La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Maria Bernadette Donato

Un approccio variazionale al problema di equilibrio competitivo Walrasiano: teoria dell'esistenza, caratterizzazione duale e analisi della sensitività

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **2** (2009), n.2 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 239–242.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2009_1_2_2_239_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2009.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. II, Agosto 2009, 239-242

Un approccio variazionale al problema di equilibrio competitivo Walrasiano: teoria dell'esistenza, caratterizzazione duale e analisi della sensitività

MARIA BERNADETTE DONATO

1. – Introduzione

Oggetto di studio della tesi è la stretta connessione tra la teoria delle disequazioni variazionali e problemi di equilibrio economico competitivo Walrasiano. È ben noto che la teoria delle disequazioni variazionali nasce negli anni 70, grazie ai contributi di Fichera e Stampacchia, come metodo innovativo ed efficace per risolvere diversi problemi di equilibrio quali il problema di Signorini, il problema dell'ostacolo.... Recentemente, sotto la spinta delle applicazioni, lo studio di questa teoria, in spazi finito e infinito dimensionali, sta avendo una grande diffusione. Infatti, un gran numero di problemi di equilibrio applicati possono essere formulati in termini di disequazioni variazionali e quasi-variazionali e, tale formulazione permette di descrivere efficacemente la struttura e le caratteristiche dei modelli.

Il modello economico preso in esame in questa tesi è stato studiato per la prima volta dall'economista francese Leon Walras nel 1874. La prima prova rigorosa dell'esistenza dell'equilibrio è stata presentata da Wald nel 1936 e successivamente Arrow e Debreu hanno pubblicato delle prove più generali e complete.
Gli obiettivi principali della tesi sono:

a) l'applicazione della teoria delle disequazioni variazionali ad un problema di equilibrio economico del prezzo Walrasiano;
b) l'applicazione della teoria delle disequazioni quasi-variazionali ad un problema di equilibrio economico competitivo.

I principali risultati presentati nella tesi sono riportati nelle note [1, 2, 3, 4].

2. – Problema di equilibrio del prezzo Walrasiano

Facendo uso della formulazione, mediante disequazioni variazionali, di un problema di equilibrio del prezzo Walrasiano nel caso finito dimensionale sviluppato in [5], si introduce un modello in cui i prezzi sono considerati in un intervallo di tempo $[0, T]$, scegliendo come spazio ambiente lo spazio di Lebesgue $L^2([0, T])$.

Nell'intervallo di tempo $[0, T]$ si considera un mercato economico di puro scambio costituito da l merci; ad ogni merce $j = 1, ..., l$ si associa un prezzo $p^j(t)$ al tempo t e si considera $p^j \in L^2([0, T], R)$. Si suppone che sia data una funzione eccesso di domanda aggregata $z(p)$ omogenea di grado zero in p e che soddisfi la legge di Walras $\langle z(p(t)), p(t) \rangle = 0$ q. o. in $[0, T]$. Il prezzo di equilibrio Walrasiano dipendente dal tempo è così definito: un vettore prezzo $\overline{p}$ è un vettore prezzo di equilibrio Walrasiano se e solo se $z(\overline{p}(t)) \leq 0$ q. o. in $[0, T]$.

La caratterizzazione dell'equilibrio è fornita dal seguente:

TEOREMA 1. – *Un vettore prezzo $\overline{p} \in P$ è un vettore prezzo di equilibrio Walrasiano se e solo se soddisfa la disequazione variazionale in evoluzione*

$$\int_0^T \langle z(\overline{p}(t)), p(t) - \overline{p}(t) \rangle dt \leq 0 \qquad \forall p \in P,$$

dove $P = \{p \in L^2([0, T], R^l) : \ p^j(t) \geq 0, \ \sum_{j=1}^{l} p^j(t) = 1 \ q.o. \ in \ [0, T]\}$.

Grazie a questa caratterizzazione, utilizzando la teoria della disequazioni variazionali, si è ottenuto un risultato di esistenza ed unicità del prezzo di equilibrio ed è stata fornita un'analisi della sensitività dello stesso, che consiste nello stabilire che a piccole variazioni dei dati corrispondono piccole variazioni delle soluzioni. Inoltre l'equilibrio viene caratterizzato mediante i moltiplicatori di Lagrange, che, come noto, assumono un ruolo importante nello studio di problemi di equilibrio. Per tale studio viene utilizzato un recente risultato sulla teoria della dualità nello spazio infinito dimensionale L^2.

3. – Problema di equilibrio economico competitivo

Si considera un mercato economico costituito da l merci e n agenti; denotiamo con e_a^j e x_a^j, rispettivamente, la merce $j = 1, ..., l$ posseduta e consumata dall'agente $a = 1, ..., n$ e con p^j il prezzo non negativo associato alla merce j. Si assume che ogni agente possieda almeno una merce: $\forall \ a = 1, ..., n \ \exists j : \ e_a^j > 0$. I vettori $e_a = (e_a^1, ..., e_a^l) \in R_+^l$, $x_a = (x_a^1, ..., x_a^l) \in R_+^l$, $x = (x_1, ..., x_n)^T \in R_+^{nl}$ e $p = (p^1, ..., p^l) \in R_+^l$ rappresentano, rispettivamente, il vettore dotazione iniziale, il vettore dei consumi, il vettore del consumo del mercato ed il vettore prezzo. In questo mercato, in cui prevale un comportamento competitivo, le preferenze di ogni singolo agente sulle varie merci sono rappresentate da una funzione utilità $u_a(\,\cdot\,) : R_+^l \to R$ che assumiamo soddisfi le seguenti ipotesi: per ogni agente $a = 1, ..., n$

$(U_{1,2})$ u_a è strettamente concava e $u_a \in C^1(R_+^l)$;

(U_3) $\forall x_a \in M_a(p) : \nabla u_a(x_a) \neq 0, \quad \forall p \in P$ e

$$\forall x_a \in \partial M_a(p) : \frac{\partial u_a(x_a)}{\partial x_a^s} > 0, \text{ quando } x_a^s = 0, \quad \forall p \in P;$$

(U_4) $\lim_{\substack{\|x_a\| \to +\infty \\ x_a \in M_a(p)}} u_a(x_a) = -\infty, \quad \forall p \in P,$

dove $\quad P = \{p \in R^l_+ : \sum_{j=1}^{l} p^j = 1\}$

e $\quad M_a(\overline{p}) = \left\{ x_a \in R^l : \ x^j_a \geq 0 \ \forall j = 1, ..., l, \ \sum_{j=1}^{l} \overline{p}^j (x^j_a - e^j_a) \leq 0 \right\}.$

L'obiettivo di ogni agente è di massimizzare la propria funzione utilità. In que-sta massimizzazione deve essere soddisfatto un vincolo naturale: per ogni agente a la somma dei costi delle merci acquistate non può superare la somma dei costi delle merci in dotazione. Matematicamente la definizione di equilibrio economico competitivo è formulata come segue:

DEFINIZIONE 1. – $(\overline{p}, \overline{x}) \in P \times \prod_{a=1}^{n} M_a(\overline{p})$ *è un equilibrio competitivo se e solo per ogni* $a = 1, ..., n$ $u_a(\overline{x}_a) = \max_{x_a \in M_a(\overline{p})} u_a(x_a)$, *e per ogni* $j = 1, 2, ..., l$ $\sum_{a=1}^{n} (\overline{x}^j_a - e^j_a) \leq 0$.

Si osserva che, nelle suddette ipotesi sulla funzione utilità, il mercato economico è un mercato Walrasiano, in quanto è soddisfatta la legge di Walras: $\sum_{j=1}^{l} p^j (\overline{x}^j_a(p) - e^j_a) = 0 \quad \forall p \in P$. Il problema dell'equilibrio economico competitivo viene formulato in termini di una disequazione quasi-variazionale associata alla funzione eccesso di domanda $\sum_{a=1}^{n} (\overline{x}_a(p) - e_a)$ e al gradiente delle funzioni utilità:

TEOREMA 2. – $(\overline{p}, \overline{x})$ *è un equilibrio competitivo se e solo se è una soluzione di*

$$\sum_{a=1}^{n} \langle \nabla u_a(\overline{x}_a(\overline{p})), x_a - \overline{x}_a(\overline{p}) \rangle + \left\langle \sum_{a=1}^{n} (\overline{x}_a(\overline{p}) - e_a), p - \overline{p} \right\rangle \leq 0 \quad \forall \, (p, x) \in P \times \prod_{a=1}^{n} M_a(\overline{p}).$$

Utilizzando l'approccio variazionale, l'esistenza della soluzione è studiata in un primo momento in ipotesi di linearità dell'operatore gradiente della funzione utilità ed in secondo luogo in ipotesi di forte monotonia dell'operatore. Nel nostro caso, per provare l'esistenza della soluzione della suddetta disequazione quasi-variazionale non è possibile adattare i risultati classici della teoria delle disequazioni quasi-variazionali, allora si propone un approccio differente. Si osserva che $(\overline{p}, \overline{x})$ è soluzione della disequazione quasi-variazionale se e solo se per ogni $a = 1, ..., n$, $\overline{x}_a$ è soluzione della disequazione variazionale

$$\langle \nabla u_a(\overline{x}_a(\overline{p})), x_a - \overline{x}_a(\overline{p}) \rangle \leq 0 \qquad \forall \, x_a \in M_a(\overline{p}),$$

e $\overline{p}$ è soluzione della disequazione variazionale

$$\left\langle \sum_{a=1}^{n} (\overline{x}_a(\overline{p}) - e_a), p - \overline{p} \right\rangle \leq 0 \qquad \forall p \in P.$$

Grazie a questa osservazione si utilizza una procedura a due steps: si considera, per ogni $a = 1, ..., n$ e per ogni $p \in P$, la disequazione

$$\langle \nabla u_a(\overline{x}_a), x_a - \overline{x}_a \rangle \leq 0 \qquad \forall\, x_a \in M_a(p).$$

Nelle nostre ipotesi esiste un'unica soluzione $\overline{x}_a$; allora nasce la funzione domanda $\overline{x}_a(p)$. Utilizzando la convergenza degli insiemi nel senso di Mosco si prova la continuità di $\overline{x}_a(\,\cdot\,)$ rispetto a p. Utilizzando poi questo risultato di regolarità della soluzione $\overline{x}_a$, si garantisce l'esistenza della soluzione $\overline{p}$ della disequazione variazionale

$$\left\langle \sum_{a=1}^{n} (\overline{x}_a(\overline{p}) - e_a), p - \overline{p} \right\rangle \leq 0 \qquad \forall p \in P.$$

In definitiva, la coppia $(\overline{p}, \overline{x}(\overline{p}))$ è soluzione della disequazione quasi-variazionale, allora è anche un equilibrio competitivo. Si ha inoltre la seguente caratterizzazione per mezzo dei moltiplicatori di Lagrange $\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma}, \overline{\delta}$:

TEOREMA 3. – $(\overline{p}, \overline{x})$ *è un equilibrio competitivo se e solo se esistono* $\overline{\alpha} = (\overline{\alpha}_1, ..., \overline{\alpha}_a, ..., \overline{\alpha}_n)$, $\overline{\beta} = (\overline{\beta}_1, ..., \overline{\beta}_a, .., \overline{\beta}_n)$, $\overline{\gamma} = (\overline{\gamma}^1, .., \overline{\gamma}^l)$ *and* $\overline{\delta}$ *such that:*

i) $\overline{\alpha}_a \in R^l_+$, $\quad \overline{\beta}_a \in R_+ \setminus \{0\}$, *per ogni* $a = 1, ..., n \quad \overline{\gamma} \in R^l_+$, $\quad \overline{\delta} \in R_+$

ii) for all $a = 1, .., n \quad \langle \overline{\alpha}_a, \overline{x}_a \rangle = 0, \qquad \overline{\beta}_a \langle \overline{p}, e_a - \overline{x}_a \rangle = 0; \qquad \langle \overline{\gamma}, \overline{p} \rangle = 0;$

iii) $\dfrac{\partial u_a(\overline{x}_a)}{\partial x^j_a} = \overline{\beta}_a \overline{p}^j - \overline{\alpha}^j_a \;\; \forall a = 1, .., n, \; j = 1, .., l; \;\; \sum_{a=1}^{n} (e^j_a - \overline{x}^j_a) = \overline{\gamma}^j \;\; \forall j = 1, ..., l$

$\overline{\delta} = 0; \overline{\beta}_a = \sum_{j=1}^{l} \left(\frac{\partial u_a(\overline{x}_a)}{\partial x^j_a} + \overline{\alpha}^j_a \right) \forall a = 1, .., n$

BIBLIOGRAFIA

[1] DONATO M. B., MILASI M. e VITANZA C., *Duality theory for a Walrasian equilibrium problem*, Journal of Nonlinear and Convex Analysis, **7** (2006), 393-404.

[2] DONATO M. B., MILASI M. e VITANZA C., *Dynamic Walrasian price equilibrium problem: evolutionary variational approach with sensitivity analisys*, Optimization Letters, **47** (2008), 113-126.

[3] DONATO M. B., MILASI M. e VITANZA C., *Quasi-variational approach of a competitive economic equlibrium problem with utility function: existence of equilibrium*, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, **18** (2008), 351-367.

[4] DONATO M. B., MILASI M. e VITANZA C., *An existence result of a quasi-variational inequality associated to an equilibrium problem*, Journal of Global Optimization, **40** (2008), 87-97.

[5] NAGURNEY A., Network Economics - A Variational Inequality Approach, Kluwer Academic Publishers (1993).

Dipartimento di Matematica, Università di Messina,
e-mail: mbdonato@gmail.com
Dottorato di Ricerca in Matematica
con sede presso l'Università di Messina - Ciclo XIX
Direttore di ricerca: Prof.ssa Carmela Vitanza, Università di Messina