La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Valentina Lanza

Dinamiche complesse in reti di oscillatori non lineari

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **2** (2009), n.2 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 255–258.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2009_1_2_2_255_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2009.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. II, Agosto 2009, 255-258

Dinamiche complesse in reti di oscillatori non lineari

Valentina Lanza

Le reti di oscillatori sono da sempre uno dei paradigmi maggiormente usati per descrivere i processi dinamici ripetitivi che avvengono nei sistemi complessi. Grandi reti di oscillatori accoppiati aventi diversi attrattori periodici sono stati studiati in molti campi della scienza e della tecnica, quali, ad esempio, la biologia, la fisica e l'ingegneria [4]. La caratteristica principale delle reti oscillanti è l'emergere di una sincronizzazione tra i singoli elementi (detti celle); si osserva, infatti, che spesso le celle modificano il loro ritmo in modo tale che un gran numero di esse esibiscano un comportamento correlato. Da un punto di vista matematico, l'emergenza di tale comportamento corrisponde all'esistenza di oscillazioni periodiche del sistema globale, che può essere descritto da un sistema accoppiato di equazioni differenziali nonlineari.

È evidente che la comprensione di come le interazioni tra le celle influenzino la comparsa e le proprietà di queste oscillazioni globali è di cruciale importanza per caratterizzare queste dinamiche complesse. Simulazioni numeriche *brute-force* nel dominio del tempo e tecniche classiche di analisi non lineare possono essere utilizzate in maniera efficace solo per sistemi che presentano relativamente semplici dinamiche o per reti di piccole dimensioni, e dunque nuove metodologie devono essere introdotte al fine di studiare le dinamiche globali di sistemi non lineari di grandi dimensioni.

Le tecniche nel dominio della frequenza, quali il bilanciamento armonico e la funzione descrittiva, sono metodi classici per lo studio e la progettazione di oscillatori elettronici e circuiti microonde non lineari [5]. La loro idea di base di rappresentare la soluzione periodica in serie di Fourier consente, infatti, di ridurre il problema alla risoluzione di un sistema di equazioni algebriche non lineari, invece che di un sistema di equazioni differenziali ordinarie non lineari. In particolare, il metodo della funzione descrittiva [5] è largamente utilizzato e consiste nell'approssimare la soluzione periodica fino alla prima armonica.

Recentemente alcune tecniche basate sul bilanciamento armonico sono state proposte [1] per studiare i fenomeni di biforcazione in circuiti non lineari che presentano diversi attrattori. In special modo, un approccio basato sul bilanciamento armonico è stato proposto per il calcolo dei moltiplicatori di Floquet di un ciclo limite. Il metodo suggerito purtroppo richiede il calcolo di determinanti di matrici di grandi dimensioni, calcolo che in alcuni casi può influire sull'accuratezza di alcuni moltiplicatori di Floquet. Nella prima parte di questo lavoro abbiamo sviluppato un approccio di tipo spettrale, interamente basato sul metodo della funzione descrittiva, per valutare i moltiplicatori di Floquet e, conseguentemente, individuare le biforcazioni di cicli limite più significative (*fold*, *flip*, ecc.) La tecnica proposta è caratterizzata dai seguenti passi: a) i parametri del ciclo limite (termine di *bias*, ampiezza e frequenza angolare) sono determinati attraverso l'applicazione della funzione descrittiva; b) i moltiplicatori di Floquet sono calcolati adattando il metodo in [1] al caso di una sola armonica. Confrontando la nostra tecnica con metodologie già presenti in letteratura e che utilizzano anch'esse la funzione descrittiva, abbiamo mostrato come le curve di biforcazione siano state correttamente individuate, e come, in molti casi, il nostro approccio ottenga predizioni più accurate. Inoltre la nostra tecnica permette di stimare l'intero insieme dei moltiplicatori di Floquet, e dunque consente di caratterizzare in maniera completa le proprietà di stabilità di ciascun ciclo limite del sistema.

È importante sottolineare come ovviamente i metodi basati sulla funzione descrittiva (che quindi usano un'approssimazione della soluzione con una sola armonica) non possono essere accurati quanto le tecniche che utilizzano il bilanciamento armonico. D'altro canto, l'utilizzo della funzione descrittiva presenta almeno due vantaggi rispetto al bilanciamento armonico: a) le equazioni risultanti sono semplici da maneggiare e di conseguenza permettono la trattazione di sistemi complessi (come reti non lineari di grandi dimensioni o sistemi che presentano molteplici attrattori, con complicati fenomeni di biforcazione), per cui le equazioni del bilanciamento armonico sono quasi ingestibili; b) fornisce una descrizione semplice e qualitativa della dinamica del sistema, che può efficacemente essere sfruttata ai fini della progettazione e del controllo.

La seconda parte del lavoro è stata dedicata alla studio e all'analisi di reti di oscillatori non lineari. In letteratura, le dinamiche di oscillatori non lineari sono state principalmente affrontate utilizzando simulazioni numeriche nel dominio del tempo e metodi spettrali. Queste tecniche permettono di studiare i sistemi a parametri di accoppiamento fissati, ma alcune tecniche analitiche sono necessarie per determinare in che modo il comportamento globale della rete dipenda dalle interazioni tra le singole celle.

Sotto l'ipotesi di accoppiamento debole tra le celle, ovvero tale per cui il comportamento dinamico di ogni oscillatore non sia troppo perturbato dall'interazione con gli altri oscillatori, risultati analitici possono essere ottenuti. In particolare, il Teorema di Malkin permette di studiare il comportamento dinamico globale del sistema attraverso l'evoluzione di una sola variabile, la deviazione di fase dall'oscillazione naturale del sistema singolo dovuta all'accoppiamento debole. Seguendo questo approccio, ogni ciclo limite (che sia stabile o instabile) della rete debolmente connessa corrisponde ad un punto di equilibrio per l'equazione di deviazione di fase. L'applicazione del Teorema di Malkin richiede però la conoscenza delle traiettorie del ciclo limite in assenza di accoppiamento. Per ovviare a ciò è stato proposto un metodo che, descrivendo il ciclo limite in termine della funzione descrittiva, permette di ottenere un'espressione analitica approssimata (ma sufficientemente accurata) per l'equazione di deviazione di fase [3].

Se questa ipotesi sull'intensità dell'accoppiamento è ragionevole per alcuni modelli in neuroscienze, d'altro canto ci sono alcuni casi in cui l'ipotesi di accoppiamento debole può risultare troppo restrittiva. Un approccio interessante proposto nella teoria delle microonde permette di ricavare un sistema di equazioni differenziali ordinarie non lineari, che descrivono l'evoluzione delle variabili di ampiezza e fase associate a ciascun oscillatore. Infatti, quando gli oscillatori sono fortemente accoppiati, la rappresentazione attraverso la sola variabile di fase non è sufficiente poiché la dinamica dell'ampiezza (che era ignorata nella precedente analisi) diventa importante e deve essere tenuta in conto.

Lo scopo del nostro lavoro è stato quello di estendere tale tecnica tenendo conto della non linearità degli elementi del circuito, considerando sistemi descritti da modelli di Lur'e e connessi l'uno all'altro attraverso accoppiamenti arbitrari. La procedura è principalmente basata sulla rappresentazione del comportamento dinamico di ciascuna cella come un'oscillazione con ampiezza e fase varianti nel tempo, rappresentazione che può anche essere vista come una generalizzazione della funzione decrittiva. Il risultato è un insieme di equazioni differenziali ordinarie non lineari nelle variabili di ampiezza e fase di ciascun oscillatore. Ciò permette di predire in maniera accurata il numero di soluzioni periodiche globali e le loro biforcazioni, in modo più facile rispetto alle metodologie già presenti in letteratura e basate su tecniche spettrali. Infatti, è opportuno osservare che la tecnica proposta consiste solo nella risoluzione di un sistema algebrico di piccole dimensioni e nel calcolo degli autovalori della matrice Jacobiana, mentre le analoghe tecniche spettrali sono computazionalmente molto onerose, dal momento che richiedono l'applicazione del bilanciamento armonico per stimare le oscillazioni periodiche e metodi nel dominio del tempo per calcolare i moltiplicatori di Floquet come autovalori della matrice fondamentale. Ne segue che il nostro metodo è capace di predire accuratamente la presenza di biforcazioni di cicli limite senza sforzi eccessivi dal punto di vista numerico. Abbiamo inoltre sviluppato l'analisi di stabilità per una catena (rete unidimensionale) composta da oscillatori accoppiati tramite connessioni non dipendenti dalla frequenza. In aggiunta, abbiamo dimostrato che sotto le ipotesi di accoppiamento debole ritroviamo le equazioni di deviazione di fase ottenute attraverso l'applicazione del Teorema di Malkin e della funzione descrittiva [3]. Infine, abbiamo considerato, come caso studio, una rete di quattro oscillatori del terzo ordine (circuiti di Chua) e abbiamo predetto le biforcazioni dei cicli limite al variare dei parametri dell'accoppiamento.

Come passo successivo ci siamo focalizzati su una caratteristica specifica di reti oscillanti non lineari, ovvero la loro capacità di ammettere come soluzioni stazionarie onde non lineari, e, più in generale, strutture spazio-temporali. In particolare abbiamo considerato le onde a spirale, uno dei più universali tra i *pattern* osservabili in mezzi dissipativi di natura eccitabile e oscillatoria. Come mostrato da recenti studi teorici e sperimentali, onde a spirale sono state riscontrate in molti mezzi eccitabili e attivi, quali il muscolo cardiaco, la retina, colture di batteri e reazioni chimiche come ad esempio quella di Belousov-Zhabotinsky [4].

Molti di questi fenomeni sono stati modellizzati in maniera adeguata tramite modelli continui alle derivate parziali, ma possono essere descritti anche attraverso equazioni differenziali ordinarie (mezzi spazialmente discreti). Seguendo il punto di vista di Kuramoto [4], infatti, i processi periodici globali a livello macroscopico possono essere interpretati come oscillazioni collettive risultanti dalla mutua sincronizzazione tra diversi oscillatori. In questo contesto, le CNN (*Cellular Nonlinear Networks*) e, più in generale, sistemi accoppiati di equazioni differenziali ordinarie sono stati largamente utilizzati per modellizzare e generare *pattern* spazio-temporali e fenomeni di onde non lineari.

Nel nostro lavoro ci siamo occupati dei modelli di equazioni differenziali ordinarie che davano luogo a strutture spazio-temporali oscillanti. In particolare, abbiamo studiato onde a spirale in reti bidimensionali di oscillatori debolmente accoppiati, utilizzando i modelli di fase proposti in [2] per questo tipo di *pattern*. Abbiamo mostrato come in questo caso l'applicazione congiunta del Teorema di Malkin e della funzione decrittiva dia luogo a un'approssimazione analitica delle equazioni di fase di forma diversa rispetto a quella presentata in [2] e che non ammette un'onda a spirale come stato stazionario. Questo mostra i limiti e la natura approssimata della funzione descrittiva, e suggerisce che l'applicazione del metodo del bilanciamento armonico (che rappresenta lo stato di ogni cella con più di un'armonica) è necessaria in questo caso per caratterizzare opportunamente le onde a spirale. Abbiamo quindi esteso il metodo proposto in [3] e il risultato principale è rappresentato da una semplice condizione che ci assicura dell'ammissibilità di un'onda a spirale in reti di oscillatori debolmente accoppiati. Tale condizione è ottenuta risolvendo un sistema di equazioni algebriche di piccole dimensioni e non richiede l'integrazione di un sistema di equazioni differenziali.

BIBLIOGRAFIA

[1] Bonani F. e Gilli M., *Analysis of stability and bifurcations of limit cycles in Chua's circuit through the harmonic-balance approach*, IEEE Trans. Circuits Systems I Fund. Theory Appl., **46** (1999), 881-890.

[2] Ermentrout B., *A heuristic description of spiral wave instability in discrete media*, Phys. D, **82** (1995), 154-164.

[3] Gilli M., Bonnin M. e Corinto F., *On global dynamic behavior of weakly connected oscillatory networks*, Int. J. Bifurcation Chaos, **15** (2005), 1377-1393.

[4] Kuramoto Y., *Chemical oscillations, waves, and turbulence* (Springer-Verlag, New York, 1984).

[5] Mees A.I., *Dynamics of feedback systems*, Wiley Ltd. (Chichester, 1981).

Dipartimento di Fisica, Politecnico di Torino
e-mail: valentina.lanza@polito.it
Dottorato in Matematica per le Scienze dell'Ingegneria
con sede presso il Politecnico di Torino – Ciclo XX
Direttori di ricerca: Prof. Andrea Bacciotti, Dipartimento di Matematica,
Prof. Marco Gilli, Dipartimento di Elettronica,
Politecnico di Torino