La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Antonio Segatti

Attrattori globali per alcuni problemi di evoluzione senza unicità

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **1** (2008), n.2 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 351–354.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2008_1_1_2_351_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI

http://www.bdim.eu/

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2008.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. I, Agosto 2008, 351-354

Attrattori globali per alcuni problemi di evoluzione senza unicità

ANTONIO SEGATTI

1. – Introduzione.

In questa tesi si studia il comportamento per tempi lunghi di alcune equazioni di evoluzione per le quali più di una soluzione può originarsi da un assegnato dato iniziale. Il problema della non unicità può essere dovuto a diversi motivi. Prima di tutto, può esserci una genuina non unicità di soluzioni (come, per esempio, in alcune equazioni di tipo "doubly nonlinear" o per equazioni di tipo gradient flow per potenziali non convessi, due esempi studiati dettagliatamente nella tesi). Secondariamente, può non essere noto un risultato di unicità. Questo è il caso, ad esempio, di alcune equazioni delle onde semilineari, dell'equazione di Navier-Stokes in tre dimensioni spaziali e del rilassamento iperbolico dell'equazione di Cahn-Hilliard in tre dimensioni. Per il rilassamento iperbolico dell'equazione di Cahn Hilliard in tre dimensioni (esempio studiato nel corso della tesi) il problema della non unicità compare perché c'è un gap tra la regolarità della soluzione e la regolarità necessaria per provare un teorema di unicità. La mancanza di unicità implica che le equazioni ed i sistemi di cui sopra non generano un semigruppo in alcun appropriato spazio delle fasi, più precisamente l'operatore soluzione

$$S(t) : u_0 \to u(t), \tag{1}$$

(che risulta essere un semigruppo nel caso con unicità) non risulta essere ben definito. Questo, in particolare, comporta che la nota teoria dei sistemi dinamici infinito dimensionali in [6] non sia applicabile per lo studio del comportamento per tempi lunghi dal punto di vista degli attrattori globali. Emerge dunque l'esigenza di costruire una teoria che estenda la teoria nota al caso senza unicità. In questa tesi, si è fatto uso della recente teoria dei *semiflussi generalizzati* introdotta da J.M. Ball ([1]) per trattare il problema della (eventuale) non unicità in tre tipi diversi di equazioni (si veda la successiva sezione). Si ricorda comunque che altri metodi sono disponibili, quali il metodo delle "traiettorie" e quello dei semigruppi multivoci. La teoria di Ball è intimamente legata al secondo metodo (semigruppi multivoci) descritto sopra, ma considera come oggetti base le soluzioni stesse. Più precisamente, un *semiflusso generalizzato* $\mathcal{F}$ è una famiglia di mappe (chiamate soluzioni) $g : [0, +\infty) \to \mathcal{X}$ (dove lo spazio topologico $\mathcal{X}$ è lo spazio delle fasi) tale per cui, dato un punto $g_0 \in \mathcal{X}$, esista un elemento $g \in \mathcal{F}$ con $g(0) = g_0$. Inoltre $\mathcal{F}$ dev'essere chiuso rispetto all'operazione di traslazione temporale (traslate di soluzioni sono ancora soluzioni) e di concatenazione. Infine, gli elementi di $\mathcal{F}$ devono verificare una proprietà di semicontinuità superiore rispetto a successioni di dati iniziali. Più precisamente, ogni successione $g_n \in \mathcal{F}$ tale che $g_n(0) \to g_0$ in $\mathcal{F}$ ammette una sottosuccessione g_{n_k} tale che $g_{n_k}(t) \to g(t)$ in $\mathcal{F}$ per ogni t e $g \in \mathcal{F}$ con $g(0) = g_0$. Una volta introdotto il concetto di *semiflusso generalizzato* è poi possibile, ricalcando la teoria nota, introdurre opportune definizione di insieme invariante, attraente ed infine di *attrattore globale*. Infine, in completa analogia a quanto avviene nel caso con unicità, la combinazione di proprietà di dissipazione del semiflusso generalizzato (l'esistenza cioè di un insieme limitato $B \subset \mathcal{X}$ tale che per ogni $g \in \mathcal{F}$ si abbia $g(t) \in B$ per tempi sufficientemente grandi) e di proprietà di compattezza, sono necessarie e sufficienti per l'esistenza e l'unicità di un attrattore globale.

2. – Risultati.

In questa tesi (i cui risultati sono pubblicati nei lavori [4], [3] e [5]), usando la teoria dei *semiflussi generalizzati* si è dimostrata l'esistenza di un attrattore globale per

1. Equazioni di evoluzione doppiamente nonlineari del tipo

$$A(u'(t)) + \partial\varphi(u(t)) - \lambda u(t) \ni 0, \text{ in } (0, +\infty)$$

   dove A è un operatore massimale monotono (anche multivoco) definito in uno spazio di Hilbert H, $\partial\varphi$ è il sottodifferenziale dell'analisi convessa della funzione convessa, propria e semicontinua inferiormente φ, λ è una costante non negativa ([4]).

2. Equazioni di tipo gradient flow di potenziali non convessi ϕ in spazi di Hilbert, e.g.

$$u'(t) + \nabla\phi(u(t)) \ni 0 \text{ in } (0, +\infty)$$

   dove $\nabla\phi$ è un opportuna nozione di sottodifferenziale ([2] e [3]) per il funzionale non convesso, proprio e semicontinuo inferiormente ϕ ([3]).

3. Rilassamento iperbolico dell'equazione di Cahn-Hilliard in tre dimensioni spaziali, i.e.

$$\varepsilon u_{tt}(t) + u_t(t) - \Delta(-\Delta u(t) + \phi(u(t))) = 0 \text{ in } \Omega \times (0, +\infty),$$

   dove Ω è un dominio limitato e regolare di $\boldsymbol{R}^3$, $\varepsilon > 0$ e ϕ è una funzione reale con crescita al più cubica ([5]) .

Tutte e tre le equazioni scritte sopra sono caratterizzate dall'assenza di unicità. Più precisamente, per le equazioni di tipo doubly non linear, il quadro astratto che noi consideriamo fa si che ci sia una genuina non unicità di soluzioni. Allo stesso modo, la non convessità del potenziale ϕ comporta che la soluzione dell'equazione di tipo gradient flow non sia unica. Infine, a causa della bassa regolarità della soluzione, per l'equazione di Cahn-Hilliard non si è in grado né di mostrare un teorema di unicità e neppure di provare la non unicità. Il primo passo per applicare la teoria di Ball, consiste nel dimostrare che l'insieme delle soluzioni del problema differenziale che stiamo studiando forma un *semiflusso generalizzato*. Tale verifica riposa in un'appropriata scelta del concetto di soluzione e del relativo quadro funzionale e può essere non banale. Da un lato infatti, le soluzioni devono essere sufficientemememte deboli da verificare la proprietà di esistenza, dall'altro la nozione di soluzione deve essere sufficientemente robusta perché sia verificata la proprietà di semicontinuità superiore. Tale robustezza può infine essere in conflitto con la concatenazione. Ad esempio, visto che l'esistenza di soluzioni per problemi a derivate parziali è spesso provata tramite un'opportuno schema di approssimazione, una scelta naturale per il canditato *semiflusso generalizzato* potrebbe essere quella dell'insieme di tutte quelle soluzioni che sono limite, in un senso opportuno, di soluzioni approssimanti. Ebbene, se la convergenza delle soluzioni approssimanti avviene rispetto ad una topologia sufficientemente forte, allora l'insieme delle cosiddette *limiting solutions* verifica la semicontinuità superiore (verifica inoltre banalmente anche la traslazione). Purtroppo però, la proprietà di concatenazione non vale. Infatti, grazie alla non unicità, le successioni approssimanti possono non avere gli stessi indici. In ogni caso, in [3] viene mostrato che i risultati di Ball sul comportamento per tempi lunghi di *semiflussi generalizzati* si estendono quasi completamete al caso in cui venga a mancare la proprietà di concatenazione. La perdita della proprietà di concatenazione fa si che l'attrattore che si costruisce ha proprietà di invarianza più deboli.

In questo spirito, viene affrontato lo studio del comportamento per tempi lunghi del rilassamento iperbolico dell'equazione di Cahn-Hilliard in tre dimensioni [5]. In questo caso, le soluzioni approssimanti sono le soluzioni di uno schema di Faedo Galerkin ed il *semiflusso generalizzato* (debole) è costituito da quelle soluzioni che sono approssimabili con lo schema di Galerkin (a priori, a causa della non unicità, tale insieme può essere un sottoinsieme proprio dell'insieme di tutte le soluzioni del problema). Viene quindi mostrata l'esistenza dell'attrattore globale (debole), che risulta essere a sua volta approssimabile nella semidistanza di Hausdorff dall'attrattore (finito dimensionale) delle soluzioni dello schema di Galerkin.

Veniamo ora ai risultati riguardanti le equazioni di tipo doubly non linear e di tipo gradient flow. Per quanto riguarda le prime, condizioni di crescita opportune sull'operatore A e di coercività sul funzionale convesso φ garantiscono l'esistenza (tramite un procedimento di regolarizzazione e passaggio al limite) di almeno una soluzione con dato iniziale nel dominio $D(\varphi)$ di φ. L'insieme di tutte le soluzioni, risulta poi essere un *semiflusso generalizzato* (dunque vale anche la concatenazione). In particolare, la prova della semicontinuità superiore e della compattezza del semiflusso viene condotta utilizzando in modo opportuno il principio di selezione di Helly. Lo studio del comportamento per tempi lunghi di equazioni di tipo gradient flow per potenziali non convessi trae spunto dai risultati di esistenza provati in [2]. In [3] dunque, viene mostrato che l'insieme di tutte le soluzioni con dato iniziale in $D(\phi)$ forma un *semiflusso generalizzato* dissipativo. La semicontiuità superiore viene provata combinando la teoria delle misure di Young con una appropriata chain rule per il "sottodifferenziale" $\nabla\phi$. I risultati astratti sono poi applicati a vari tipi di evoluzioni non convesse. In particolare, viene discusso il comportamento per tempi lunghi delle soluzioni del modello di phase field quasistazionario.

BIBLIOGRAFIA

[1] BALL, J.M., *Continuity properties and global attractors of generalized semiflows and the Navier-Stokes equation*, J. Nonlinear Sci., **7** (1997), 475-502.

[2] ROSSI, R., and SAVARÉ, G., *Gradient flows of non convex functionals in Hilbert spaces and applications*, ESAIM Control Optim. Calc. Var., **12** (2006), 561-614.

[3] ROSSI, R., SEGATTI, A. and STEFANELLI, U. *Attractors for gradient flows of non convex functionals and applications*, Arch. Ration. Mech. Anal., **187** (2008), 91-135.

[4] SEGATTI, A. *Global attractors for a class of doubly nonlinear abstract evolution equations*, Discrete Contin. Dyn. Syst., **14** (2006), 801-820.

[5] SEGATTI, A., *On the hyperbolic relaxation of the Cahn-Hilliard equation in 3-D: approximation and long time behavior*, M3AS Math. Models. Methods. Appl. Sci., **17** (2007), 411-438.

[6] TEMAM, R., *Infinite dimensional dynamical systems in mechanics and physics*, Springer-Verlag (1988).

WIAS - Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics, Berlin
e-mail: segatti@wias-berlin.de
Dottorato in Matematica
(sede amministrativa: Università di Milano) - ciclo XVIII
Direttore di Ricerca: Prof. Pierluigi Colli (Università di Pavia)