Gregorio Chinni

(micro-)Ipoellitticità Analitica e Gevrey per "Somme di Quadrati": un approccio via F.B.I.

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **2** (2009), n.2 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 223–226.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2009_1_2_2_223_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2009.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. II, Agosto 2009, 223-226

(micro-)Ipoellitticità Analitica e Gevrey per "Somme di Quadrati": un approccio via F.B.I.

GREGORIO CHINNI

La tesi è una breve introduzione al problema dell' ipoelliticità analitica per operatori del secondo ordine che sono "somme di quadrati" di campi vettoriali. Nella prima parte della tesi si introducono la tecnica utilizzata (si veda per maggiori dettagli [5]) ed alcuni argomenti base in analisi microlocale; nella seconda parte si discutono i due problemi affrontati.

1. – Breve rassegna sulla trasformata F.B.I.

Descriviamo il principale strumento d'indagine utilizzato. La trasformata F.B.I. è stata introdotta da *Bros* e *Iagolnitzer* e largamente sviluppata da Sjöstrand, [5].

Sia u una distribuzione temperata, definiamo la sua trasformata F.B.I. a "fase classica" come

$$Tu(z;\lambda) = \int\limits_{\boldsymbol{R}^n} e^{-\frac{\lambda}{2}(z-y)^2} u(y)\, dy$$

dove $\lambda \geq 1$ e $z \in \boldsymbol{C}^n$. Tu è una funzione olomorfa in $\boldsymbol{C}^n$ $\forall \lambda$. Sia

$$\varphi_0(z) = \sup_{y \in \boldsymbol{R}^n} \left(-\Im \left(\frac{i}{2}(z+y)^2 \right) \right) = \frac{(\Im z)^2}{2}$$

la funzione plurisubarmonica associata alla fase classica.

A T è associata una trasformazione canonica

$$\begin{aligned} H_T : \ \boldsymbol{C}^{2n}_{w,\theta} \ &\longrightarrow \ \boldsymbol{C}^{2n}_{z,\zeta} \\ (w, i(z-w)) &\mapsto (z, i(z-w)) \end{aligned}$$

tale che $H_T\left(T^*\boldsymbol{R}^n_y\right) = \Lambda_{\varphi_0} = \{(z, -2i\partial_z \varphi_0(z))\} = \{y - i\eta; \eta\}$. Λ_{φ_0} è una sottovarietà di $\boldsymbol{C}^n$ I-Lagrangiana e $\boldsymbol{R}$-simplettica rispetto alla forma simplettica standard su $\boldsymbol{C}^{2n}$, $\sigma = \sum\limits_{j=1}^{n} d\zeta_j \wedge dz_j$. Più precisamente posto $\sigma = \sigma_R + i\sigma_I$ si ha che Λ_{φ_0} è I-Lagrangiana se $\sigma_{I|_{\Lambda_{\varphi_0}}} \equiv 0$, $\boldsymbol{R}$-simplettica se $\sigma_{R|_{\Lambda_{\varphi_0}}}$ è una 2-forma chiusa non degenere. Si ha che se $u \in L^2(\boldsymbol{R}^n) \Rightarrow Tu \in L^2(\boldsymbol{C}^n, e^{-2\lambda\varphi_0(z)}L(dz))$ dove $L(dz)$ è la misura di Lebesgue in $\boldsymbol{C}^n$:$L(dz) = \pm(i/2)^{\frac{n}{2}} dz \wedge d\bar{z}$.

Ricordiamo che data $f \in C^\infty(U)$ si dice di classe *Gevrey s*, G^s, se $\forall K$ compatto in U $\exists C_K$ tale che

$$|\partial^a f| \leq C_K^{|a|+1}(a!)^s.$$

Definiamo dal punto di vista F.B.I. la nozione di fronte d'onda analitico e Gevrey.

DEFINIZIONE 1. – *Presa u distribuzione a supporto compatto in $\mathbf{R}^n$ diciamo che il punto $(y_0, \eta_0) \notin WF_s(u)$, con $s \geq 1$, se esiste un intorno Ω di $y_0 - i\eta_0$ in $\mathbf{C}^n$ tale che*

$$|Tu(z,\lambda)|e^{-\frac{\lambda}{2}\varphi_0(z)} \leq Ce^{-\varepsilon\lambda^{1/s}}.$$

Diciamo che $(y_0, \eta_0) \notin WF(u)$ (fronte d'onda C^∞) se esiste un intorno Ω di $y_0 - i\eta_0$ in $\mathbf{C}^n$ tale che

$$|Tu(z,\lambda)|e^{-\frac{\lambda}{2}\varphi_0(z)} \leq C\lambda^{-N} \quad \forall N \in \mathbf{N}.$$

Le disuguaglianze sono soddisfatte uniformemente per $z \in \Omega$.

Bony (1977) ha provato che tali definizioni sono equivalenti a quelle classiche date da Hörmander. Questa trasformata presenta due principali vantaggi: *i)* la possibilità di caratterizzare i fronti d'onda analitico e Gevrey senza l'uso di cut-off di tipo Ehrenpreis; *ii)* trasferisce il problema dall'ambito reale a quello complesso, che sembra essere più naturale almeno per questioni di ipoellitticità analitica.

2. – Una prova dell'Ipoellitticità per l'Operatore di Kohn via F.B.I.

Viene fornita una nuova prova sia dell'ipellitticità analitica che C^∞ dell'operatore di *Kohn* utilizzando la tecnica F.B.I., [5] [6]. La stessa prova permette di ottenere allo stesso tempo entrambi i tipi di ipoellitticità.

J.J. Kohn ha provato, [4], l'ipoellitticità C^∞ e nell' appendice dello stesso lavoro M.Derridj e D.S.Tartakoff l'ipoellitticità C^ω, per "l'operatore di Kohn"

$$P(x; D_x, D_y) = (D_x - ixD_y)(D_x + ixD_y) + (D_x + ixD_y)x^{2k}(D_x - ixD_y).$$

Ricordiamo che P è $C^\omega(C^\infty)$-ipoellittico se per una data $u \in \mathcal{D}'(U)$, dove U è sottoinsieme aperto di $\mathbf{R}^2$, per cui $Pu = f$ con $f \in C^\omega(C^\infty)$ si ha che $u \in C^\omega(C^\infty)$.

L'operatore P rientra nella più ampia classe degli operatoi "somme di quadrati" di campi vettoriali a coefficenti comlossi; in questa situazione il celebrato teorema di Hörmander (1967) non vale. Pur valendo la condizione per cui i campi coinvolti ed i loro commutatori di lunghezza al più r generano tutta l'algebra di Lie non è detto che l'operatore sia C^∞-ipoellittico. Se infatti si considera l'operatore $P(x; D_x, D_y) + D_s^2$ M. Christ(2004) ha provato che non è C^∞-ipoellittico. Sia Σ l'isieme caratteristico associato a P e $\rho_0 = (0, y_0, 0, \eta_0) \in \Sigma^+ = \{(0, y, 0, \eta) \in \Sigma \text{ con } \eta > 0\}$. Dove con $\Sigma^\pm$ si indicano le due componenti connesse di Σ.

Seguendo l'idea di Sjöstrand, [6], si ottiene

TEOREMA 1. – *Sia P l'operatore di Kohn. Sia* $\tilde{\rho}_0 \in \Pi_z(\Lambda_\varphi \cap \Sigma^{+\boldsymbol{C}})$ *allora vale*

$$|||u|||_{\varphi,\Omega_2} \leq \lambda^k \|\tilde{P}u\|_{\varphi,\Omega_1} + |||u|||_{\varphi,\Omega\setminus\Omega_2}$$

dove $H_T(\rho_0) = \tilde{\rho}_0 \in \Omega_2 \subset \Omega_1 \subset \Omega$.

$\tilde{P}$ indica l'operatore P dopo la trasformata F.B.I., $\Sigma^{\boldsymbol{C}}$ indica la complessificata di Σ e le norme sono definite come in [6]. Diamo particolare enfasi al fatto che la φ nella stima si ottiene da φ_0 tramite un'opportuno argomento di deformazione (per maggiori dettagli si veda [6]). Si può allora concludere che

COROLLARIO 1. – *Si ha che:* $\rho_0 \notin WF(Pu) \Longrightarrow \rho_0 \notin WF(u)$; $\rho_0 \notin WF_a(Pu) \Longrightarrow \rho_0 \notin WF_a(u)$.

3. – Regolarità Gevrey Microlocale Minimale per "Somme di Quadrati"

Viene provato un teorema di regolarità Gevrey microlocale minimale per operatori somme di quadrati di campi vettoriali a coefficenti reali analitici fornendo una versione microlocale del noto teorema di Derridj e Zuily [2].

Si considerino i campi vettoriali a coefficienti reali analitici $X_j(x, D)$ con $j = 1, \dots, \ell$, e $x \in \Omega \subset \boldsymbol{R}^n$. Consideriamo

$$L(x, D) = \sum_{j=1}^{\ell} X_j(x, D)^2.$$

l'operatore "somma di quadrati" dove $D_j = D_{x_j} = \dfrac{1}{\sqrt{-1}} \dfrac{\partial}{\partial x_j}$.

In questa situazione vale il celebrato Teorema di Hörmander (1967).

Per ottenere una versione microlocale del teorema di Derridj e Zuily, [2], si utilizza la stratificazione di Poisson-Treves della varietà caratteristica per operatori somme di quadrati, [7].

TEOREMA 2 ([7]). – *Sia* $\Sigma = Char(L)$, *l'insieme caratteristico di L. Allora esiste una stratificazione di* Σ *in varietà* C^ω*:i) ogni strato è una varietà analitica reale; ii)la forma simplettica* σ *ha rango costante su ogni strato; iii) sia* Σ_{v_jk} *uno strato, allora tutte le parentesi di Poisson dei campi vettoriali di lunghezza* $\leq v_j$ *si annullano su* Σ_{v_jk}, *ma esiste almeno una parentesi non nulla di lunghezza* $v_j + 1$.

Sia (x_0, ξ_0) un punto nell'insieme caratteristico Σ di L. Sia $v(x_0, \xi_0)$ il più piccolo numero per cui esiste una parentesi di lunghezza $v(x_0, \xi_0)$ che non è identicamente nulla in (x_0, ξ_0), appartiene quindi ad una delle componenti connesse di $\Sigma_{v(x_0,\xi_0)}$. Indichiamo con $v(x_0, \xi_0)$ la *profondità* della stratificazione in (x_0, ξ_0).

Si ottiene il seguente risultato

TEOREMA 3 (Albano-Bove-C. [1]). – *Sia L definito come sopra. Sia* (x_0, ξ_0) *un punto nell'insieme caratteristico* Σ *di L e* $\nu(x_0, \xi_0)$ *la sua profondità. Allora L è microlocalmente Gevrey-*$\nu(x_0, \xi_0)$ *ipoellittico.*

Osserviamo che $\nu(x_0, \xi_0)$ non è la regolarità Gevrey ottimale, ma è genericamente ottimale.

Si consideri l'operatore $D_x^2 + D_y^2 + (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 1)^4 D_t^2$. Si ha che $\Sigma = \Sigma^1 \cup \Sigma^2$ dove $\Sigma^1 = \{\rho \in T^*\boldsymbol{R}^3 : \xi = \eta = 0 \text{ e } x^2 + y^2 = 0\}$ e $\Sigma^2 = \{\rho \in T^*\boldsymbol{R}^3 : \xi = \eta = 0 \text{ e } x^2 + y^2 = 1\}$. Per i punti in Σ^1 il teorema dà regolarià G^2 anche se la regolarità ottimale è analitica mentre su Σ^2 il teorema dà regolarità G^3 che corrisponde alla regolarità ottimale.

Per ottenere il risultato voluto si seguono l' idea di Grigis e Sjöstrand, [3], e si utilizza la teoria degli Operatori Integrali di Fourier (FIO) via F.B.I., elaborata in [3]. Si ha

TEOREMA 4 ([1]). – *Sia* L^Ω *la realizzazione in* ω *di L dopo la trasformata F.B.I.. Sia* $\Omega_2 \subset\subset \Omega_1 \subset\subset \Omega$. *Si ottiene*

$$\lambda^{\frac{2}{r}} \|u\|_{\varphi,\Omega_2} \leq C\Big(\|L^\Omega u\|_{\varphi,\Omega_1} + \lambda^a \|u\|_{\varphi,\Omega\setminus\Omega_2} \Big).$$

dove a è una quantità positiva. $(r = \nu(x_0, \xi_0))$

La stima ottenuta risulta ottimale ed è necessaria per avere la regolarità Gevrey cercata. Per maggiori dettagli relativi alla notazione si vedano [2] e [1]. La funzione peso φ usata è ottenuta con una opportuna "perturbazione" di φ_0 dipendente dal parametro λ.

BIBLIOGRAFIA

[1] P. ALBANO, A. BOVE, and G. CHINNI *Minimal Microlocal Gevrey Regularity for "Sums of Squares"* , Int. Math. Res. Notices, **12** (2009, 2275-2302 .
[2] M. DERRIDJ and C. ZUILY, *Régularité analytique et Gevrey d'opérateurs elliptiques dégénérés*, J. Math. Pures Appl., **52** (1973), 309-336.
[3] A. GRIGIS and J. SJÖSTRAND *Front d'onde analytique et somme de carrés de champs de vecteurs*, Duke Math. J., **52** (1985), 35-51.
[4] J. J. KOHN *Hypoellipticity and loss of derivatives*. With an appendix by Makhlouf Derridj and David S. Tartakoff, Ann. of Math., **162** (2005), 943-986.
[5] J. SJÖSTRAND, *Singularités analytiques microlocales*, Astérisque, **95** (1982).
[6] J. SJÖSTRAND *Analytic wavefront sets and operators with multiple characteristics*, Hokkaido Math. J., **12** (1983), 392-433.
[7] F. TREVES, *Symplectic geometry and analytic hypo-ellipticity, in Differential equations: La Pietra 1996 (Florence)*, Proc. Sympos. Pure Math., **65**, 201-219 Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

Dipartimento di Matematica, Università di Bologna
e-mail: chinni@dm.unibo.it
Dottorato in Matematica
con sede presso l'Università di Bologna – Ciclo XX
Direttore di ricerca: Prof. Antonio Bove, Università di Bologna