La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Roberta Alessandroni

Evoluzioni di ipersuperfici secondo funzioni delle curvature

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **2** (2009), n.2 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 195–198.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2009_1_2_2_195_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2009.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. II, Agosto 2009, 195-198

Evoluzioni di ipersuperfici secondo funzioni delle curvature

ROBERTA ALESSANDRONI

Consideriamo l'evoluzione di un'ipersuperficie dello spazio euclideo la cui velocità normale è data in ogni punto da un'assegnata funzione delle curvature principali. L'esempio più conosciuto di tali evoluzioni è il moto per curvatura media, per il quale sono noti molti risultati in letteratura. In questa tesi vogliamo studiare la validità di risultati analoghi per diverse scelte della velocità, con particolare attenzione al caso in cui la velocità è data da un potenza della curvatura scalare.

Più precisamente, sia M una varietà orientabile $n-$dimensionale ed $\boldsymbol{F}_0 : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ una sua immersione nello spazio euclideo. I flussi geometrici che consideriamo sono le famiglie ad un parametro $\boldsymbol{F} : [0, T) \to \mathbb{R}^{n+1}$ definite da

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial t}(\boldsymbol{p}, t) = & -\mathcal{S}(\mathcal{W})\nu(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{p}, t)) \\ \boldsymbol{F}(\boldsymbol{p}, 0) = & \boldsymbol{F}_0(\boldsymbol{p}) \end{cases}$$

dove ν è il vettore normale uscente di $M_t = \boldsymbol{F}(\cdot, t)$ nel punto $\boldsymbol{p}$, $\mathcal{W}$ è l'operatore di Weingarten e la velocità $\mathcal{S}$ è una funzione simmetrica delle curvature principali. Nel seguito useremo anche le notazioni H per la curvatura media e R per la curvatura scalare.

Nel primo capitolo della tesi illustriamo alcune proprietà generali di questa classe di flussi geometrici come l'esistenza per tempi piccoli e la regolarità delle soluzioni. Successivamente calcoliamo le equazioni di evoluzione per le più importanti quantità geometriche delle superfici M_t, e deriviamo le equazioni di evoluzione per una qualunque funzione omogenea delle curvature principali.

1. – Stime di convessità

Nel secondo capitolo studiamo uno specifico flusso, del tipo appena descritto, tale che le proprietà di convessità di una superficie con curvatura media positiva migliorino durante la formazione di una singolarit à. In analogia con quanto dimostrato in [3] per il flusso di curvatura media, $\mathcal{S} = H$, vogliamo provare delle stime a priori su opportune funzioni delle curvature e mostrare che ogni limite di riscalamenti vicino ad una singolarità ha curvatura scalare non negativa. La velocità scelta è una funzione non omogenea della curvatura media che permette di ottenere le stime di convessità tramite il solo principio del massimo, dove per il flusso di curvatura media è invece necessario utilizzare delle stime integrali.

TEOREMA 1. – *Sia $\boldsymbol{F}_0 : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ un'immersione liscia di un'ipersuperficie chiusa di dimensione $n \geq 2$ e sia $\boldsymbol{F} : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ la famiglia ad un parametro di* *immersioni definite da*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial t}(\boldsymbol{p}, t) = \dfrac{\bar{H}}{\log \bar{H}} \nu(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{p}, t)), \quad t \geq 0 \\ \boldsymbol{F}(\cdot, 0) = \boldsymbol{F}_0(M) \end{cases}$$

dove $\bar{H} = H + H_0$ e H_0 è una costante opportunamente grande. Se la superficie iniziale ha curvatura media positiva, allora le $M_t = \boldsymbol{F}(M, t)$ hanno curvatura media positiva per ogni $t \in [0, T)$. Inoltre per ogni $\eta > 0$ esiste $c_\eta > 0$ tale che la curvatura scalare soddisfi la stima

$$-R \geq 2\eta H^2 + c_\eta$$

ovunque su M_t per ogni $t \in [0, T)$.

Questo risultato ha anche delle analogie con la stima di Hamilton-Ivey, usata nella definizione del procedimento di chirurgia per il flusso di Ricci in dimensione 3, che mostra come le curvature sezionali negative diventino trascurabili al formarsi di una singolarità.

La dimostrazione del teorema segue in parte il metodo mostrato in [3]. Dimostriamo una stima dall'alto per la funzione

$$f_{\sigma,\eta} := \left(-\frac{R}{H^2} - \eta\right)(\log \bar{H})^\sigma$$

e ne deduciamo che $\forall \eta > 0$ esiste una costante $c_1(\eta)$ t. c. $-R \leq 2\eta H^2 + c_1(\eta)$.

Successivamente riscaliamo le superfici M_t vicino al tempo singolare in modo che la curvatura sia uniformemente limitata e osserviamo che sul limite $\tilde{M}$ di questi riscalamenti la disuguaglianza precedente diventa $-\tilde{R} \leq 2\eta \tilde{H}^2$. Al limite per $\eta \to 0$ si ottiene la stima di convessità cercata.

2. – Evoluzione di superfici convesse per potenze della curvatura scalare

Il terzo capitolo è dedicato allo studio di un'ipersuperficie di dimensione n chiusa, convessa che si evolve per potenze della curvatura scalare: $\mathcal{S} = R^p$, con $p > 1/2$. Per questa scelta di p la velocità è una funzione omogenea delle curvature principali di grado strettamente maggiore di uno. Mostriamo che se la superficie iniziale soddisfa una stima di pinching delle curvature, del tipo $\dfrac{R}{H^2} > c(n, p)$ dove c è una costante opportuna, allora la superficie rimane convessa durante il flusso e si contrae ad un punto in tempo finito. Inoltre, con un procedimento standard di riscalamento, dimostriamo che la forma delle superfici in evoluzione tende al limite a quella di una sfera.

La convergenza di superfici convesse ad un punto rotondo è un risultato ben noto per alcuni flussi nella classe sopra descritta: $\mathcal{S} = H$, $\mathcal{S} = \sqrt{R}$ e $\mathcal{S} = \sqrt[n]{K}$ dove K è la curvatura di Gauss. Più recentemente lo stesso risultato è stato dimostrato anche per un'ampia classe di velocità omogenee di grado uno e per alcune velocità con grado di omogeneità superiore (si veda ad esempio [4] per $n = 2$ e [5] per $\mathcal{S} = H^k$ in dimensione $n \geq 2$).

Il nostro scopo è dimostrare il seguente teorema:

TEOREMA 2. – *Sia* $\boldsymbol{F}_0 : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ *un'immersione liscia di una varietà di dimensione* $n \geq 2$*, orientata e strettamente convessa. Consideriamo il flusso*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial t}(\boldsymbol{p}, t) = -R^p(\boldsymbol{p}, t)\nu(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{p}, t)), \quad t \geq 0 \\ \boldsymbol{F}(\cdot, 0) = \boldsymbol{F}_0(M) \end{cases}$$

con $p > \frac{1}{2}$*. Se la superficie iniziale soddisfa una stima di pinching sulle curvature principali del tipo* $\frac{R}{H^2} > c(n,p)$*, dove* c *è un'opportuna costante che si può trovare esplicitamente, allora la sua evoluzione è convessa e al tempo* $T < \infty$ *si contrae ad un punto* $\boldsymbol{y}_0$*. Il flusso riscalato* $\widetilde{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{p}, t) = (T-t)^{-\frac{1}{2p+1}}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{p}, t) - \boldsymbol{y}_0)$ *converge in topologia* C^∞ *ad un'immersione liscia* $\widetilde{\boldsymbol{F}}_\infty$ *la cui immagine è una sfera.*

Nella dimostrazione di questo teorema è fondamentale il ruolo delle stime di pinching delle curvature principali: definiamo sulle superfici in evoluzione M_t la funzione

$$f = \frac{|A|^2}{H^2} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i<j}(\lambda_i - \lambda_j)^2,$$

dove λ_i per $i = 1, ..., n$ sono le curvature principali e proviamo che f è decrescente e tende uniformemente a zero per $t \to T$. L'ipotesi di pinching nell'enunciato è legata ad f dalla relazione $\frac{R}{H^2} = \frac{n-1}{n} - f$, quindi $\frac{R}{H^2} > c$ se e solo se $f < \gamma = \frac{n-1}{n} - c$. La monotonia di f implica che la stima di pinching richiesta sulla superficie iniziale si conserva lungo il flusso, mentre l'uniforme convergenza di f a zero è necessaria per dimostrare che le superfici riscalate tendono ad una sfera, essendo questa l'unica superficie con $f \equiv 0$.

Possiamo confrontare l'ipotesi di pinching sulla superficie iniziale con quelle assunte in teoremi analoghi, ad esempio per $\frac{1}{2} < p \leq 1$, la costante c è

$$c = \begin{cases} \dfrac{(n+4)(n-1)}{(n+2)^2} & \text{se } n < 4 \\ \dfrac{n-2}{n-1} & \text{se } n \geq 4. \end{cases}$$

Questa costante coincide per $n \geq 4$ con quella richiesta in [1] nel caso $p = \frac{1}{2}$. Infine ricordiamo che nel caso bidimensionale in cui la curvatura scalare e la curvatura di Gauss coincidono, alcune stime possono essere migliorate e la convergenza ad un punto rotondo è stata dimostrata nei casi $p = \frac{1}{2}$ e $p = 1$ sotto la sola ipotesi di convessità.

Per quanto riguarda la dimostrazione possiamo osservare che la scelta della velocità con grado di omogeneità strettamente maggiore di uno permette di dimostrare l'uniforme convergenza di f a zero usando solamente il principio del massimo, senza far intervenire stime integrali e disuguaglianze di interpolazione. D'altra parte però questa stessa stessa caratteristica fa sì che le equazioni di evoluzione per il flusso riscalato siano non strettamente paraboliche, di conseguenza per lo studio del flusso riscalato è necessario utilizzare risultati specifici per equazioni paraboliche nonlineari degeneri.

3. – Evoluzione di grafici interi

Nell'ultimo capitolo studiamo l'evoluzione secondo flussi geometrici di grafici definiti su $\mathbb{R}^n$. Più precisamente, data una funzione liscia $u_0 : \mathbb{R}^n \times \{0\} \to \mathbb{R}$ consideriamo il problema (1) con la superficie iniziale

$$\boldsymbol{F}_0(\boldsymbol{p}) = (x_1, ..., x_n, u_0(x_1, ..., x_n)) = (\boldsymbol{x}, u_0(\boldsymbol{x})).$$

Supponendo la limitatezza di $\|\nabla u_0\|^2_{C^{1,\alpha}}$ dimostriamo l'esistenza delle soluzioni ed un principio del massimo per funzioni limitate definite su grafici interi. Inoltre, seguendo la dimostrazione in [2], mostriamo che l'evoluzione di un grafico resta tale per tutti i tempi e la velocità $\mathcal{S}$ rimane una funzione limitata.

Infine, scegliendo come velocità una potenza della curvatura scalare possiamo dimostrare che, sotto certe ipotesi di pinching, il flusso di grafici interi esiste per tutti i tempi.

TEOREMA 3. – *Consideriamo il problema*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial t}(\boldsymbol{p}, t) = -R^p(\boldsymbol{p}, t)\nu(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{p}, t)), \quad t \geq 0 \\ \boldsymbol{F}(\cdot, 0) = \boldsymbol{F}_0(M) \end{cases}$$

con $p \geq \frac{1}{2}$ e supponiamo che la superficie iniziale M_0 sia il grafico di una funzione liscia u_0 tale che $\|\nabla u_0\|_{C^{1,\alpha}} < \infty$. Se su M_0 valgono le stime $H > 0$, $R > 0$ e $\frac{R}{H^2} > c$, con c definita come nel Teorema 2, allora il flusso esiste per tutti i tempi.

BIBLIOGRAFIA

[1] CHOW B., *Deforming convex hypersurfaces by the square root of the scalar curvature*, Invent. Math., **87** (1987), 63-82.
[2] ECKER K. e HUISKEN G., *Mean curvature evolution of entire graphs*, Ann. Math., **130** (1989), 453-471.
[3] HUISKEN G. e SINESTRARI C., *Mean curvature flow singularities for mean convex surfaces*, Calc. Var., 8 (1999), 1-14.
[4] SCHNÜRER O. C., *Surfaces contracting with speed $|A|^2$*, J. Diff. Geom., **71** (2005), 347-363.
[5] SCHULZE F., *Convexity estimates for flows by powers of the mean curvature*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci, **V** (2006), 261-277.

Dipartimento di Matematica, Università di Roma "Tor Vergata"
e-mail: alessand@mat.uniroma2.it
Dottorato in Matematica
con sede presso l'Università di Roma "Tor Vergata" - Ciclo XX
Direttore di ricerca: prof. Carlo Sinestrari, Università di Roma "Tor Vergata"