La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Laura Catastini

Concretamente astratto, anzi...simulabile

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **2** (2009), n.1, p. 31–69.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2009_1_2_1_31_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2009.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. II, Aprile 2009, 31-69

Concretamente astratto, anzi... simulabile

LAURA CATASTINI

Nec manus, nisi intellectus, sibi permissus, multum valent:
instrumentis et auxilibus res perfecitur.
Francesco Bacone

1. – Introduzione

Recentemente una serie di risultati convergenti in psicologia e neurobiologia hanno indicato un ruolo importante delle rappresentazioni percettivo-motorie, in particolare di quelle anticipatorie, in molte funzioni cognitive, riconoscendo alla mente l'uso di rappresentazioni interne. Sulle rappresentazioni anticipatorie, cioè sulla capacità del sistema percettivo-motorio di anticipare le conseguenze sensoriali delle proprie azioni, si fondano capacità cognitive più complesse, come ad esempio quella di immaginare ciò che non è mai stato esperito (ed in alcuni casi non può esserlo), pur restando ancorata (grounded) alla realtà concreta. In questo senso negli ultimi anni sono stati presentati, in accordo con studi sperimentali quali quelli dei «neuroni specchio» (Rizzolati et al. (1996)) modelli teorici di rappresentazioni interne come «simulazioni» (Barsalou, (1999)) o saggi sul senso del movimento (Berthoz, (1997)). Il pensiero rappresentativo così generato è capace di concepire in modo endogeno ciò che non è immediatamente percepibile, o ancora di ricostruire ambienti percettivi memorizzati, come nel caso della *visual imagery* (Kosslyn, (1983)).

Nel 2000 ha avuto risonanza internazionale, il libro di Lakoff e Nuñez, [2000], scritto da un linguista e da uno psicologo, «Da dove viene la matematica», a volte discusso anche in modo severo (1), nel quale è assegnato un ruolo importante alla proiezione del ragionamento senso-motorio nel ragionamento astratto. Questo lavoro ha portato tra noi il concetto di «embodied mind» o «embodiment» con il quale si sono misurati in questi anni altri studiosi. Louis Radford (2003) studiando l'apprendimento della matematica da un punto di vista linguistico-semiotico, contrappone al pensiero embodied di Lakoff e Nuñez quello derivante da una esperienza «empracticed». Con impronta vygotskiana egli sottolinea anche l'importanza fondamentale del sistema di segni e di strumenti interagente con la mente dello studente nello sviluppo del suo apprendimento. Per sottolineare la natura di «prodotto culturale» dei segni e degli strumenti e la loro importanza nell'interazione con gli studenti, l'autore introduce il pregnante concetto di "semiotic systems of cultural meanings". Scrive Radford: «*an account of the embodied nature of thinking must come to terms with the problem of the relationship between the body as a locus for the constitution of an individual's subjective meanings and the historically constituted cultural system of meanings and concepts that exists prior to that particolar individual's actions*». (L. Radford et al. (2005)).

Queste ampie riflessioni sul rapporto tra movimento, pratica e pensiero hanno portato nella matematica un approccio didattico basato su una metodologia di tipo laboratoriale, che favorisce un apprendimento «percettivo-motorio» da affiancare al tradizionale «simbolico-ricostruttivo», apprendimento quest'ultimo che richiede astrazioni successive a partire da un codice simbolico, quale, ad esempio, quello del linguaggio scritto. Si vedano per esempio i lavori del gruppo coordinato da F. Arzarello a Torino (F. Arzarello, O. Robutti, 2008)

Il presente lavoro intende avanzare proposte personali nate non solo in occasione di lavori teorici su neurocognizione e didattica della matematica ma anche nella pratica professionale attuata negli istituti di istruzione secondaria superiore, nella SSIS del Lazio e nel progetto Lauree Scientifiche (2006). Saranno mostrati alcuni aspetti non evidenti che legano il pensiero percettivo ai processi di astrazione nell'ambito

(1) Vedi ad esempio la recensione di G. Lolli http://www2.dm.unito.it/paginepersonali/lolli/articoli/laknun.pdf

dell'educazione matematica e il loro ruolo in una normale attività scolastica. In particolare sarà brevemente delineato il pensiero percettivo motorio e il suo rapporto con i processi astratti, e saranno date definizioni che permettono un nuovo approccio alla dicotomia concreto-astratto, con esemplificazioni didattiche riguardanti gli istituti medi superiori. Ringrazio in modo particolare il referee per l'attento e prezioso contributo che ha dato nella revisione di questo lavoro.

2. – Percettivo-motorio versus simbolico-ricostruttivo

I risultati degli studi sull'influenza della percezione del movimento sulle attività cognitive più alte sono arrivati velocemente anche alla pedagogia e alla scuola. In *Computer per un figlio,* affrontando il problema dei processi di apprendimento, Antinucci ne contrappone due e in particolare afferma

> Il primo sistema, quello percettivo — motorio, è quello di base [...] lo abbiamo in comune con i primati, le scimmie. Questo significa che si è evoluto da parecchie decine di milioni di anni. Il secondo sistema, invece, quello simbolico — ricostruttivo è un portato del linguaggio, che si evolve molto più tardi solo all'interno della linea umana: come è noto, le scimmie non hanno linguaggio. È perciò un sistema secondario che si aggiunge al primo, e si aggiunge solo nell'ultima fase dell'evoluzione umana, quella che ha prodotto Homo Sapiens, e cioè l'uomo moderno [....] Si tratta quindi di un sistema molto meno adattato ed evoluto del primo ([2]).

Parlando di scimmie Antinucci vuole sottolineare un aspetto dell'apprendimento che abbiamo in comune con loro, l'apprendimento percettivo-motorio, tratto così sviluppato in quegli animali da permettere di parlare di comportamenti intelligenti.

Anche ne *La scuola si è rotta* ([3]) Antinucci contrappone l'apprendimento percettivo-motorio a quello simbolico-ricostruttivo, che si basa sulla lavoro di decodificazione di materiale presentato in forma simbolica — scritture su libri, ad esempio, che vanno lette — e della ricostruzione mentale delle cose a cui si riferiscono. Nel libro pare

([2]) F. Antinucci (1999) pagg. 64-65.
([3]) F. Antinucci, (2001).

affermarsi una supremazia «naturale» dell'apprendimento motorio in quanto più evoluto.

> Il sistema primario, quello percettivo — motorio, è più spontaneo, più naturale, per così dire: opera senza che ce ne rendiamo conto, non ci fa fare fatica ed è anche molto più veloce. Il sistema secondario, quello simbolico — ricostruttivo, è invece più «forzato»: richiede che lo governiamo coscientemente, che ci concentriamo sulle sue operazioni, e quindi ci fa stancare facilmente, ed inoltre è molto più lento ([4]).

Questa supremazia poi giustificherà e sosterrà la tesi dell'autore: la nascita di nuove forme di comunicazione, quali ad esempio quelle informatiche, deve portare all'abbandono delle più vecchie. Tra libro e computer vi è un'inevitabile contrapposizione che deve indurre la scuola a scegliere metodi di istruzione che evitino quelle operazioni «forzate» lente e faticose legate ai libri di testo che, grazie all'invenzione della stampa, si sostituirono nelle botteghe all'insegnamento per apprendistato, coinvolgente, produttivo ed efficace perfino quando praticato da allievi analfabeti

Sembra insomma che, nell'approccio alla conoscenza, si auspichi la vittoria di quella istintiva, ludica tendenza all'esplorazione concreta del mondo che abbiamo in comune con i primati, che potrebbe, se ben usata, sostituire la faticosa decodifica dell'astratto «universo gutenberghiano» ([5]). Tutto ciò sarebbe reso possibile dall'uso del computer, che «*fa copie della realtà utili ad agirci sopra*». Esempio principe di questa attività è il videogioco che l'autore propone provocatoriamente, consapevole della possibile reazione negativa da parte dei professionisti della scuola. Il computer simula la realtà in un gioco interattivo e come tale «insegna» come la realtà stessa. Lasciando che gli studenti percorrano a loro piacere e sufficientemente a lungo il reticolo esperenziale che il computer offre loro, Antinucci è convinto che «*gli allievi «inciamperanno» fatalmente nelle cose «importanti»: la grande differenza sarà che allora queste cose saranno importanti anche per loro, e non solo per noi* ([6]).»

([4]) F. Antinucci, (1999), pagg. 65-66.
([5]) Termine usato da Maragliano in R. Maragliano, (1998).
([6]) F. Antinucci (2001), pag. 108.

La proposta di Antinucci desta perplessità nei matematici che sottolineano l'incontestabile carattere deduttivo della matematica, scienza assiomatico-deduttiva per eccellenza e che ritengono che questo suo carattere irrinunciabile non si possa trasmettere con attività laboratoriali ma vada salvaguardato con una astratta trasmissione simbolica, al contrario di quanto accade per scienze come la fisica nelle quali il metodo induttivo e sperimentale è non solo ammesso ma addirittura intrinseco allo spirito della disciplina.

Sulle argomentazioni di Antinucci ci sono voci contrarie anche dal punto di vista cognitivo: «*Dire che la matematica scolastica deriva dalla matematica intuitiva non significa dire che ne deriva con facilità* ([7])». Così Steven Pinker, psicologo evoluzionista del dipartimento di psicologia dell'università di Harvard e fuori da sospetti di conservatorismo viscerale, comincia un attacco deciso e ben circostanziato ai metodi americani di educazione alla matematica. Dice una cosa semplice ma non confutabile: l'uomo non è mentalmente equipaggiato per la matematica scolastica, può sviluppare naturalmente un linguaggio, ma le sue abilità di base, naturali, percettivo-motorie, sviluppate girando in lungo e in largo tra i fatti esperenziali offerti dalla realtà, si limitano, per la matematica, a determinare la quantità in piccoli insiemi, capire relazioni tipo «più di» e «meno di», a usare parole per semplici operazioni di conteggio che si appoggino a dita e a varie parti del corpo. Solo grazie a simboli scritti e a un'istruzione formale, storicamente patrimonio di pochi, le invenzioni e i concetti matematici si sono potuti sviluppare e accumulare lungo i millenni, e si sono potuti assemblare per formarne altri, sempre più complicati. Anche per questo noi facciamo matematica e le scimmie no, e neanche i popoli analfabeti. I simboli scritti hanno potuto servire da supporto per il calcolo e la concettualizzazione, neutralizzando tra l'altro gli svantaggi che i forti limiti della memoria a breve termine pongono alla capacità del nostro pensiero.

I concetti matematici, continua Pinker, nascono mettendo insieme vecchi concetti in modo da formare nuove, utili combinazioni. Ma questi vecchi concetti sono assemblaggi a loro volta di concetti ancora

([7]) S. Pinker (2000) pag. 364.

più vecchi. Ogni sottoassemblaggio è tenuto insieme da processi interiorizzati: con una guida appropriata e una intensa pratica i concetti aderiscono fra loro formando concetti più grandi, e sequenze di passaggi vengono sintetizzate in un passaggio solo.

> La matematica è spietatamente cumulativa, per l'intero percorso a ritroso, fino al sapere contare fino a dieci.[...] Sottoposti a test matematici, i bambini americani ottengono i risultati peggiori di tutto il mondo industrializzato. [...] Esercizi e pratica, le vie che portano all'automaticità, sono definiti meccanicistici e considerati nocivi per la comprensione [ma] senza la pratica che sintetizza una sequenza incompleta di passaggi facendola diventare un riflesso mentale, l'allievo continuerà a costruire strutture matematiche a partire dagli elementi minimi [...] Se manca la consapevolezza di ciò che la mente è stata progettata per compiere nell'ambiente in cui ci siamo evoluti, l'attività innaturale chiamata istruzione formale ha poche probabilità di avere successo ([8])».

Pinker osserva che la padronanza della matematica è fonte di grande soddisfazione ma è la ricompensa di un duro lavoro che, di per sé, non sempre è piacevole. Aggiunge che senza la profonda considerazione in cui sono tenute in altre culture le abilità matematiche conquistate con fatica è improbabile che in America questa padronanza si sviluppi, e vede un'analogia con quel che succede per l'imparare a leggere. Negli Stati Uniti, osserva, domina la tecnica detta «linguaggio totale», nella quale l'idea del linguaggio come istinto umano che si sviluppa naturalmente è stata distorta nell'asserzione, improbabile da un punto di vista evoluzionistico, che anche *leggere* sia un istinto umano che si sviluppa naturalmente. Il metodo antiquato di collegare le lettere ai suoni viene sostituito dall'immersione in un contesto collettivo ricco di testi, e i bambini non imparano a leggere.

Innovazione o conservatorismo? Ludica e concreta esplorazione sensoriale di copie della realtà o difesa della classica natura astratta del concetto matematico? La tecnologia e le nuove teorie sul percettivo-motorio sono suggestivamente invitanti, ma la competenza che si forma col mestiere di insegnante porta alla prudenza, diffida delle picconate e teme le soluzioni estreme. La mia posizione personale,

([8]) S. Pinker, (2000) pagg. 365-366-367.

esposta in un lavoro [9] dell'ormai lontano 1990, è ancora quella di vedere decisamente dannose le forti contrapposizioni tra il pensiero verbale (simbolico-ricostruttivo) e il pensiero immaginativo (percettivo-motorio), e di cercare invece le sinergie tra essi, come sarà mostrato nel seguito di questo lavoro.

3. – Percezione e rappresentazioni interne nel '900

Nel processo di passaggio dai modelli deterministici ai modelli contemporanei, in psicologia, sono state determinanti le elaborazioni teoriche di Lev Vygotskij, e Jean Piaget, pionieri del Costruttivismo, che affermarono il ruolo attivo della mente umana e la sua capacità di rielaborare informazioni e dare significato al mondo. Partendo da un comune approccio costruttivistico della conoscenza, Piaget e Vygotskij sono giunti alla definizione di teorie distinte inerenti lo sviluppo della mente. Il contrasto e le reciproche influenze tra il modello epistemico piagetiano e la concezione storico-culturale di Vygotskij hanno portato la psicologia moderna a esplorare campi e discipline diverse e le hanno permesso di integrarsi con altre scienze in una visione interdisciplinare.

J. Bruner, in occasione di un suo intervento celebrativo del comune centenario dei due studiosi, così ne riassunse le idee:

> La genialità di Piaget fu quella di aver riconosciuto il ruolo fondamentale delle operazioni di tipo logico nell'attività mentale umana. Quella di Vygotskij fu di aver riconosciuto che il potere intellettivo dell'individuo dipendeva dalla capacità di appropriarsi della cultura e della storia dell'uomo come strumenti della mente. Se Piaget ci ha sensibilizzato alle capacità analitiche del gruppo di quattro trasformazioni INRC e delle sedici proposizioni binarie spiegando le facoltà della mente, Vygotskij ha risvegliato in noi il significato del *dictum* di Francesco Bacone: «*Nec manus, nisi intellectus, sibi permissus, multum valent: instrumentis et auxilibus res perfecitur*». [Né la mano né l'intelletto da soli bastano: sono resi perfetti dagli strumenti e dagli aiuti che impiegano] [10].

La posizione logicista è senz'altro l'elemento che più si impone nella produzione di Piaget. Il suo assunto per cui *«il ragionamento non è*

(9) L. Catastini (1990).
(10) In O. Liverta Sempio (1998) pag. 22.

altro che il calcolo implicito nelle operazioni proposizionali ([11])» è oggi messo in crisi dalla scoperta dei limiti del ragionamento ipotetico-deduttivo degli adulti, ma nelle sue opere molti elementi restano di grande modernità. Le intuizioni dei suoi studi sulle rappresentazioni centrate sulle azioni, sui comportamenti sensori-motori dei bambini e sulla loro 'internalizzazione' mediante assimilazione e accomodamento, trovano straordinarie coincidenze con alcune scoperte recenti della neuropsicologia che riguardano i processi percettivo-motori. Alain Berthoz, nel suo libro *Il senso del movimento* ([12]), conferma punti di contatto tra le ultime teorie neurofisiologiche sulla simulazione interna dell'azione e le teorie proposte da Piaget in un suo scritto ([13]) del 1949.

Anche le concezioni di Vygotskij che riguardano la funzione degli strumenti culturali nella cognizione e nell'apprendimento si ritrovano ampiamente, come vedremo in seguito, nelle indicazioni pedagogiche e didattiche dei nostri giorni.

Nelle opere e nelle pratiche didattiche della Montessori troviamo infine una miniera di pensieri chiari e profondi sull'importanza dell'intervento del pensiero percettivo motorio nelle questioni fondamentali riguardanti l'apprendimento.

Eccone un esempio tratto da Psicogeometria ([14]):

> L'attività interiore è il capolavoro della natura creatrice — e noi non possiamo intervenire direttamente in esso. Siccome però la mente si costruisce a mezzo di una continua attività che è centrale (la mente) e periferica (i sensi, il movimento), possiamo assistere dall'esterno al suo lavorio. La periferia, cioè, di quella attività totale — ci è accessibile. Infatti è continuo il ricorso dei sensi all'ambiente e l'attività motrice si riversa di continuo sopra di esso. [...] Noi dunque è verso la periferia che ci rivolgiamo come educatori. Invece di abbandonare il fanciullo alle sue ricerche in un mondo troppo complicato e inadatto, gli prepariamo, gli mettiamo a portata della sua periferia un mondo più ristretto e appropriato ai suoi bisogni: e cercando di interpretare questi dalle manifestazioni periferiche, vi corrispondiamo.

([11]) B. Inhelder, J. Piaget, (1971) pag. 303.
([12]) A. Berthoz, (1998).
([13]) J. Piaget, (1949) pagg. 242-258.
([14]) M. Montessori, (1934).

> Perciò la nostra è una *educazione dalla periferia* che sostituisce *l'educazione verso il centro* del vecchio modo. Il centro è lasciato libero di svolgersi secondo l'energie naturali; e non è necessario per noi conoscerlo, nè ripromettercene precise e determinate corrispondenze. Necessario è rispettarlo.

Il pensiero immaginativo è stato ammesso nella scienza cognitiva piuttosto tardi, anche perché veniva rifiutato il metodo introspettivo con cui si indagava su di esso. I lavori di S. Kosslyn (1983) hanno portato al pieno riconoscimento delle immagini mentali come forma di conoscenza non riconducibile a nessun altra modalità e alla costruzione di una apprezzabile teoria dell'immaginazione mentale. In essi manca però la correlazione con i modelli mentali.

Il modello mentale è la rappresentazione analogica di un determinato stato di cose, cioè, secondo la definizione di Johnson-Laird, è "*una copia mentale interna che possiede la stessa struttura di rapporti del fenomeno che rappresenta* ([15])». In altre parole, a parità di immagine di un ente, il modello mentale corrispondente cambia in funzione della sua destinazione cognitiva. Per esempio, una singola rappresentazione può originare due diversi modelli mentali, rappresentanti l'uno l'Italia, l'altro uno stivale. L'immaginazione, secondo queste definizioni, è più strettamente legata alla percezione sensoriale del modello mentale. Johnson-Laird (1983) applicherà queste idee alla questione cruciale delle inferenze mentali con lo scopo di scoprire come la percezione e i modelli mentali possano dare adeguatamente conto dei processi ragionativi.

Sempre negli anni '80 si afferma una teoria della percezione, elaborata da Gibson, intesa come immediata e dinamica azione di *cognizione* sull'ambiente. L'ambiente gibsoniano è un concetto originale, i suoi oggetti non rimandano a una realtà oggettiva ma si costituiscono in relazione alle caratteristiche e alla vita dell'animale che vi si trova. Così la superficie liquida di uno stagno è ([16]) «*sostegno*» per una pulce d'acqua e «*sprofondamento*» per un gatto. E, ancora, tali superfici possono essere «arrampicabili» o «cadibili» o «battibili». Le caratteristiche dell'ambiente si formano contestualmente alla pratica che l'animale ha di essi e alle *affordances* che la sua struttura organica scopre negli elementi dell'am-

([15]) P. Johnson Laird (1983) pag. 49.
([16]) Nel senso di "predispone l'organismo a...".

biente stesso. «To afford» significa «permettere», *affordances* in italiano diventerebbe «permettibilità» ma il termine inglese, non tradotto, si è imposto in tutte le lingue. L'autore specifica ulteriormente:

> Un fatto importante che riguarda le *affordances* che l'ambiente offre, è che esse sono in un certo senso oggettive, reali e fisiche, a differenza di valori e significati che si ritiene di solito che siano soggettivi, fenomenici e mentali. Ma di fatto un'*affordance* non è proprietà oggettiva né soggettiva; o, se si vuole, è entrambe le cose. Un'*affordance* taglia trasversalmente la dicotomia tra oggettivo e soggettivo e ci aiuta a comprenderne l'inadeguatezza. È allo stesso tempo un fatto ambientale e un fatto comportamentale. È sia fisica che psichica , eppure non è né l'una né l'altra. Un'*affordance* si indirizza in entrambe le direzioni, in quella dell'ambiente e in quella dell'osservatore. ([17])

L'ambiente così si risolve in uno sfondo indistinto di segni nel quale le figure si creano solo attraverso l'interazione con tutti gli organi di senso di un dato organismo. Ad ogni specie, ad ogni organismo, il proprio sfondo e le proprie figure. Gli oggetti dell'ambiente acquistano così un carattere ontologico ibrido, né solo fisici né solo psichici, come dice Gibson, un po' l'uno e un po' l'altro, un po' concreti e un po' astratti.

4. – Percezione e concettualizzazione

«*La percezione non è una rappresentazione: è un'azione simulata e proiettata sul mondo* ([18])» afferma Berthoz nel presentarci l'idea cardine di un suo lavoro del 1998. Il senso del movimento, sostiene l'autore, è un sesto senso in grado di anticipare ciò che sta per accadere nella realtà dello spazio circostante. Il nostro cervello, già nella fase percettiva, non è analogo a un calcolatore che computando si adatta al mondo esterno, ma piuttosto a un simulatore, nel senso di «simulatore di volo». I sensi insieme sono capaci di escogitare ipotesi, creare modelli e inventare soluzioni che proiettano sul mondo, perché si trovano in un corpo che interagisce, muovendosi, con un mondo che si muove.

([17]) J. Gibson, [1999] pag. 208.
([18]) A. Berthoz, [1998] pag. 124.

Berthoz quindi propone di concepire il cervello come un simulatore biologico che già nella fase percettiva predice, attingendo dalla memoria e formulando delle ipotesi. Le facoltà cognitive più raffinate si sono sviluppate grazie alla possibilità di movimento dell'organismo, secondo criteri evolutivi che hanno premiato processi percettivi dinamici e anticipatori, capaci di adattare il comportamento a un ambiente altrettanto dinamico nel quale, afferma ancora Berthoz: «*Bisogna anticipare, indovinare, [...] il cervello è prima di tutto una macchina biologica con cui giocare di anticipo*» ([19]). La percezione allora diventa simulazione di eventi, è anticipazione dinamica, è spesso un processo automatico, involontario.

Questa continua attività del pensiero che ne dinamizza le rappresentazioni, non si limita a fare da base iniziale dei pensieri, ma li accompagna nei loro sviluppi. Pensate ad esempio a quando si deve sollevare un oggetto di peso non trascurabile sospeso a un elastico, si farà un movimento molto diverso dal solito perché si anticiperanno le proprietà elastiche del sistema.

Percepire un oggetto è immaginare le azioni implicate dal suo uso, ed è anche astrarre, selezionare tratti particolari e ignorarne altri. Supponiamo per esempio di voler prendere una tazza da un tavolo pieno di altre stoviglie ma che, mentre stiamo per afferrarla, siamo distratti e prendiamo al suo posto un boccale. L'esperienza comune ci dice che individuiamo immediatamente l'errore, che ce ne accorgiamo prima ancora di guardare. Su quali basi fisiologiche è possibile riconoscere l'errore e correggerlo? Questo è possibile se esiste, già prima che il movimento inizi, una configurazione neurale di «aspettative» con la quale l'azione viene confrontata e corretta nel caso che se ne discosti in maniera significativa. Localizzare un oggetto vuol dire rappresentarsi i movimenti da fare per raggiungerlo, e non si tratta di rappresentarsi i movimenti stessi nello spazio, ma solo le sensazioni muscolari che accompagnano questi movimenti.

La simulazione, interpretando Berthoz, è dunque un'attività di pensiero nella quale si riproduce sensorialmente e dinamicamente una situazione con lo scopo di prevederne e esplorarne le possibilità.

([19]) A. Berthoz, [1998] pag. XIII.

Questa accezione è stata sviluppata da Barsalou (1999) che sostiene il punto di vista per cui anche le rappresentazioni cognitive sono inerentemente *percettuali*, legate a stati di attivazione nati nei sistemi senso-motori. Questo punto di vista si contrappone alla concezione proposizionale della conoscenza, nella quale le strutture interne e i simboli che sostengono la cognizione non trovano corrispondenze con gli stati percettuali che li producono. Gli stati percettuali nascono nei sistemi senso-motori e non appena uno stato percettuale sorge, l'attenzione selettiva ne estrae un sottoinsieme che viene immagazzinato in modo permanente nella memoria a lungo termine. Nei successivi recuperi questa memoria percettuale può funzionare simbolicamente rappresentando referenti nelle parole e entrando nella manipolazione simbolica. I simboli percettuali ([20]) non esistono indipendentemente l'uno dall'altro nella memoria a lungo termine ma vengono organizzati in un *simulatore*, sistema biologico che permette di costruire specifiche simulazioni di una entità o di un evento in loro assenza, analoghe alle simulazioni possibili nell'immagine mentale. Mentre la collezione di simboli concettuali si sviluppa, si costituiscono anche le rappresentazioni che sottostanno alla cognizione. In questa visione uno stesso sistema rappresentazionale sottende percezione e cognizione, linguaggio e immagini ad esso correlate.

Il punto di vista presentato da Barsalou ha il pregio, tra l'altro, di correlare ai simulatori sia le immagini mentali che i modelli mentali, assimilando così le due rappresentazioni, pur distinguendole per i livelli di rappresentazione. Viene in questo modo superata la disomogeneità tra le due modalità immaginative presente nei lavori di Kosslyn.

5. – La percezione e il concretizzare in matematica

La matematica è la materia astratta per eccellenza. Difficile dire cos'è concreto in matematica. Eppure la distinzione corre silenziosa tra

([20]) I simboli percettuali, per Barsalou, sono la registrazione dell'attivazione neurale che si presenta durate la percezione, momento nel quale sistemi di neuroni nelle regioni senso motorie catturano informazioni riguardo eventi percepiti nell'ambiente e nel corpo.

gli oggetti e i simboli, mai definita ma implicita nelle interazioni tra docenti e discenti, e a volte produce forzature didattiche.

Arnheim, il noto studioso della psicologia dell'arte, raccomanda, parlando di bambini:

> Sembra estremamente urgente che gli educatori superino la nozione per cui le relazioni quantitative possono essere poste in contatto con l'esperienza percettiva diretta soltanto se rappresentate da oggetti pratici dell'ambiente. Le relazioni quantitative si riferiscono a un universo percettivo proprio che non si può né ignorare né contraddire impunemente. Sono rappresentate nel modo migliore da un sistema di «forme pure», per esempio nella forma dei ben noti bastoncini di Cuisenaire, e nelle immagini mentali che questi bastoncini lasciano dietro di sé ([21]).

I bambini non hanno nessuna difficoltà nel riconoscere le qualità astratte, continua Arnheim. Ad esempio nei loro disegni essi presentano spontaneamente, direttamente, l'andamento diritto delle gambe mediante linee parallele dritte. L'uomo, percependo le forme complesse della realtà, le stilizza in forme semplici, facili per i sensi e comprensibili per la mente, le sintetizza in immagini anche non-mimetiche. Tali immagini, sebbene astratte nei riguardi delle situazioni più complesse da esse rappresentate, sono entità particolari, percepibili, perfettamente accessibili alla mente di un bambino. Un materiale di tipo montessoriano, ad esempio, introduce i bambini alle proprietà percettive delle quantità pure in se stesse, oltretutto in sinergia con l'acquisizione di termini matematici appropriati. I numeri sono colonne di altezza diversa. La dimensione orizzontale dello spazio è impiegata per confronto e per dare la sequenza delle colonne, i numeri pari possono spezzarsi in due, quelli dispari hanno elementi centrali oppure resti. Le differenze tra giusto ed errato saltano subito agli occhi. Qualunque tentativo di «vitalizzazione» non farebbe che allontanare il bambino dal forte contatto percettivo con i compiti che lo assorbono. Se gli si presentasse una storia su conigli e su cavoli, proprio pensare a questi animali e vegetali gli renderebbe difficile estrarre le quantità.

([21]) R. Arnheim, (1974) pag. 256.

Questo invito all'attenzione della tipologia di scelte «concretizzanti» vale anche per età più avanzate. Il pensiero rappresentativo è sollecitato dalle descrizioni verbali e simboliche e in base ad esse crea modelli, nei quali sviluppare immagini produttive: «*Mentre l'attenzione selettiva si focalizza su parole scritte o parlate, le memorie schematiche estratte da stati percettuali si integrano nei simulatori, che successivamente produrranno simulazioni di queste parole nel riconoscimento, nell'immaginazione e nella produzione* ([22])». I simboli linguistici, cioè, si sviluppano insieme ai simboli percettuali associati. Il simbolo linguistico è la memoria schematica di un evento percepito, dove l'evento percepito è una parola detta o scritta, e si sviluppa nei simulatori biologici come un qualunque simbolo percettuale. Man mano che i simulatori per le parole si sviluppano nella memoria, vengono associati con simulatori per le entità o gli eventi a cui si riferiscono. All'interno di un simulatore per un concetto i suoi vari aspetti vengono associati a un simulatori per le parole e viene prodotto un campo semantico che rispecchia il campo concettuale sottostante. Nel riconoscere una parola il sistema cognitivo attiva il simulatore per il concetto associato in modo da simulare un possibile referente. In questo modo il linguaggio permette di coordinare e di guidare le simulazioni dei conversanti.

Presentare situazioni concrete è dettato dall'esigenza di far compiere astrazioni successive ai soggetti che prendono contatto con la matematica, ed è cosa non banale. perché gli oggetti da costruire sono molti e ontologicamente cangianti, parlando da un punto di vista cognitivo, a seconda della trattazione. Ad esempio il due, mentre si contano mele, è un concreto aggettivo numerale, sta per «due mele». Il 2 da solo invece è un'astrazione, la cui presentazione scolastica cambia col cambiare delle conoscenze. Può essere un numero pari, tra quelli sempre divisibili, o un numero primo, tra quelli meno divisibili di tutti, o un punto isolato su una semiretta che parte da 0, o un numero di passi su una retta, a destra, a partire dallo 0, o a destra a partire da -7 se è sommato a -7. Il 2 seguito da un particolare sostantivo, per esempio «decimi», dovrebbe tornare ad essere un concreto aggettivo numerale, ma i due termini, fusi insieme in

([22]) Barsalou, (1999) pag. 592.

un'astrazione, diventano un elemento di **Q** che trova posto pure lui sui punti della retta, che così si fa densa di numeri.

Seguendo i percorsi didattici riscontriamo come spesso negli studenti si formino rappresentazioni curiose: la retta è fatta di infiniti punti che tengono su tutti quei numeri, ma va bene così perché tanto i punti non contano nulla. E se chiedi se sommando due segmenti uguali hai un segmento con il doppio di punti in genere senti dire di si. Così immaginano, e tutto questo non viene loro corretto perché queste rappresentazioni interne difficilmente traspaiono dall'elaborazione dei loro esercizi. La loro capacità di immaginare e di rendere coerenti tutte queste «cose» a un certo punto può venir meno, parole e rappresentazioni, nel crescere della complessità e del rigore della disciplina non garantiscono la produzione di modelli mentali coerenti e semanticamente esaustivi. Nel tempo si creano così misconcezioni che invece di essere legate a *modelli instabili,* in corso di sistemazione per la costruzione di un concetto e passibili di cambiamenti correttivi, si radicano in *forti e stabili modelli parziali* incoerenti tra loro Queste misconcezioni invece di essere tappe temporanee e approssimative convergenti verso una concettualizzazione corretta, diventano resistenti a qualunque cambiamento, e si cristallizzano in ostacoli ([23]) permanenti ai futuri apprendimenti. Si crea allora nello studente una deleteria disaffezione per la materia e la propensione ad affidarsi a procedure algoritmiche o mnemoniche. Preparazione «scolastica» si diceva una volta, in questo caso.

6. – Concretamente astratto anzi...simulabile

Il concreto e l'astratto sono concetti che tutti usiamo, concetti usuali, praticati, ma dal significato che forse in certi ambiti diventa ambiguo e incerto.

"*«Che cos'è astratto?» Il padre risponde, dopo aver alquanto esitato: «L'astratto è ciò che non si può toccare». E il bambino: «Ah, ho capito, come Dio e l'edera velenosa!»* ([24])" scherza Arnheim, mentre

([23]) L'argomento è oggetto di trattazione in di B. D'Amore (1999).
([24]) R. Arnheim, (1974) pag. 185.

affronta il problema del rapporto concreto-astratto, analizzando quali sono i concetti travianti dell'astrazione. Nel suo senso letterale il termine astrazione è negativo, «abstrahere» significa tirar fuori da qualche luogo, estrarre. Il senso di rimozione che ne deriva permane nel significato comune per cui l'astrazione è psicologicamente un processo che abbandona totalmente i dati sensori iniziali. Ma:

> ... traviante è chiamare concreto quanto è fisico e astratto quanto è mentale.... Un tavolo è concreto, ma si suppone che la libertà sia astratta. Il mio amico è concreto ma l'amicizia non lo è. Questa distinzione apparentemente semplice comporta, anzitutto, un pasticcio ontologico perché tavolo può essere o un oggetto materiale o un oggetto percepito, ricordato o pensato ([25]).

Di pasticci ontologici se ne devono affrontare molti. Il «nulla» nel quale Aristotele immerge il mondo è un ente astratto o concreto? Se è astratto come può intervenire attivamente in una questione fisica? Se è concreto come può esser nulla? Ancora, consideriamo la frase: «L'aereo, persa la rotta, precipitò dal cielo in un burrone, esattamente sull'equatore». Cos'è concreto tra quanto è menzionato in questa frase? L'aereo si dirà. ... la rotta è concreta?...il burrone?... L'incertezza si insinua, eppure non si richiedono sottili distinzioni filosofiche, solo una risposta di semplice senso comune, quindi dovrebbe essere facile, ma chi se la sente di giurare che la rotta non è un fatto concreto e il burrone è un'astrazione? E l'equatore, che dire dell'equatore?

Il vocabolario può aiutare. Ci dice che concreta è ogni cosa che può essere percepita dai sensi. Il mare è concreto. Il burrone non lo posso calpestare, né afferrare, ma *nel burrone* posso cadere. In qualche modo però intuiamo che il burrone non esiste. Esistono le sue sponde. Il cielo lo lascio a voi, ma pensate quanta potenza concretizzante sta nelle parole!

E l'equatore? Gottlob Frege, che con il «wirklich» e l' «unwirklich» ha combattuto battaglie drammatiche, distingue, e considera l'equatore una cosa oggettiva ma non attuale ([26]). È un fatto oggettivo che un

([25]) R. Arnheim, (1974) pag. 185.

([26]) Per Frege (1884) è non attuale ciò che non può aver effetti causali e in particolare ciò che non agisce direttamente o indirettamente sui sensi. Quindi, in questa ottica, l'equatore è un ente oggettivo ma non un oggetto concreto. Come gli enti matematici.

punto della superficie terrestre vi giaccia sopra, e possiamo addirittura calcolarne la lunghezza, come per la rotta, ma non possiamo calpestarlo né inciamparvi. Siamo concretamente sopra a un'idea astratta, terreno perfetto per le astrazioni del pensiero percettivo-motorio!

Arnheim ribadisce la difficoltà di definire l'astratto come assoluto:

> L'amicizia è concreta come qualsiasi amico particolare. Dio e la nozione di Dio sono altrettanto concreti quanto il concetto di edera velenosa o qualsiasi campione di tale pianta. Ma qualsiasi oggetto, evento o idea diventa un universale quando è trattato come rappresentante di una popolazione di eventi. Diventa un'astrazione quando viene trattato come distillato derivato da qualche entità o specie di entità più complessa.
>
> Sotto nessun aspetto i termini «concreto» e «astratto» possono servire a ripartire in due contenitori distinti i fatti dell'esperienza. Non sono antinomici né si riferiscono a popolazioni mutuamente esclusive. La concretezza è una proprietà di tutte le cose, fisiche o mentali, e molte tra tali cose medesime possono pure servire come astrazioni ([27]).

Davanti alla contrapposizione concreto-astratto mi ritrovo allora con questi termini piuttosto inquinati, per cui proverò a dare nuove accezioni (definizioni?) di *concreto* e di *astratto*, che corrispondano alla mia esperienza di docente di matematica e ai movimenti del pensiero miei e dei miei alunni. Movimenti che, negli anni, hanno svuotato questi termini del loro statico contenuto categorico e me li hanno trasformati in essenze dinamiche.

Per fare ciò mi serve innanzitutto costruire qualche definizione. Dirò che:

DEFINIZIONE 1. – *Un ente mentale, o un insieme di enti mentali, è* ***simulabile*** *se permette inferenze con carattere predittivo.*

DEFINIZIONE 2. – *Chiamasi* ***alone inferenziale****, l'insieme delle inferenze, consce o inconsce, rese possibili dal grado di simulabilità di un ente mentale o di un insieme di enti mentali.*

([27]) R. Arnheim, (1974) pag. 186.

Il grado di simulabilità degli enti mentali può essere molto variabile. È alto quando, ad esempio, il contenuto concettuale e immaginativo legato ad esperienze multisensoriali si crea "*per immersione* ([28])", cioè in momenti nei quali sono contestualmente presenti alla percezione i movimenti, gli oggetti reali e le parole che vi si riferiscono. Attorno agli enti mentali si forma in questo caso un ricco alone inferenziale.

Supponiamo ad esempio che a una persona venga fatto vedere un piccolo cartoncino con qualcosa stampato sopra e le venga detto che è un biglietto d'autobus, fornendone una definizione adeguata. In mancanza di qualsiasi esperienza diretta, il concetto "biglietto d'autobus" si identificherà quasi totalmente con la definizione e la persona non sarà capace di inferire il vasto insieme dei comportamenti e dei significati correlati alla definizione stessa Per lei il biglietto d'autobus resterebbe un concetto poco simulabile, con un limitato alone inferenziale. Per contro l'abitante di una grande città che abbia acquisito per pratica diretta lo stesso concetto, ne avrebbe un alto grado di simulabilità.

In definitiva, diremo che, data una mente e una situazione concettuale, quanto maggiore è il grado predittivo che può raggiungere il pensiero, tanto più alto è il grado di simulabilità della situazione in oggetto. Intendo collegare il grado di simulabilità di un ente alla sua *concretezza* o *astrazione*:

DEFINIZIONE 3. – *Un ente mentale è «**tanto più concreto**» quanto **più è simulabile**. Per converso, sarà «**tanto più astratto**» quanto meno è simulabile.*

Come si vede la definizione non stabilisce categorie contrapposte e l'astratto e il concreto sono le due facce della posizione di un indicatore su una unica scala di valori che misurano il grado della *simulabilità* di un ente mentale, che può variare da mente a mente.

Così il biglietto d'autobus di cui parlavamo prima può risultare concreto per un soggetto e rimanere astratto per l'altro. Ancora: se una persona di media cultura legge "i fantini frustavano i cavalli fumanti

([28]) Termine proposto da Maragliano (1998) che tratta della dicotomia "astrazione/ immersione".

nella pista gelida ([29])" in genere «vede» (cioè esplicita in una immagine o modello mentale le prime inferenze immediate) i fantini con la frusta non in bocca ma in mano, non in piedi sulla pista ma seduti su cavalli che stanno correndo. Se può inferire tutte queste cose ed altre, in momenti successivi, anche se non sono esplicitate nella frase, allora per la persona l'evento mentale ha un certo grado di concretezza.

Se invece si legge «il triangolo ABC ha i lati che misurano rispettivamente 3, 4, 5» solo i matematici di solito «vedono» che il triangolo è rettangolo, gli altri no, anche se conoscono il teorema di Pitagora. Possiamo dire allora che il triangolo è affare concreto per i matematici, mentre per qualunque altro mortale resta ampiamente astratto. Per chi ne fa un mestiere o la usa con competenza, la matematica diventa un dominio concreto come il banco di lavoro per un artigiano, ma per chi non la pratica a sufficienza e nel modo giusto questa materia resta spaventosamente, irrimediabilmente astratta. Gli studenti, e non solo i meno vivaci, di solito si paralizzano mentalmente davanti a un problema di matematica. Smettono di pensare. Non per indolenza ma per la povertà degli aloni inferenziali che gli oggetti matematici si portano dietro ([30]).

Mi preme sottolineare come, a mio avviso, il curare didatticamente l'aspetto deduttivo della matematica nei propri allievi risieda, per l'insegnante, anche nella costruzione guidata di adeguati aloni inferenziali degli oggetti matematici e nel curarne la formalizzazione ([31]).

7. – I mezzi semiotici nell'apprendimento e nella attività di simulazione

Esistono oggi numerosi studi sugli aspetti linguistico-semiotici implicati nell'apprendimento della matematica. Tra questi i lavori di Radford, di forte impronta vygotskijana, per il quale l'insegnante copre un ruolo essenziale nell' attività esplorativa e l'interazione

([29]) In L. Catastini, (1990).
([30]) Vedi L. Catastini, (1990).
([31]) Non è qui il caso di approfondire l'argomento, ma le inferenze formali non sono naturali per il pensiero, che segue piuttosto, se non adeguatamente educato, logiche legate a fattori pragmatici o conversazionali.

sociale e culturale opera come uno strumento di facilitazione per l'apprendimento e per lo sviluppo di capacità cognitive. Il ruolo della parola è quindi fondamentale dato che «... *svolge la funzione di mezzo nella formazione di un concetto, poi ne diventa il simbolo* ([32])». Grande importanza nello sviluppo cognitivo ha l'apprendimento formale che procede attraverso attività condivise di ricerca di significati, di dialogo, argomentazione, discussione e confronto. Attraverso il dialogo si realizza infatti una funzione di comunicazione e di aiuto tra le menti e una conseguente interiorizzazione di significati.

Per Radford l'interazione con i compagni e con l'insegnante, mediata da un sistema complesso di segni e di strumenti culturali, contribuisce a costruire nello studente conoscenze e concetti, secondo una teoria dell'insegnamento e dell'apprendimento della matematica che si ispira a una visione antropologica e storico-culturale del sapere: «*L'insegnamento della matematica è tematizzato come l'acquisizione da parte della comunità di una forma di riflessione sul mondo guidata da modi epistemici-culturali storicamente formati* ([33])». Radford vede l'apprendimento come il processo di trasformazione attiva degli oggetti concettuali culturali in oggetti interiori. La trasformazione avviene tramite il processo di *oggettificazione*, inteso nella sua accezione etimologica di «rendere concreto, evidente, percepibile». Questo processo di oggettivazione è particolarmente problematico in matematica, i cui enti sono astratti, ed è facilitato dal ricorso a *mezzi semiotici di oggettivazione* del sapere, legati a pratiche sociali. «*La comunicazione - intesa come attività sociale e culturale mediata dalla lingua, dai simboli scientifici e dagli strumenti tecnologici - appare come uno dei mezzi privilegiati per appropriarsi del sapere costituito storicamente che la scuola veicola* ([34]).»

Il coordinamento di diversi mezzi semiotici di oggettivazione coinvolti in un processo di costruzione di significati della conoscenza viene chiamato da Radford «*nodo semiotico* ([35])». Radford esplicita:

([32]) L. S. Vygotskij, (1992) pag. 137.
([33]) L. Radford (2006), [31] pag. 103.
([34]) L. Radford, (2006) [32].
([35]) L. Radford (2003).

> I mezzi semiotici di oggettivazione offrono possibilità diverse per svolgere un compito per designare oggetti ed esprimere intenzioni. (...) Occorre quindi saper individuare i mezzi semiotici di oggettivazione per ottenere oggetti di coscienza ([36]) .

Tra i mezzi semiotici di oggettivazione troviamo gli artefatti ([37]), concreti strumenti di lavoro portatori di ricche significazioni culturali, con i quali si possono sviluppare interazioni pratiche, linguistiche, concettuali, che, sotto la guida dell'insegnante, trasmettano i significati culturali in obiettivo ([38]).

Ricerche di questo tipo hanno contribuito a ideare possibili applicazioni didattiche, portando alla concezione «laboratoriale» del lavoro in classe. Oggi la normale attività scolastica prevede l'uso di strumenti, per lo più di tipo informatici, ma la maggior parte della costruzione di significati degli oggetti matematici è legata ancora al modo con cui il docente, nelle sue lezioni, struttura verbalmente i principi della disciplina, e alla loro applicazione negli esercizi. La concezione laboratoriale invece si sta sperimentando in tutta Italia dal 2005/2006 nel progetto nazionale Lauree Scientifiche. Nel 2006 sono state avviate gran parte delle attività, nelle quali il lavoro di progettazione è stato concertato tra docenti universitari e docenti di scuola superiore. Ho partecipato in prima persona all'esperienza, come responsabile scientifico del laboratorio «Le geometrie della visione» per il Dipartimento di Matematica dell'università di Roma «Tor Vergata».

Presento brevemente alcuni aspetti significativi di questa esperienza ([39]), nella quale è stato sperimentato come l'uso di strumenti che permettono la manipolazione concreta della realtà e l'interazione linguistica tra i partecipanti contribuisce a creare oggetti matematici ben

([36]) L. Radford, (2005).

([37]) Per approfondimenti su questo argomento vedere M. G. Bartolini Bussi, M. Maschietto. *Macchine matematiche*, Springer-Verlag Italia, 2006.

([38]) L'interazione con uno strumento ha gli aspetti di "strumentazione" e "strumentalizzazione", cioè le pratiche sullo strumento stesso, nel momento in cui si impara a usarlo e maneggiarlo — azioni pragmatiche —, e le pratiche che hanno un fine di costruzione concettuale — azioni epistemiche —. Vedi P. Verillion, P. Rabardel (2005).

([39]) Per informazioni più puntuali rimando il lettore interessato al sito contenente le lezioni complete: http://www.mat.uniroma2.it/pls/varrone/varrone.html.

simulabili. Il pensiero degli studenti è stato ampiamente stimolato e guidato in una attività simulatrice che ha permesso la piena concretizzazione di concetti difficili, come ad esempio quello di «punto all'infinito».

8. – La classe laboratorio, strumenti per ben simulare

Il laboratorio «Le geometrie della visione» tratta temi legati alla prospettiva, dalla visione diretta ai modelli prospettici di Alberti e di Piero della Francesca. La geometria della visione diretta, trattata nell'Ottica di Euclide, ha permesso di matematizzare un aspetto importante della realtà. In questa teoria l'*essere* di un oggetto e il suo *apparire* in rapporto alla posizione dell'osservatore si pongono in termini rigorosamente geometrici, e con pochissimi prerequisiti di geometria euclidea é possibile sviluppare teoremi di grande interesse per le loro applicazioni al disegno prospettico. Anche dal punto di vista cognitivo l'argomento presenta particolare interesse poiché vi si realizza uno stretto rapporto tra pensiero analitico-verbale e pensiero sintetico-immaginativo. In particolare permette di rendere intuitivi e quasi «necessari» i passaggi fondamentali dalla geometria euclidea a quella proiettiva.

Desargues, introducendo i suoi assiomi proiettivi, postula che due rette in un piano hanno un «but» comune, un destino comune. Il suo termine «but» rendeva conto, nel caso di rette parallele, di un elemento estraneo agli enti euclidei ([40]), che non era astrazione di un oggetto concreto ma di un'astrazione anch'essa, la direzione, ed è stato successivamente sostituito dai matematici con il termine «punto all'infinito», contribuendo a rendere tutta la questione ancor più difficile e antiintuitiva per menti che si stanno formando alla matematica. «Rette parallele hanno un punto comune, all'infinito» così recitano gli studenti, rinunciando a capire il mistero e tenendo alla fine per sé la sensazione di arbitrarietà della questione.

Gli argomenti dell'intero corso del laboratorio, sono stati illustrati con uno strumento, il *prospettimetro*, da me ideato e sperimentato, che permette la riproduzione e la misurazione di configurazioni geometriche legate alla visione diretta e ai «raggi visivi», altrimenti impossibili

([40]) Vedi L. Catastini, (2006).

da osservare concretamente. Il prospettimetro è uno strumento in legno e plexiglas, formato da tre piani: uno fisso in legno (*piano di terra* su cui possono essere disposti dei fogli per scrittura) e due in plexiglas rimovibili: il *piano dell'orizzonte* parallelo al piano di terra e il *piano di profondità* ad essi perpendicolare.

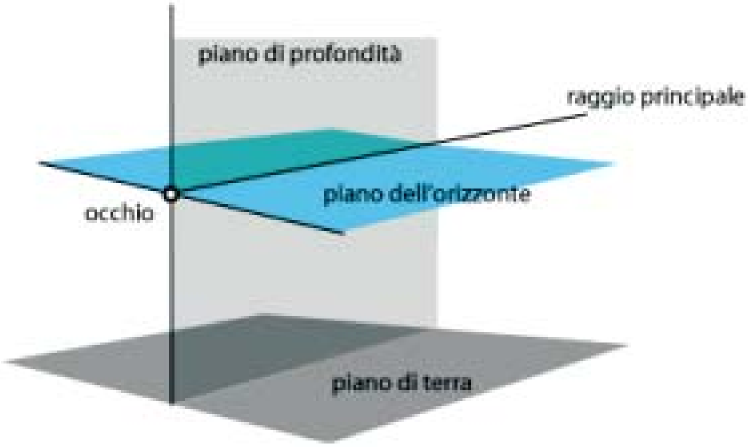

Fig. 1. – Gli elementi caratterizzanti il prospettimetro.

Un chiodo al quale sono fissati dei fili colorati simula il punto di vista e i fili i raggi visivi. Lo strumento è corredato da supporto verticale, in plexiglas, in modo da fornire un appoggio a cui, all'occorrenza, fissare i fili che colgono punti dello spazio che non stanno sul piano di terra o sul piano dell'orizzonte. Il supporto verticale è rimovibile e posizionabile a piacere.

Il nome che ho scelto per lo strumento, «prospettimetro», deriva dalla possibilità di effettuare **misurazioni** nell'ambito della «perspectiva naturalis», come veniva chiamata la visione diretta fino al quattrocento, epoca nella quale viene messa a punto la «perspectiva lineare», tecnica di rappresentazione pittorica il cui strumento principe sarà il prospettografo.

Il piano di profondità, in questo primo prototipo, si ferma sotto il piano dell'orizzonte per semplificare la costruzione dello strumento, ma non impedisce una agevole attività di laboratorio.

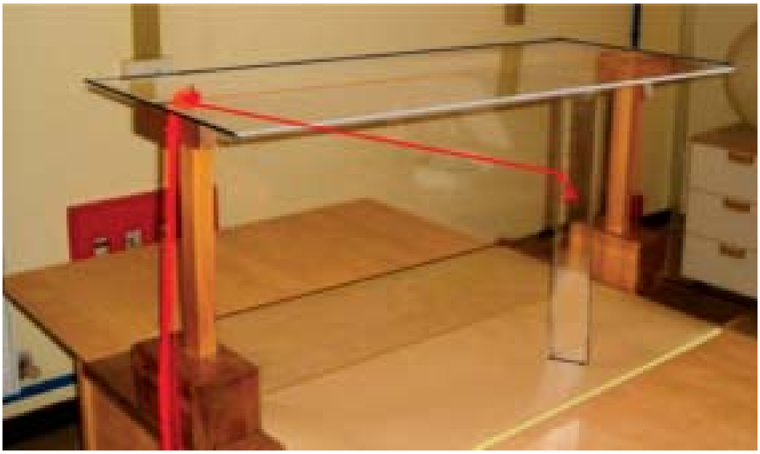

Fig. 2. – Prospettimetro e supporto verticale al quale è stato fissato un filo che coglie il punto A e che simula il raggio visivo uscente dall'occhio posto nella posizione del chiodo al quale è legato il capo fisso del filo.

L'uso del prospettimetro, che riassume le caratteristiche di «strumentazione» e «strumentalizzazione» individuate da Rabardel, permette una simulazione dinamica nello spazio che educa e potenzia scientificamente il pensiero immaginativo, nel senso che fornisce ricche descrizioni multisensoriali di oggetti matematici e le tante relazioni concrete tra essi, contribuendo a creare adeguati aloni inferenziali. L'educazione scientifica del pensiero immaginativo consiste nella continua verifica della corrispondenza rigorosa tra modelli e configurazioni che si costruiscono con il pensiero e le relazioni formali della teoria matematica all'interno delle quale si svolge il lavoro. Di seguito illustreremo come il prospettimetro possa aiutare a costruire una corretta e completa costruzione immaginativa del *piano proiettivo reale* con i suoi punti all'infinito dando particolare rilievo agli aspetti cognitivi coinvolti e alle costruzioni di concetti ben simulabili.

La nozione chiave su cui poggia il modello geometrico di Euclide è quella di angolo visivo ([41]). Gli oggetti vengono in prima approssimazione considerati come segmenti e l'angolo visivo è quello formato dai due raggi visivi (semirette con origine nell'occhio) passanti per gli estremi

([41]) Vedi la scheda di L. Catastini "Euclide e la visione per angoli" nel CD contenuto in L. Catastini, F. Ghione (2004).

del segmento considerato. L'Ottica è ampiamente trattata sulla base di questa nozione, che la caratterizza fortemente come geometria della "visione diretta". L'angolo visivo permette apprezzamenti sull'apparire delle grandezze in funzione della posizione dell'occhio,

Tra le premesse iniziali, troviamo la premessa 4: *le cose viste sotto angoli più grandi appaiono più grandi, quelle viste sotto angoli più piccoli più piccole, uguali quelle viste sotto angoli uguali.* La geometrizzazione dell'atto visivo, cioè, porta a definire la dimensione apparente di un oggetto come funzione dell'angolo visivo che lo sottende. La determinazione della sua posizione apparente utilizza invece la nozione di raggio visivo, secondo le successive premesse 5-6: *le cose viste sotto raggi più alti appaiono più in alto, quelle viste sotto raggi più bassi più in basso, più a destra quelle viste con raggi più a destra, più a sinistra quelle viste sotto raggi più a sinistra.*

Queste premesse sono fondamentali per la concezione dell'aspetto prospettico di una scena e usate nella dimostrazione dei teoremi prospettici dell'Ottica, il teorema 6 e quelli dal 10 al 14.

Una delle regole basi della prospettiva è che segmenti paralleli (due o più segmenti) vengono visti convergere verso uno stesso punto infinitamente lontano, il quale però, sul quadro, dove la profondità è schiacciata nelle due dimensioni, si rappresenta con un punto «al finito». Questa proprietà della geometria della visione darà origine, nel modello matematico formale, ai punti all'infinito, comuni a rette tra loro parallele.

La visione di segmenti o rette parallele viene affrontata da Euclide nel Teorema 6: *Segmenti paralleli visti da lontano appaiono non paralleli.* La dimostrazione di questo teorema è molto importante perché il procedimento seguito permette di ritrovare le prime tracce di quello che poi sarà chiamato punto di fuga. Qui l'idea di parallelismo è legata, come nell'intuizione e come nel rinascimento, all'idea di equidistanza: una retta parallela a una retta r è descritta da un punto P che si muove mantenendosi equidistante da r. Euclide dimostra che due rette parallele si vedono convergere perché l'angolo visivo che sottende un generico segmento di distanza ([42]) AB, da un certo punto in poi, con l'allontanarsi all'infinito del segmento, tende a zero.

([42]) Chiamiamo così un segmento perpendicolare alle rette, con gli estremi su di esse.

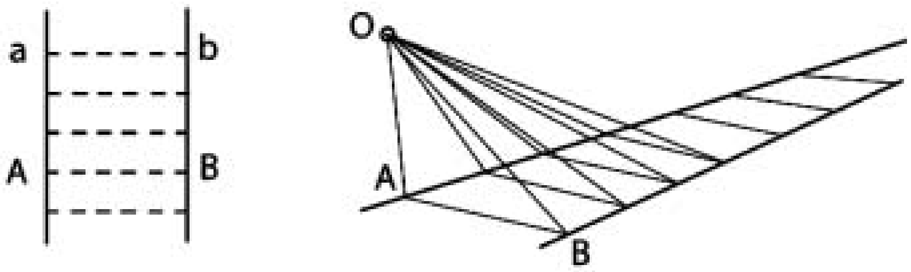

Fig. 3. – La misura degli angoli visivi che sottendono i segmenti di distanza, da un certo punto in poi tende a zero.

Questo contesto in qualche modo rafforza il concetto intuitivo di limite, indispensabile per il proseguimento della trattazione, ma contemporaneamente crea una forte rappresentazione spaziale che è di ostacolo al formarsi di una giusta immaginazione della distribuzione dei raggi visivi, distribuzione che è alla base della proiezione prospettica. Mentre infatti il diminuire della grandezza apparente dei segmenti di distanza e la conseguente apparente convergenza derivante dal diminuire dell'angolo visivo sono facili da concepire, la posizione apparente delle rette parallele, che si vedono salire e convergere a destra o a sinistra, dipende dal reale movimento compiuto dai raggi visivi che corrono su di esse, movimento che risulta difficile da immaginare guardando un disegno, come, ad esempio, quello sopra. La difficoltà consiste nel fatto che i raggi visivi corrono lungo i segmenti paralleli e colgono gli estremi dei segmenti di distanza, costanti nella realtà, e questo loro essere fissati a punti inesorabilmente separati da una lunghezza fissa non si concilia nell'immaginazione con il loro effettivo tendere a un unico raggio di fuga. Separati inesorabilmente, per quanto lontano si vada, come fanno a sovrapporsi, tutti, all'infinito, a un raggio comune? I segmenti di distanza costituiscono così un grave ostacolo epistemologico.

In questo caso la simulazione della situazione effettuata mediante il prospettimetro ha raggiunto lo scopo epistemico di offrire agli studenti percezioni concrete della situazione con le quali costruire adeguati modelli mentali riguardanti il comportamento dei raggi visivi che colgono punti infinitamente lontani.

Il passaggio cognitivo-geometrico dalla visione diretta a quella prospettica si snoda dunque nel passaggio concettuale dall'*angolo* ai *raggi visivi*. Questo passaggio diventa sede di un *nodo semiotico*: nell'attività con il prospettimetro si costruiscono linguisticamente definizioni rigorose e condivise delle varie posizioni menzionate nelle premesse 5 e 6, «apparire più alto, più basso, più a destra, più a sinistra», e si attuano figurazioni dei teoremi prospettici, tra cui il cruciale teorema 6. Con lo strumento è possibile simulare la posizione dei punti nello spazio, l'incidenza dei raggi visivi sui punti osservati e la misurazione di segmenti o degli angoli che un raggio visivo, o una sua proiezione particolare (sul piano di profondità o sul piano dell'orizzonte), forma con altri elementi dello strumento, come ad esempio il raggio principale.

Le figure seguenti illustrano alcuni momenti didattici nei quali si eseguono proiezioni, si calcolano lunghezze di segmenti e valutano ampiezze di angoli calcolando esplicitamente le loro tangenti trigonometriche.

Fig. 4. – *A sinistra*: il raggio visivo che coglie il punto A viene proiettato sul piano di terra: l'angolo che si forma misura quanti gradi il punto è *visto* a destra. Tutti i punti sullo stesso raggio visivo formano lo stesso angolo e quindi sono visti ugualmente a destra. *A destra*: La proiezione sul piano di profondità permette di misurare, attraverso il calcolo dell'arco tangente, quanti gradi il punto A è *visto* basso. Come nel caso precedente tutti i punti dello stesso raggio sono visti ugualmente in basso definendo lo stesso angolo.

Questa analisi mostra come la visione diretta non distingua il «più indietro» e il «più avanti» di un punto colto da un raggio visivo rispetto a un altro punto colto dallo stesso raggio e, non apparendo il «più avanti» e il «più indietro», la visione geometrica diretta si può senz'altro definire una visione «piatta» dello spazio. La posizione di un punto A nello spazio, il suo «essere», è determinata da una terna ordinata di numeri reali, le coordinate cartesiane: l'ascissa x definisce l'essere più o meno a destra, la quota z l'essere più o meno in alto e l'ordinata y l'essere più o meno in profondità.

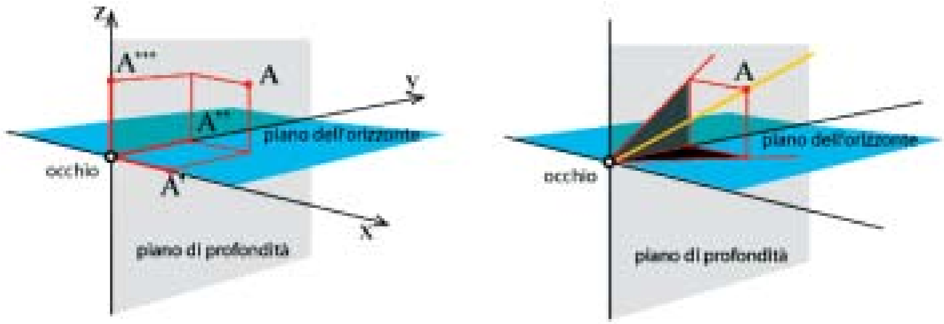

Fig. 5. – Coordinate cartesiane e coordinate omogenee.

L'apparire di un punto innanzi all'occhio, invece, non distinguendo rispetto alla profondità, è determinato da due soli angoli che lo definiscono più o meno alto (o basso) o più o meno a destra (o a sinistra). Tutti i punti dello stesso raggio, le cui coordinate cartesiane differiscono per un comune fattore di proporzionalità, definiscono lo stesso "apparire". Questa importante differenza si traduce analiticamente nel passaggio dalle coordinate cartesiane a coordinate omogenee, passaggio generalmente affrontato, nei nostri corsi universitari, solo in modo formale senza alcuna giustificazione euristica o storica.

Il passaggio ora ai punti all'infinito avviene naturalmente. I teoremi 10, 11, 12 dell'Ottica di Euclide, riassunti in un solo enunciato dicono: *Tra i piani che giacciono sotto l'occhio quelli più lontani appaiono più in alto, tra i piani che stanno sopra l'occhio i più lontani appaiono più in basso, tra i segmenti che si estendono longitudinalmente, quelli a destra sembrano deviare verso sinistra, quelli a sinistra verso destra.*

Anche questi enunciati vengono indagati col prospettimetro. Inizialmente vengono montati i raggi visivi su due segmenti paralleli, come in figura in modo da poter effettuare le proiezioni sui piani di terra e di profondità per *misurare* il loro effettivo alzarsi e deviare a destra o a sinistra con l'allontanarsi in distanza dei punti. L'esperienza della misurazione conferma come questi raggi tendano tutti, man mano che i punti si allontanano, a un unico raggio, detto *raggio di fuga*, che si trova sul piano dell'orizzonte ed è parallelo ai due segmenti dati.

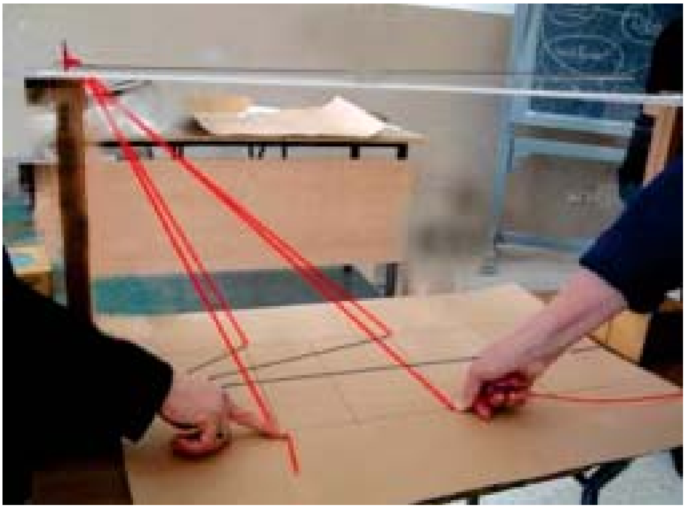

Fig. 6. – L'andamento di raggi visivi che colgono punti su rette parallele.

Terminato lo studio della visione diretta si tolgono i piani in plexiglas e si aggiunge una cornice vuota, che simula il piano del quadro attraverso la quale passano, lasciando una traccia virtuale, i raggi visivi. Questa traccia è l'intersezione del raggio visivo col piano del quadro, e l'osservazione della situazione introduce lo studio della visione prospettica. Anche il raggio di fuga, intersecando il piano del quadro, lascia la sua traccia in un punto che, a sua volta, è detto *punto di fuga*.

Ricordando l'equivalenza visiva tra tutti i punti di uno stesso raggio si deduce che è equivalente vedere i punti appartenenti ai segmenti paralleli tracciati sul piano di terra o vedere sul piano del quadro le loro tracce che convergono verso il punto di fuga. Le inferenze prodotte non

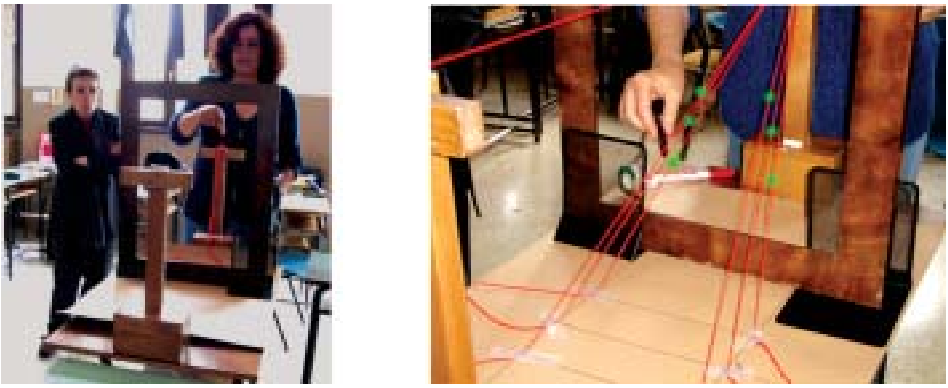

Fig. 7. – A sinistra la cornice che individua il piano del quadro, a destra l'individuazione delle intersezioni del piano ideale con i raggi visivi.

sono di carattere induttivo, come potrebbe accadere nella osservazione di un esperimento ripetuto che suggerisce una legge generale, ma di puro carattere deduttivo: da una situazione ben definita in partenza (i postulati dell'ottica di Euclide) si traggono le inferenze possibili. Si dovrebbe sciogliere quindi la preoccupazione di una impropria contaminazione induttiva nei confronti della materia dal momento che l'attività di laboratorio tende proprio alla costruzione di corretti aloni inferenziali legati a profondi concetti matematici. Queste operazioni, oltre che a preparare alla resa prospettica, sono opportune per avvicinare concettualmente gli studenti al concreto tendere di una successione di elementi ad un altro, concetto dinamico centrale nell'affrontare l'analisi matematica e lo studio dei punti all'infinito.

La pratica diretta porta una illuminante consapevolezza negli studenti, che discutono tra loro, a parole ma anche a gesti ([43]) iconico-rappresentazionali, la scoperta dell'effettivo distribuirsi dei raggi visivi.

Questa esperienza percettivo-motoria favorisce la produzione di dinamiche rappresentazioni mentali che supporteranno simulazioni ben formate e ragionamenti successivi. Le misurazioni effettuate con lo strumento aiutano *concettualmente* a constatare come i raggi visivi effettivamente si portino in alto e si stringano al raggio di fuga, secondo

([43]) Vedere a proposito F. Arzarello, O. Robutti, (2008).

Fig. 8. – *A sinistra*: Le studentesse, discutendo tra loro, figurano con le mani e con le dita l'andamento parallelo dei segmenti e (*a destra*) la contemporanea distribuzione dei raggi visivi che li colgono, verificando le loro verbalizzazioni con quanto vedono sul prospettimetro.

la definizione data, mentre il vedere sul piano del quadro come i punti proiettati tendano al punto di fuga — e il correlato tendere, nello spazio, dei raggi visivi al raggio fuga — affianca e supporta sensorialmente la concettualizzazione. Dopo un breve inquadramento storico della figura di Desargues e del suo termine «but» che connota il modo nel quale la direzione è usata nella nuova teoria, proponiamo di associare al raggio di fuga la direzione del fascio di rette considerate, aggiungendo questo astratto elemento al piano euclideo. Questo primo passo, facilmente completabile con l' aggiunta di un «but» per ogni direzione del piano, crea un nuovo oggetto matematico, il piano proiettivo, diverso da quello euclideo, che porta interessanti e feconde informazioni sulla trasformazione visiva, diretta e inversa.

Solo dopo un adeguato numero di esercizi sull'argomento (ad esempio la ricerca del punto di distanza) il termine desarguesiano sarà abbandonato, spiegando come questo astratto elemento comune abbia preso poi il nome di *punto all'infinito* per adeguarsi al linguaggio della trasformazione puntuale. Nel piano proiettivo, questo nuovo mondo matematico, le rette diventano «attualmente» infinite, abbandonando lo stato potenziale di segmento prolungabile a piacere che la trattazione euclidea assegna loro. L'intreccio tra l'esposizione storica della genesi del concetto di «but» e la pratica matematica che in qualche modo la ripercorre ha costituito per gli studenti un incontro fecondo tra aspetti biologici e culturali e ha reso loro queste attività, oltre che cognitivamente, anche culturalmente significative.

9. – Il concretizzare nel «seder nei banchi con i testi davanti»

L'attività di un insegnante presenta, al momento attuale, un piano orario e problematiche di vario tipo che rendono mediamente difficile fare della didattica laboratoriale una pratica continua e diffusa. La caratteristica peculiare della disciplina, l'essere cioè una complessa costruzione culturale formale assiomatico-deduttiva, chiede continuo rigore, soprattutto nelle fasi in cui si pongono le basi concettuali di nuovi campi di lavoro, rigore che non va disatteso in nome di una falsa facilitazione a favore dello studente, ma che talvolta trascina lontano dalle buone simulazioni. Senza entrare direttamente nel merito del complesso problema — basta pensare alle sole tre ore medie settimanali di matematica nelle superiori — come *concretizzare* allora quando ci si trova inesorabilmente a «*sederci nei banchi con i testi davanti*», salvando il rigore e la crescita coerente della disciplina?

Concretizzare un astratto concetto matematico nella tradizionale conduzione di una lezione e costruire su di esso adeguati modelli mentali è reso più attuabile dalla possibilità che ha l'insegnante, nell'interazione con i suoi studenti, di far riferimento ai simulatori biologi già esistenti in essi. Questi simulatori come mostrerò più avanti in un esempio, possono essere sollecitati in modo opportuno dall'insegnante che, progettando l'unità didattica, potrà scegliere nella storia della scienza il paradigma matematico più funzionale allo studente, quello più vicino alla sua «zona prossimale» e ai suoi modelli naturali e culturali. Sia nella costruzione di un complesso laboratorio quale quello appena esposto, che in una lezione tradizionale vale quanto sostiene Radford:

> L'analisi storico-epistemologica può fornirci interessanti informazioni riguardanti lo sviluppo della conoscenza matematica all'interno di una cultura e attraverso culture diverse e anche fornire informazioni sul modo in cui i significati sono sorti e sono cambiati; è necessario comprendere le negoziazioni e le concezioni culturali che sottendono tali significati. Il modo in cui si è formata un'antica idea può aiutarci a trovare antichi significati che, mediante un lavoro di adattamento didattico, possono probabilmente essere ridisegnati e resi

compatibili con i moderni programmi nel contesto dell'elaborazione delle sequenze di insegnamento ([44]).

Per esemplificare parzialmente queste affermazioni e anche per chiarire in breve cosa voglio dire con «rendere ben simulabile» o «concretizzare» un concetto astratto nella quotidianità di una lezione mi servo di una domanda cruciale — vedi par. 4. — che inevitabilmente gli studenti delle superiori pongono in seconda o terza classe: «*com'è possibile che la retta sia fatta da infiniti punti ma, allo stesso tempo, che anche il segmento sia fatto da infiniti punti?*».

Il passaggio dai punti e dalle linee concretamente segnate sul foglio ai corrispondenti enti astratti della geometria è un momento importante, ma spesso viene rimandato, e alla fine il salto avviene quasi sempre intuitivamente e lì si resta. Più tardi, quando il mescolarsi della geometria con l'algebra porta a dover affrontare la questione, la linea, in particolare il segmento, viene implicitamente simulata dal giovane studente come un oggetto «*fatto*» di punti. Questa rappresentazione occulta lo porta a una simulazione pasticciata e impraticabile perché dopo pochi passi si scontra malamente con la dimensione del punto e con il concetto di infinito. Il pensiero simulativo si inceppa: «*fatto di*» è euristicamente e linguisticamente assimilato alla categoria «essere costituito di parti in contatto ([45]) tra loro» e da lì all'interrogativo su come sia possibile accostare punti non materiali e avere estensioni non nulle e addirittura diverse tra loro il passo è immediato. Perfino Aristotele, mentre ci simulava su, ha abbandonato per un attimo la sua solita eleganza espositiva e ha osservato che in quel modo una grandezza se ne sarebbe andata in segatura ([46])!

I modelli mentali in questo caso nascono malamente. Se non si interviene opportunamente si formano categorizzazioni inadeguate, modelli mentali parziali e non relati tra loro o relati in modo poco

([44]) L. Radford, (1997) pag. 32.

([45]) È molto istruttivo presentare agli studenti il modo in cui Aristotele, nella Fisica, (V,3,226b-227a) sistema e definisce i concetti di contatto, contiguo, continuo, legate al continuo moderno Questi concetti vengono affrontati secondo categorie derivanti da esperienze percettivo-motorie di base, le stesse categorie che operano nei giovani e nella geometria euclidea.

([46]) Aristotele, [3], I(A), 2, 316 b. Emozionante vederne in trasparenza una simulazione di 2400 anni fa!

significativo e si perde la ricchezza dell'alone inferenziale. Ricordando che anche l'attività simbolico-ricostruttiva, appoggiandosi ai simulatori biologici, contribuisce a costruire modelli di ciò che i simboli significano, Barsalou ci avverte:

> Considerare i concetti come simulatori ci suggerisce un modo diverso di pensare la categorizzazione: se il simulatore per una categoria è capace di produrre una simulazione soddisfacente di una entità percepita, allora l'entità appartiene alla categoria. Se il simulatore invece non riesce a produrre una simulazione soddisfacente, l'entità non appartiene alla categoria ([47]).

La trattazione insiemistica moderna, che ci presenta una retta come insieme di punti, può diventare didatticamente fuorviante. In realtà, da un punto di vista moderno, una retta è un insieme di punti dotato di una particolare struttura topologica, nella quale i segmenti formano una base di aperti e alla quale si arriva attraverso una corretta concezione cantoriana dell' infinito. Se si trascurano questi aspetti fondamentali e si resta al livello di una superficiale descrizione insiemistica si corre il rischio di mistificare significati e di compromettere l'attività simulativa dello studente, confinandone il pensiero in un formale ambito astratto. In una seconda o terza superiore una possibile scelta è allora quella di affrontare la situazione secondo un fedele punto di vista geometrico-euclideo, nel quale le linee sono «*fatte*» di linee, non di punti. I segmenti infatti «nascono» ognuno con una propria lunghezza e attraverso quella si rapportano, si sommano, si dividono. Le definizioni degli *Elementi* sono chiare in merito: 1) punto è ciò che non ha parti, 2) linea è lunghezza senza larghezza, 3) estremi di una linea sono punti ([48]). La diversa dimensione delle grandezze introduce il concetto di omogeneità che, con quello di misura, costituirà un problema molto importante nella genesi storica dell'algebra.

Nella teoria euclidea dunque il segmento non è un attuale insieme di punti, ma è sola lunghezza che, in quanto grandezza, è divisibile a piacere in altre lunghezze a lui omogenee. Ad ogni passo la somma dei

([47]) Barsalou, (1999) pag. 587.

([48]) Euclide, *Gli Elementi*, Libro I def I,II,III. Ciò vale anche per le altre grandezze. Ad es: superficie è ciò che ha soltanto lunghezza e larghezza, estremi di una superficie sono linee, def. V e VI. Vedere anche Giusti, [1999] pagg. 94-97.

segmenti ottenuti è il segmento totale che, in questo senso, si può considerare «fatto» dalle sue parti. I punti, in tutta questa storia, entrano come estremi dei segmenti che nascono dalla possibile divisione di una lunghezza finita, e se questa lunghezza finita è potenzialmente divisibile in infiniti segmenti, allora può potenzialmente contenere infiniti punti. Un aiuto a visualizzare la questione può venire dal primo postulato (49): «*Risulti postulato che si possa condurre una linea retta da un qualsiasi punto ad ogni altro punto*», dal quale segue che nella concezione euclidea non possono esistere due punti «attaccati tra loro» ma c'è sempre un segmento che li distanzia. Questa visione dell'argomento rende naturali e coerenti le prime corrispondenze tra numero e punto, per esempio in geometria analitica, nella quale la coordinata di un punto *rappresenta* il valore numerico della lunghezza di un segmento dell'asse coordinato con un estremo nell'origine, ed è *posta* sull'altro suo punto estremo.

Vorrei infine sottolineare ancora l'importanza di una accurata sistemazione didattica della materia da un punto di vista linguistico, che prenda spunto dalle spontanee, rivelatrici espressioni degli studenti: distinguere e spiegare, ad esempio, le espressioni «essere fatto di» e «contenere» aiuta a produrre simulazioni efficaci, a categorizzare le entità in gioco e infine a definirle correttamente.

10. – Conclusioni

Abbiamo presentato la tradizionale contrapposizione tra l'apprendimento simbolico-ricostruttivo e quello percettivo-motorio che, nel caso particolare della matematica, è rafforzata dalla natura deduttiva della disciplina che mal si accorda con pratiche laboratoriali induttive.

Si è mostrato come adottando la definizione qui proposta di *simulabilità di un ente mentale* si superi la dicotomia concreto/astratto ed insieme ad essa anche la contrapposizione tra simbolico-ricostruttivo e percettivo-motorio, che vengono assunti in un'unica

(49) Di solito vi si legge solo "per due punti passa una e una sola retta". Così si focalizza la questione sulla *retta* e non sui punti. I termini "*passa*" e "*retta*" distruggono concettualmente (concetto inteso come simulatore) il fatto che i punti in questione sono estremi di un segmento. La questione linguistica merita grande attenzione didattica.

modalità con diversi gradi di simulabilità, in quanto anche nell'attività simbolico-ricostruttiva si costruiscono modelli di ciò che i simboli propongono. Questa visione è coerente col modello del Sistema di simboli percettuali di Barsalou.

Si è mostrato anche come l'attività laboratoriale, praticata come costruzione di significati matematici, non sia contraddittoria con il carattere deduttivo della materia: le attività proposte, le interazioni strumentali e personali, la significazione storica che rende cognitivamente importanti i concetti mirano alla costruzione di un atteggiamento deduttivo, formalmente rispettoso di assiomi e di definizioni iniziali, lasciando però a questa pratica anche un connotato creativo, come nel caso trattato della generazione di un ente matematico: il punto all'infinito.

Queste attività mirano alla costruzione, nel pensiero dello studente, di uno stile cognitivo *integrato* ([50]), stile che senza un addestramento adeguato non è affatto facile da instaurare nelle attività di tipo formale quali quelle matematiche. Gli strumenti utilizzati sono quindi parte importante della strategia didattica e sono usati attivamente dagli studenti per fare congetture, per visualizzare le ipotesi e la tesi dei teoremi, per costruire definizioni e per risolvere problemi. Il lavoro sperimentale viene eseguito collettivamente e le osservazioni o le proposte individuali vengono commentate, discusse e, nel caso, messe in pratica per esplorare la loro validità. La dimensione culturale del pensiero matematico, che dà senso allo svolgersi delle costruzioni intellettuali nel tempo, viene rafforzata dalla collaborazione con gli insegnanti di altre discipline.

Giustamente, nei Programmi del 2003, l'UMI raccomanda l'uso della storia della matematica. Questa dovrebbe essere ben conosciuta dagli insegnanti attraverso i suoi testi fondamentali. Essere in grado di usare la storia della matematica non vuol dire solo saper dare notizie storiche

([50]) Si veda a questo proposito L.Catastini, 1990, pag. 185. Si definisce *integrato* un pensiero nel quale i concetti espressi verbalmente e i corrispondenti modelli mentali raggiungono una "pari cultura", cioè quando le rappresentazioni immaginative sono in grado di esprimere correttamente e pienamente la semantica di quelle linguistiche e di compiere inferenze significative, acquisendo la complessità concettuale della materia e crescendo con essa.

ma soprattutto saper usare produttivamente *paradigmi storici* adatti alla situazione che ci troviamo in classe. La libertà progettuale del docente, quindi, è direttamente proporzionale alla sua cultura matematica, storica, umanistica, e qui entra in gioco il grosso discorso della formazione degli insegnanti. Ma di una cosa così importante non è serio parlare solo accennando, per cui qui mi fermo. Aggiungo solo che ben vengano, nella formazione del docente le conoscenze neurocognitive rivolte alla didattica della matematica, purché si affianchino, nella loro innovazione, a profonde riflessioni sui tradizionali contenuti storici e disciplinari e sappiano tutelare la formazione di una mente capace di pensiero critico e formalmente logico.

BIBLIOGRAFIA

[1] F. ANTINUCCI, *Computer per un figlio*, Laterza, Milano, 1999.

[2] F. ANTINUCCI, *La scuola si è rotta*, Laterza, Milano, 2001.

[3] ARISTOTELE, *Della generazione e corruzione.*

[4] ARISTOTELE, *Fisica.*

[5] R. ARNHEIM, *Visual Thinking*, Regents of the University of California, Berkeley — Los Angeles, 1969. Traduzione italiana: *Il pensiero visivo*, Einaudi, Torino, 1974.

[6] F. ARZARELLO - O. ROBUTTI, *Framing the embodied mind approach within a multimodal paradigm.* In: L. English. Handbook Of International Research In Mathematics Education (2008), 720-749. ISBN: 10:0-8058-5875-X. New York: Routledge.

[7] L. W. BARSALOU, *Perceptual symbol systems*, Behavioral and Brain Sciences, **22** (1999), 577-600

[8] A. BERTHOZ, *Le sens du mouvement*, Éditions Odile Jacob, 1997. Traduzione italiana: *Il senso del movimento*, McGraw-Hill, Milano, 1998.

[9] M. BARTOLINI - M. G. BUSSI - M. MASCHIETTO, *Macchine matematiche, dalla storia alla scuola*, Springer Verlag Italia, 2006.

[10] L. CATASTINI, *Il Giardino di Desargues*, La matematica nella Società e nella Cultura, Bollettino UMI (8), **7-A** (Agosto 2004), 321-345.

[11] L. CATASTINI, *Il pensiero allo specchio*, La Nuova Italia (Firenze, 1990).

[12] L. CATASTINI - F. GHIONE, *Le geometrie della visione*, Springer-Verlag Italia, 2004.

[13] B. D'AMORE, *Elementi di didattica della matematica.* Bologna: Pitagora, 1999

[14] EUCLIDE, *Gli Elementi*, U.T.E.T., Torino, 1970.

[15] EUCLIDE, *Ottica.* Nel CD in L. Catastini, F. Ghione, 2004.

[16] G. FREGE, *Die Grundlagen der Arithmetik*, 1884.
[17] E. GIUSTI, *Ipotesi sulla natura degli oggetti matematici*, Bollati Boringhieri, Torino, 1999.
[18] J. GIBSON, *The Ecological Approach to Visual Perception*, Hillsdale (N.J.)-London, Erlbaum,1986. Traduzione italiana: *Un approccio ecologico alla percezione visiva*, Il Mulino, Bologna, 1999.
[19] B. INHELDER - J. PIAGET, *De la Logique de l'Enfant à la Logique de l'Adolescent*, Paris, PUF, 1955; trad. it. *Dalla logica del fanciullo alla logica dell'adolescente*, Firenze, Giunti-Barbèra, 1971.
[20] P. JOHNSON LAIRD, *Mental Models. Towards a Cognitive Sciente of Language, Inference, and Conciousness*, Cambridge University Press, Cambridge, 1983. Traduzione italiana: *Modelli mentali*, Il Mulino, Bologna, 1988.
[21] S. KOSSLYN, *Ghosts in the mind's machine*, W. W. Norton and Co., New York, 1983. Traduzione italiana: *Le immagini nella mente*, Giunti Barbèra, Firenze. 1989.
[22] G. LAKOFF - R. NUÑEZ, *Where Mathematics Comes from. How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*, Basic Books (Perseus Books Group), New York, 2000. Traduzione italiana: *Da dove viene la matematica*, Bollati Boringhieri, Torino. 2005.
[23] O. LIVERTA SEMPIO (a cura di), *Vygotskij Piaget, Bruner*, Raffaello Cortina Editore, Milano, 1998.
[24] R. MARAGLIANO, *Nuovo manuale di didattica multimediale*, Laterza, 1998.
[25] M. MONTESSORI, *Psico geometria: el estudio de la geometria basado en la psicologia infantil*, Araluce, Barcelona, 1934.
[26] J. PIAGET, *Le problème de l'intériorisation des actions en opérations réversibles*, Archives de psychologie, **32**, 1949.
[27] S. PINKER, *How the mind works*, W. W. Norton, New York, 1997. Traduzione italiana: *Come funziona la mente*, Mondadori, Milano, 2000.
[28] L. RADFORD, *On Psychology, Historical Epistemology and the Teaching of Mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics* For the Learning of Mathematics, **17**, 1 1997, 26-33.
[29] L. RADFORD, *Gestures, Speech, and the Sprouting of Sign: A Semiotic-Cultural Approach to Students' Types of Generalization*, Mathematical Thinking And Learning, **5**, 1 2003, 37-70.
[30] L. RADFORD - C. BARDINI - C. SABENA - P DIALLO - A. SIMBAGOYE, *On embodiment, artefacts, and signs: a semiotic-cultural perspective on mathematical thinking*, in H. L. Chick, L. Vincent (eds) Proceedings of PME, University of Melbourne, Australia, Vol. **4**, 2005, 113-120.
[31] L. RADFORD, *Elementos de una teoría cultural de la objetivación*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Special Issue on Semiotics, Culture and Mathematical Thinking, 2006, 103-129.
[32] L. RADFORD, *Comunicazione, apprendimento e formazione dell'io comunita-*

rio, in B. D'Amore & S. Sbaragli (eds), *Proceedings of the 20th National Italian Conference «Incontri con la Matematica»* (Bologna, 2006), 65-72.
[33] P. VERILLION - P. RABARDEL, *Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity*, European Journal of Psychology of Education, **10**, 1 1995.
[34] S. LEV VYGOTSKIJ, *Pensiero e linguaggio*, Bari, Laterza, 1992, 137.

Laura Catastini, Dip. di Matematica, Università di Tor Vergata, Roma,
I.S.A. «F. Russoli» Pisa
e-mail: catastin@mat.uniroma2.it