

---

# *La Matematica nella Società e nella Cultura*

RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

---

ENEA GIUSEPPE BONGIORNO

## **Un processo di nascita e crescita per insiemi aleatori chiusi basato sulla somma di Minkowski**

*La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. 2 (2009), n.2 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 207–210.*

Unione Matematica Italiana

[http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI\\_2009\\_1\\_2\\_2\\_207\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2009_1_2_2_207_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)  
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2009.

## Un processo di nascita e crescita per insiemi aleatori chiusi basato sulla somma di Minkowski

ENEA GIUSEPPE BONGIORNO

I processi di nascita e crescita hanno un ruolo importante nella descrizione di svariati fenomeni naturali e in diverse applicazioni tecnologiche: solidificazioni e passaggi di stato di materiali, crescita di cristalli, biomineralizzazione, etc (cf. [1]). Negli anni, molti autori hanno studiato processi stocastici spaziali con lo scopo di modellare fenomeni reali soprattutto da un punto di vista statico (cf. [3]). Per gli aspetti dinamici, sono stati presentati modelli parametrici di nascita e crescita. Formalmente, un processo di nascita e crescita è una famiglia di insiemi aleatori chiusi (RaCS) dato da  $\Theta_t = \bigcup_{n: T_n \leq t} \Theta_{T_n}^t(X_n)$ , con  $t \geq 0$ , dove  $\Theta_{T_n}^t(X_n)$  è il RaCS ottenuto dall'evoluzione fino al tempo  $t > T_n$  di un nucleo nato ad un istante (casuale)  $T_n$  in una posizione (casuale)  $X_n$ , secondo un prefissato modello di crescita. Nella modellizzazione, è spesso usato un approccio analitico: si assume che la crescita di un nucleo sferico di raggio infinitesimo avvenga con velocità normale positiva; cioè, ad ogni istante  $t$ , un punto della frontiera del nucleo  $x \in \partial\Theta_t$  "cresce" lungo la direzione normale uscente. Per questi modelli, sono stati studiati, negli anni, diversi stimatori parametrici e non. Osserviamo che l'esistenza di un vettore normale uscente impone delle condizioni di regolarità per la frontiera  $\partial\Theta_t$  (e di conseguenza anche per il processo di nucleazione che non può essere un semplice processo di punto).

Nella tesi è stato definito rigorosamente un processo di nascita e crescita come un'opportuna combinazione, che coinvolge la somma di Minkowski e l'integrale di Aumann, di due processi di RaCS che rappresentano rispettivamente il processo di nascita (o nucleazione)  $\{B_t\}_{t \in [t_0, T]}$  e il processo di crescita  $\{G_t\}_{t \in [t_0, T]}$ . L'approccio è puramente geometrico (stocastico) e permette di evitare i problemi di regolarità alla frontiera dei casi analitici. Con questo modello, la crescita è generalmente anisotropa e non locale; cioè, fissato un istante di tempo, la crescita è la stessa in ogni punto dello spazio.

Nella tesi è stato studiato un teorema di decomposizione per caratterizzare il processo di nascita e di crescita; ciò permette di studiare i processi anche da un punto di vista statistico/computazionale. Sono definiti degli stimatori consistenti per il processo di crescita. Inoltre, è stata fornita una procedura per la stima del funzionale di hitting del processo di nucleazione.

### Concetti Preliminari

Sia  $F$  la famiglia di tutti i sottoinsiemi chiusi di  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^d$  e sia  $F' = F \setminus \{\emptyset\}$ . I pedici  $b$ ,  $k$  e  $c$  indicheranno le proprietà di limitatezza, compattezza e convessità. Per ogni

$A, B \subseteq \mathfrak{X}$  e  $a \geq 0$ , consideriamo

$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$ ,  $A \ominus B = (A^C + B)^C$ ,  $\check{A} = \{-a : a \in A\}$ ,  
 dove  $A^C = \mathfrak{X} \setminus A$ ,  $x + A = \{x\} + A$ , e, per definizione,  $\emptyset + A = \emptyset = a\emptyset$ . Nel seguito,  
 la somma si intenderà tra insiemi chiusi con almeno uno dei due limitato. Allora vale:  
 se  $A \in \mathbb{F}$  e  $B \in \mathbb{F}_k$  allora  $A + B \in \mathbb{F}$ . Definiamo la *distanza di Hausdorff* con

$$\delta(A, B) = \max \left\{ \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \|a - b\|_{\mathfrak{X}}, \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} \|a - b\|_{\mathfrak{X}} \right\}, \quad \forall A, B \in \mathbb{F}'.$$

Un mappa  $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mu) \rightarrow \mathbb{F}'$  (con  $\mu$  misura finita) è misurabile se l'insieme  $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \cap K \neq \emptyset\}$  è misurabile per ogni compatto  $K \in \mathbb{F}_k$ . Se  $\mu$  è una misura di probabilità, allora  $X$  è detto *insieme aleatorio chiuso (RaCS)*. Sia  $X$  un RaCS, allora  $\{T_X(K) = \mathbb{P}(X \cap K \neq \emptyset), K \in \mathbb{F}_k\}$  è il suo *funzionale di hitting*. Il noto Teorema di Matheron stabilisce che, la legge di probabilità  $\mathbb{P}_X$  di un qualsiasi RaCS  $X$  è univocamente determinato dal suo funzionale di hitting e quindi da  $Q_X(K) = 1 - T_X(K)$  [2]. Un RaCS  $X$  è *stazionario* se  $T_X(K) = T_X(K + v)$  per ogni  $K \in \mathbb{F}_k$  e  $v \in \mathfrak{X}$ . Un RaCS stazionario  $X$  è *ergodico*, se, per ogni  $K_1, K_2 \in \mathbb{F}$ ,

$$\frac{1}{|W_i|} \int_{W_i} Q_X((K_1 + v) \cup K_2) dv \xrightarrow{i \rightarrow \infty} Q_X(K_1)Q_X(K_2),$$

dove  $W_i$  è convesso, compatto,  $W_i \subset W_{i+1}$  per ogni  $i \in \mathbb{N}$  e  $W_i \uparrow \mathfrak{X}$  per  $i \rightarrow \infty$ .

L'*integrale di Aumann* di una mappa  $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mu) \rightarrow \mathbb{F}'$  misurabile è definito da  $\int X d\mu = \left\{ \int_A x d\mu : x \in S_X \right\}$ , per  $A \in \mathcal{F}$ , e dove  $S_X = \{x \in L^1[\Omega; \mathfrak{X}] : x \in X \text{ } \mu\text{-q.o.}\}$  e  $\int_A x d\mu$  è l'integrale di Bochner in  $L^1[\Omega; \mathfrak{X}]$ .

### Modello di Nascita e Crescita

Sia  $[t_0, T] \subset \mathbb{R}$  un *intervallo temporale*, e sia  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [t_0, T]}, \mathbb{P})$  uno spazio di probabilità filtrato, con le usuali proprietà per la filtrazione  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [t_0, T]}$ . Consideriamo due mappe  $B, G : \Omega \times [t_0, T] \rightarrow \mathbb{F}'$  (il *processo di nascita* e di *crescita*) per le quali valgano le seguenti ipotesi. • Per ogni  $t \in [t_0, T]$ ,  $B_t = B(\cdot, t)$  è un RaCS definito su  $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ , i.e.  $B_t$  è un processo di RaCS *adattato* a  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [t_0, T]}$ . •  $B_t$  è *non decrescente*: per ogni  $t, s \in [t_0, T]$  con  $s < t$ ,  $B_s \subseteq B_t$ . • Per ogni  $\omega \in \Omega, t \in [t_0, T]$ ,  $0 \in G(\omega, t)$ . • Per ogni  $\omega \in \Omega, t \in [t_0, T]$ ,  $G(\omega, t)$  è convesso, i.e.  $G : \Omega \times [t_0, T] \rightarrow \mathbb{F}_c$ . • Esiste  $K \in \mathbb{F}_b$  tale che  $G(\omega, t) \subseteq K$  per ogni  $t \in [t_0, T], \omega \in \Omega$ . •  $G$  è  $\mathcal{P}$ -misurabile. Dove  $\mathcal{P}$  è la  $\sigma$ -algebra *prevedibile* su  $\Omega \times [t_0, T]$  generata dai processi di RaCS  $\{X_t\}_{t \in [t_0, T]}$ , adattati alla filtrazione  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [t_0, T]}$ , con traiettorie Hausdorff-continue a sinistra su  $[t_0, T]$ .

Per ogni  $t \in [t_0, T] \subset \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ , e per ogni partizione  $\Pi = (t_i)_{i=0}^n$  di  $[t_0, t]$ , definiamo

$$(1) \quad s_{\Pi}(t) = S_{\Pi} = \left( N_{t_0} + \int_{t_0}^t G(\tau) d\tau \right) \cup \bigcup_{i=1}^n \left( \Delta N_{t_i} + \int_{t_i}^t G(\tau) d\tau \right)$$

$$(2) \quad S_{\Pi}(t) = S_{\Pi} = \left( N_{t_0} + \int_{t_0}^t G(\tau) d\tau \right) \cup \bigcup_{i=1}^n \left( \Delta N_{t_i} + \int_{t_{i-1}}^t G(\tau) d\tau \right)$$

dove  $\Delta N_{t_i} = N_{t_i} \setminus N_{t_{i-1}}^o$  ( $N_{t_{i-1}}^o$  è l'apertura di  $N_{t_{i-1}}$ ) e l'integrale è quello di Aumann rispetto alla misura di Lebesgue  $d\tau = d\mu_\lambda$ . Nella tesi si dimostra la seguente.

PROPOSIZIONE 1. – *II una partizione di  $[t_0, t]$ ,  $s_\Pi$  e  $S_\Pi$  sono RaCS tali che  $s_\Pi \subseteq S_\Pi$  q.c. Se  $\Pi'$  è un raffinamento di  $\Pi$ , allora  $s_\Pi \subseteq s_{\Pi'}$  e  $S_{\Pi'} \subseteq S_\Pi$  quasi certamente.*

*Inoltre, se  $\{\Pi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  è una successione di raffinamenti su  $[t_0, t]$  ( $|\Pi_j| \rightarrow 0$  se  $j \rightarrow \infty$ ), allora  $\lim_{j \rightarrow \infty} \delta(s_{\Pi_j}, S_{\Pi_j}) = 0$  q.c.; e se  $\{\Pi'_l\}_{l \in \mathbb{N}}$  è una diversa successione di raffinamenti su  $[t_0, t]$ , allora*

$$\lim_{\substack{j \rightarrow \infty \\ l \rightarrow \infty}} \delta(s_{\Pi_j}, s_{\Pi'_l}) = 0 \quad e \quad \lim_{\substack{j \rightarrow \infty \\ l \rightarrow \infty}} \delta(S_{\Pi_j}, S_{\Pi'_l}) = 0, \quad q.c.$$

DEFINIZIONE 1. – *Per ogni  $t \in [t_0, T]$ , sia  $\{\Pi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  una successione di raffinamento di  $[t_0, t]$  e sia  $\Theta_t$  il RaCS definito da*

$$\bigcup_{j \in \mathbb{N}} s_{\Pi_j}(t) = \overline{\lim_{j \rightarrow \infty} s_{\Pi_j}(t)} = \Theta_t = \lim_{j \rightarrow \infty} S_{\Pi_j}(t) = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} S_{\Pi_j}(t).$$

$\Theta = \{\Theta_t : t \in [t_0, T]\}$  è chiamato processo aleatorio geometrico G-RaP (su  $[t_0, T]$ ).

Quindi, data una sequenza di raffinamenti  $\{\Pi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  su  $[t_0, t]$ , i RaCS  $s_{\Pi_j}$  e  $S_{\Pi_j}$  giocano lo stesso ruolo che le somme inferiori e superiori hanno nella definizione dell'integrale di Riemann. Nei fatti, se indichiamo con  $\Theta_t$  il loro valore limite (cf. Definizione 1),  $s_{\Pi_j}$  e  $S_{\Pi_j}$  diventano rispettivamente approssimazioni inferiori e superiori di  $\Theta_t$ . Questo ragionamento evita i problemi che sorgono nel considerare unioni non numerabili nelle (1), (2). Osserviamo che  $\Theta$  è un processo q.c. non decrescente adattato alla filtrazione  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [t_0, T]}$ . Inoltre, le ipotesi sui processi  $N_t$  e  $G_t$  sono così generali che il modello può descrivere una vasta famiglia di insiemi aleatori classici e processi di evoluzione (per esempio, il modello Booleano è un G-RaP a "crescita nulla").

Infine, con un abuso delle notazioni, adottiamo le seguenti formulazioni infinitesime e differenziali per il modello; fissato  $t \in [t_0, T]$ ,

$$\Theta_t = \left( N_{t_0} + \int_{t_0}^t G(\tau) d\tau \right) \cup \bigcup_{s=t_0}^t \left( dN_s + \int_s^t G(\tau) d\tau \right),$$

$$d\Theta_t = +G_t dt \cup dN_t, \quad \text{o} \quad \Theta_{t+dt} = (\Theta_t + G_t dt) \cup dN_t.$$

In parole povere, l'incremento  $d\Theta_t$ , durante l'infinitesimo intervallo temporale  $dt$ , è un allargamento dovuto all'infinitesimo addendo  $G_t dt$  seguito dall'unione con l'infinitesima nucleazione  $dN_t$ .

### Aspetti Statistici.

Un campione del processo di nascita e crescita  $\Theta$  è solitamente una successione temporale di immagini, diciamo  $\Theta_{n-1}$ ,  $\Theta_n$  (per semplicità  $X$  e  $Y$ ) legati nel seguente modello a tempo discreto.

$$\Theta_n = \begin{cases} (\Theta_{n-1} + G_n) \cup B_n, & n \geq 1, \\ B_0, & n = 0. \end{cases}$$

Dati  $X$  e  $Y$ , siano  $\widehat{G}_W^1 = (Y_W \ominus \check{X}_{W \ominus K}) \cap K$ , e  $\widehat{G}_W^2 = \{[Y_W \cup \partial_W^{+K}(X_W)] \ominus \check{X}_W\} \cap K$ , dove  $Y_W = Y \cap W$  e  $\partial_W^{+K}(X_W) = \overline{(X_W + K)} \setminus W$ . Si dimostra che questi sono stimatori ben definiti per  $G$ , riducono gli effetti di bordo e sono consistenti.

PROPOSIZIONE 2. – *Siano  $Y, X$  RaCS e  $0 \in G = Y \ominus \check{X} \subseteq K$ . Allora, per ogni  $W_2 \supseteq W_1, G \subseteq \widehat{G}_{W_2}^1 \subseteq \widehat{G}_{W_1}^1$ . In particolare,  $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \widehat{G}_{W_i}^1 = G$  e  $\lim_{i \rightarrow \infty} \delta(\widehat{G}_{W_i}^1, G) = 0$ . Inoltre, per ogni  $W \in \mathbb{F}, G \subseteq \widehat{G}_W^2 \subseteq \widehat{G}_W^1$  e  $\widehat{G}_W^{1,2}$  sono consistenti (i.e. se  $W \uparrow \check{X} \widehat{G}_W^{1,2} \downarrow G$ ).*

*Siano  $X, Y$  RaCS q.c. chiusi regolari [3]. Siano  $G, B$  due RaCS per cui  $Y = (X + G) \cup B$ , con  $B$  un RaCS ergodico indipendente da  $G$  e  $X$ , e con  $G$  q.c. chiuso regolare. Allora, per ogni  $K \in \mathbb{F}'_k, |\widehat{Q}_{Y,W}(K) / \widehat{Q}_{X+G,W}(K) - Q_B(K)| \xrightarrow{W \uparrow \check{X}} 0$ , q.c.*

Osserviamo come questo teorema ci permetta di effettuare dei test sul processo di nucleazione nonostante esso non sia direttamente osservabile dato che l'ennesima nucleazione può essere coperta dalla nascita di altri nuclei o dalla loro evoluzione.

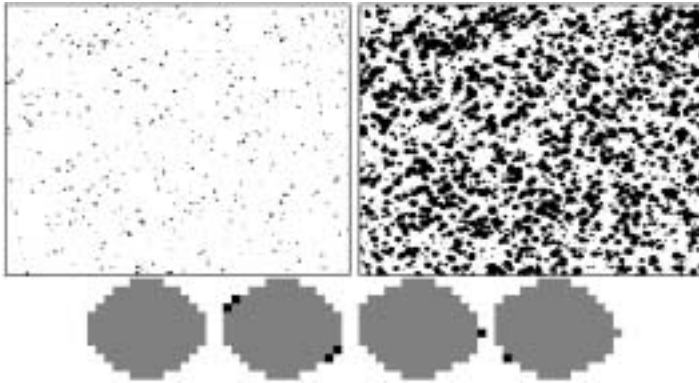


Fig. 1. – Due immagini a tempi distinti di un processo di nascita e crescita e immagini (ingrandite) della crescita usata per la simulazione e di  $\widehat{G}_W^2, \widehat{G}_W^1$  e  $\widehat{G}_{W \in K}^1$ .

BIBLIOGRAFIA

- [1] CAPASSO V., *On the stochastic geometry of growth*, Morphogenesis and Pattern Formation in Biological Systems, Sekimura, T. et al., (Eds.) (Springer, Tokyo, 2003), 45-58.
- [2] MATHERON G., *Random Sets and Integral Geometry*, Wiley (New York-London-Sydney, 1975).
- [3] MOLCHANOV I. S., *Statistics of the Boolean Model for Practitioners and Mathematicians*, Wiley (Chichester, 1997).

Dipartimento di Matematica, Università di Milano,  
 e-mail: enea.bongiorno@unimi.it  
 Dottorato in Matematica  
 con sede presso l'Università di Milano - Ciclo XX  
 Direttore di ricerca: Dott. Giacomo Aletti e Prof. Vincenzo Capasso,  
 Università di Milano