportuno cambio di variabile non lineare, si è stabilita l'equivalenza tra i risultati di esistenza dei due problemi.

BIBLIOGRAFIA

[1] ARCOYA D., BARILE S. and MARTÌNEZ-APARICIO P.J., *Singular quasilinear equations with quadratic growth in the gradient without sign condition*, sottomesso per la pubblicazione al Journal of Mathematical Analysis and Applications (2007), 1-14.
[2] BARILE S., *A multiplicity result for singular NLS equations with magnetic potentials*, Nonlinear Analysis, **68** (2008), 3525-3540.
[3] BARILE S., CINGOLANI S. and SECCHI S., *Single-peaks for a magnetic Schrödinger equation with critical growth*, Adv. Differential Equations, **11**, No. 10 (2006), 1135-1166.

Dipartimento di Matematica, Università di Bari
e-mail: s.barile@dm.uniba.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Università di Bari) - Ciclo XIX
Direttori di ricerca: Prof. David Arcoya, Università di Granada (Spagna),
Prof.ssa Silvia Cingolani, Politecnico di Bari