La Matematica nella Società e nella Cultura
RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

LETIZIA BRUNETTI

Ipersuperficie luce di varietà semi-Riemanniane con strutture speciali

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **2** (2009), n.2 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 215–217.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2009_1_2_2_215_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2009.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. II, Agosto 2009, 215-217

Ipersuperficie luce di varietà semi-Riemanniane con strutture speciali

LETIZIA BRUNETTI

1. – Premessa

Le ipersuperficie luce rappresentano un campo di ricerca recente: i suoi maggiori sviluppi risalgono agli anni '90, raccolti in [1]. Queste ipersuperficie sono ipersuperficie di una varietà semi–Riemanniana, dove tutti gli oggetti hanno un carattere causale cioè sono di tipo tempo, spazio e luce, e la metrica indotta su queste dalla varità ambiente è una metrica semi–Riemanniana degenere; altre denominazioni usate per individuare questi oggetti sono quelle di *ipersuperficie degeneri* o *singolari*. Un'ipersuperficie luce M è molto diversa da una non–degenere e queste differenze dipendono dal fatto che l'intersezione tra il fibrato vettoriale normale $TM^{\perp}$ ed il fibrato vettoriale tangente TM è non banale; si definisce, infatti, a partire da questa intersezione la distribuzione $Rad(TM) = TM^{\perp} \cap TM$, detta "radicale di M", ed inoltre il fibrato vettoriale normale risulta essere contenuto nel fibrato vettoriale tangente ($TM^{\perp} = Rad(TM) \subset TM$).

Sebbene siano evidenti le differenze tra questi studi e la teoria classica delle sottovarietà non–degeneri, si continuerà ad usare la terminologia classica, utilizzando le denominazioni di connessione lineare, seconda forma fondamentale, equazioni di Gauss e Weingarten.

L'interesse per questo argomento è crescente a motivo dell'importanza nelle applicazioni in fisica-matematica, relatività e cosmologia. Le ipersuperficie di tipo luce rappresentano modelli di tipi differenti di superficie di separazione tra domini con differenti proprietà fisiche. Un esempio di quanto detto è dato dall'orizzonte degli eventi del buco nero, ruotante con momento angolare J, in uno spazio-tempo munito della metrica di Kerr:

$$(1) \qquad ds^2 = \rho^2\left(\frac{dr^2}{\Lambda} + d\theta^2\right) + (r^2 + a^2)\sin^2\theta d\varphi^2 - dt^2 + \frac{2Mr}{\rho^2}(a\sin^2\theta d\varphi - dt)^2,$$

dove $a = \dfrac{J}{M}$, $\rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta$, $\Lambda^2 = r^2 - 2Mr + a^2$. L'orizzonte degli eventi è localizzato per un valore del raggio uguale a $r = r+ := M + \sqrt{M^2 - a^2}$, e rispetto alla metrica (1) si tratta di un'ipersuperficie di tipo luce.

Si è quindi pensato di munire la varietà ambiente di $\mathcal{S}$-strutture, per l'interesse fisico e matematico nei confronti di queste strutture: le varietà Sasakiane sono un caso particolare di varietà munite di $\mathcal{S}$-struttura; inoltre, L. K. Duggal ha provato che è possibile munire lo spazio-tempo globalmente iperbolico e lo spazio-tempo di de Sitter di strutture di questo tipo; per maggiori dettagli, si consulti [3].

In un'ipersupeficie luce M di una varietà semi–Riemanniana $\bar{M}$, si determinano delle decomposizioni, più o meno standard, dei fibrati vettoriali TM e $T\bar{M}|_M$:

$$TM = Rad(TM) \perp S(TM) \quad T\bar{M}|_M = S(TM) \perp S(TM)^{\perp}, \tag{2}$$

dove $S(TM)$ denota una distribuzione (non unica), detta distribuzione screen, complementare del radicale nel fibrato tangente, ed il simbolo $\perp$ denota una somma diretta ortogonale. Il principale strumento tecnico è fornito dal seguente teorema.

TEOREMA 1 ([1]). – *Sia $(M, g, S(TM))$ un'ipersuperficie luce di una varietà semi–Riemanniana $(\bar{M}, \bar{g})$. Allora esiste un unico sottofibrato vettoriale $ltr(M)$ di $T\bar{M}$ di rango uno, con varietà base M, tale che per ogni sezione non nulla E di $TM^{\perp}$ su un intorno coordinato $\mathcal{U} \subset M$, esiste un'unica sezione N di $ltr(M)$ su $\mathcal{U}$ soddisfacente:*

$$\bar{g}(N, E) = 1, \quad \bar{g}(N, N) = 0, \quad \bar{g}(N, W) = 0 \ \text{ per ogni } W \in \Gamma(S(TM)|_{\mathcal{U}}). \tag{3}$$

Il fibrato vettoriale $ltr(M)$ è detto fibrato vettoriale trasversale di tipo luce *di M rispetto a $S(TM)$.*

A partire da $TM = Rad(TM) \perp S(TM)$ è possibile scrivere le equazioni di Gauss e di Weingarten per M, e si definisce la connessione indotta ∇ su M, che risulta essere simmetrica ma non metrica.

2. – Ipersuperficie luce in $\mathcal{S}$-varietà

Sia $(\bar{M}^{2n+r}, \bar{\varphi}, \bar{\xi}_a, \bar{\eta}^a)$ una $f.pk.$-varietà, cioè $\bar{\varphi}^2 = -I + \bar{\eta}^a \otimes \bar{\xi}_a$ e $\bar{\eta}^a(\xi_\beta) = \delta^a_\beta$, e sia $\bar{g}$ una metrica semi-Riemanniana su $\bar{M}$. Allora la $f.pk$-struttura e la metrica si dicono *compatibili* se $\bar{g}(\bar{\varphi}X, \bar{\varphi}Y) = \bar{g}(X, Y) - \sum_{a=1}^{r} \varepsilon_a \bar{\eta}^a(X)\bar{\eta}^a(Y)$ e $\bar{g}(X, \bar{\xi}_a) = \varepsilon_a \bar{\eta}^a(X)$, dove $\varepsilon_a = \pm 1$ rispettivamente se $\bar{\xi}_a$ è spacelike o timelike; in questo caso, la $f.pk.$-varietà è detta metrica indefinita. Una $f.pk.$-varietà metrica indefinita $\bar{M}$ è detta $\mathcal{S}$-varietà indefinita se è normale e $d\bar{\eta}^a = \Phi$, essendo $\Phi(X, Y) = \bar{g}(X, \bar{\varphi}Y)$ per ogni X e Y in $T\bar{M}$. Per queste varietà è stata determinata l'espressione del tensore di curvatura R di tipo $(0, 4)$ nel caso in cui la curvatura $\bar{\varphi}$-sezionale, cioè la curvatura sezionale dei 2-piani $\pi = span\{X, \bar{\varphi}X\}$ con $X \in TM$ non luce, risulti puntualmente costante.

Data una $\mathcal{S}$-varietà $(\bar{M}, \bar{\varphi}, \bar{\xi}_a, \bar{\eta}^a, \bar{g})$ si è dimostrata l'esistenza di una distribuzione screen tale che $\bar{\varphi}E$ e $\bar{\xi}_a$, per ogni $a \in \{1, \dots, r\}$, appartengano a $S(TM)$, e questa distribuzione screen è stata scelta. È stato possibile definire altre distribuzioni su M, per le quali sono state studiate condizioni di integrabilità, provando che sono distribuzioni minimali. Sulle sottovarietà integrali è stato possibile definire una struttura di $\mathcal{S}$-varietà, verificando che la connessione indotta è una connessione simmetrica e metrica. A titolo esemplificativo, si citano alcuni dei risultati ottenuti.

TEOREMA 2. – *Sia* $(M, g, S(TM))$ *un'ipersuperficie luce di una* $\mathcal{S}$*-varietà indefinita, con* E *sezione del radicale e* N *sezione di* $ltr(M)$ *globalmente definite. Allora* $(M, \varphi, \bar{\xi}_a, U, \bar{\eta}^a, u)$ *è una* $f.pk.$*-varietà, dove* $U = -\bar{\varphi}N$ *è di tipo luce e* $u(X) = g(X, -\bar{\varphi}E)$.

Nel caso di una $\mathcal{S}$-varietà con curvatura $\bar{\varphi}$-sezionale costante, si è dimostrato il seguente teorema:

TEOREMA 3. – *Sia* $(\bar{M}(c), \bar{\varphi}, \bar{\xi}_a, \bar{\eta}^a, \bar{g})$ *una* $\mathcal{S}$*-space form indefinita e* $(M, g, S(TM))$ *una ipersuperficie luce. Se* $(M, g, S(TM))$ *è totalmente ombelicale allora* $c = \varepsilon = \sum_{a=1}^{r} \varepsilon_a$, *dove* $\varepsilon_a = \bar{g}(\bar{\xi}_a, \bar{\xi}_a) = \pm 1$.

Da tale risultato si deduce il seguente corollario.

COROLLARIO 1. – *Sia* $(\bar{M}(c), \bar{\varphi}, \bar{\xi}_a, \bar{\eta}_a, \bar{g})$ *una* $\mathcal{S}$*-space form indefinita. Se* $c \neq \varepsilon$, *allora non esiste una ipersuperficie luce totalmente ombelicale.*

Inoltre, si sono trovati esempi significativi di $\mathcal{S}$-strutture indefinite su $\mathbb{R}^6$ con $r = 2$ e ξ_1, ξ_2 entrambi di tipo tempo o entrambi di tipo spazio. Un terzo esempio con ξ_1, ξ_2 di carattere causale differente è stato costruito su $\mathbb{R}^4$.

BIBLIOGRAFIA

[1] DUGGAL K.L. e BEJANCU A., *Lightlike submanifolds on semi-Riemannian manifolds and its application*, Kluwer Academic Publishers (Dordrecht, 1996).
[2] DUGGAL K.L. e JIN D.H., *Totally umbilical lightlike submanifold*, Kodai Math. Jr., **26** (2003), 49-68.
[3] DUGGAL K.L., *Lorentzian Geometry of Globally Framed Manifolds*, Acta Appl. Math., **19** (1990), 131-148.
[4] DUGGAL K.L. e SAHIN B., *Lightlike submanifolds of indefinite Sasakian manifolds.*, Int. J. Math. Math. Sci., Art. ID 57585 (2007).
[5] TAKAHASHI T., *Sasakian Manifold with Pseudo-Riemannian metric.*, Tôhoku Math. J., **21** (1969), 271-290.

Dipartimento di Matematica, Università di Bari,
e-mail: brunetti@dm.uniba.it
Dottorato in Matematica
con sede presso l'Università di Bari – Ciclo XX
Direttore di ricerca: Prof.ssa Anna Maria Pastore, Università di Bari