La Matematica nella Società e nella Cultura

RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

RUGGERO PAGNAN

Assiomi elementari per morfismi piccoli, un approccio fibrazionale

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **2** (2009), n.2 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 267–270.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2009_1_2_2_267_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2009.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. II, Agosto 2009, 267-270

Assiomi elementari per morfismi piccoli, un approccio fibrazionale

Ruggero Pagnan

Insiemi e funzioni tra essi costituiscono un esempio paradigmatico di categoria. Sebbene gli oggetti e i morfismi che costitutiscono una generica categoria non siano insiemi e funzioni di qualche sorta, essi possono venire concepiti come tali se si considerano le costruzioni che nella categoria stessa possono venire effettuate e che sono riconducibili alla modellizzazione di proprietà logiche. Tipicamente, i topos sono categorie che consentono la modellizzazione di proprietà logiche tali da renderli fedelmente assimilabili a categorie di insiemi e funzioni. La *teoria algebrica degli insiemi*, si veda [1], formalizza una teoria degli insiemi non basata sulla relazione di appartenenza ma piuttosto su operazioni tra insiemi. L'idea intuitiva di base è quella di considerare contesti di lavoro nei quali sia possibile distinguere tra ciò che si considera "piccolo" e ciò che si considera "grande", come ad esempio per quel che riguarda la distinzione tra insieme e classe propria o tra insiemi finiti e insiemi contabili. Sebbene in prima istanza non sia necessario, la teoria algebrica degli insiemi utilizza il formalismo e gli strumenti messi a disposizione dalla teoria delle categorie, dato che ciò consente di sviluppare in ampia generalità le idee poco sopra descritte. In particolare, una categoria viene concepita come se fosse costituita da *classi* e funzioni tra esse, rispettivamente corrispondenti a oggetti e morfismi della stessa. La nozione di insieme viene recuperata attraverso un processo di internalizzazione, tipico di un approccio categoriale. Più esplicitamente, in analogia con ciò che accade per le funzioni, che possono venire pensate come famiglie di insiemi indiciate da insiemi, si pensa ogni morfismo di una categoria come una famiglia di classi indiciata da una classe e si distinguono quei morfismi che si vogliono considerare come famiglie di *insiemi* indiciate da una classe, che da quel momento in avanti si diranno *morfismi piccoli*. Dal punto di vista della teoria algebrica degli insiemi un topos risulta essere una categoria in cui tutti i morfismi sono piccoli. In questo senso essa estende la teoria dei topos. Il comportamento dei morfismi piccoli all'interno di una categoria è regolato da assiomi che vengono fissati in tale generalità da dare luogo ad una teoria versatile e flessibile, in linea di principio tale da consentire al matematico che la utilizzi di modificarla secondo le proprie esigenze. Una categoria dotata di una collezione di morfismi piccoli che soddisfino opportuni assiomi è una *categoria con struttura delle classi*.

La teoria delle fibrazioni o categorie fibrate nasce nel contesto della geometria algebrica, si veda [2]. Di particolare interesse per quanto riguarda il tema presente è la proposta del suo utilizzo in relazione a questioni di carattere fondazionale, si veda [1]. La nozione di fibrazione generalizza quella di categoria. Una delle intuizioni che maggiormente ricorre consiste nel pensare ad una categoria fibrata come ad una categoria, detta categoria *totale*, che dipende in maniera "continua" da un'altra, detta categoria *base*. Coerentemente, si pensano gli oggetti della categoria base come collezioni di indici e si pensano gli oggetti della categoria totale come famiglie indiciate di strutture matematiche. Si dà corpo a questa intuizione realizzando una fibrazione come un funtore che consenta di "reindicizzare" tali famiglie. Un altro modo di intuire le categoria fibrate è maggiormente legato al loro utilizzo nel contesto della modellizzazione di logiche dipendenti da teorie di tipi. In questo senso si guarda alla categoria di base come ad una teoria di tipi e alla categoria totale come ad una logica da essa dipendente. Il tipo di realizzazione usata per dare corpo al precedente modo di intuire una fibrazione funziona altrettanto bene anche per quest'ultimo, la differenza consiste nel reinterpretare l'operazione di reindicizzazione come una operazione di "sostituzione". Risulta essere di primaria importanza la ricerca di caratterizzazioni per importanti proprietà possedute dalla categoria base di una fibrazione in termini delle proprietà possedute dal funtore che la realizza. Per quanto fino a qui espresso in merito alle categorie fibrate, dovrebbe risultare intuitivamente chiara la loro appropriatezza nella gestione di famiglie indiciate di classi e insiemi nel contesto della teoria algebrica degli insiemi. Non si può d'altra parte affermare che una raccolta sistematica dei risultati concernenti la teoria delle categorie fibrate esista. La letteratura a disposizione è frammentata e non omogenea.

La tesi è suddivisa in due parti principali. La prima parte consiste in una raccolta di risultati di teoria delle fibrazioni specificamente mirata all'utilizzo degli stessi in relazione alla modellizzazione di categorie con struttura delle classi, sviluppata nella seconda parte della tesi, con la particolare intenzione di esplicitare le corrispondenze esistenti tra la validità degli assiomi per una tale struttura e le proprietà possedute da opportune fibrazioni che ad essa possono venire associate. La seconda parte della tesi è stata elaborata in ipotesi di lavoro estremamente generali assumendo che la categoria base consentisse almeno la costruzione di pullbacks arbitrari e non necessariamente più che quelli, in accordo con l'argomento matematicamente giustificabile che vede in questo tipo di richiesta una condizione sufficiente affinché una buona porzione della ordinaria teoria delle categorie possa venire riletta in termini fibrazionali. In maggiore dettaglio, è stata considerata una categoria base con struttura delle classi determinata da una collezione di morfismi piccoli che soddisfacessero gli assiomi *stabilità*, *identità*, *definibilità*, *somme*, *prodotti*, e *rappresentabilità*. L'individuazione di tali assiomi è stata conseguenza di considerazioni matematiche sia di tipo puramente categoriale sia legate alla modellizzazione di teorie di tipi, a questo proposito si veda [3]. È inoltre importante sottolineare il fatto che si sia riusciti ad esprimere tali assiomi in termini categoriali elementari, vale a dire in termini di esplicite costruzioni diagrammatiche soddisfacenti opportune proprietà universali. Ad ognuno dei precedenti assiomi corrisponde una controparte intutitiva esprimibile nei termini dell'usuale linguaggio insiemistico. L'assioma stabilità richiede la stabilità per pullbacks dei morfismi piccoli. Questa richiesta, oltre a costituire un requisito imprescindibile per lo sviluppo di un approccio fibrazionale alla modellizzazione di categorie con struttura delle classi, è coerente con il fatto di voler fare riferimento agli insiemi come alle fibre dei morfismi piccoli. In collegamento con questo, l'assioma identità richiede che ogni morfismo identico sia un morfismo piccolo e ciò corrisponde a volere che ogni singoletto sia un insieme. Dal punto di vista della teoria delle fibrazioni, l'assioma definibilità riguarda l'intenzione di limitare un utilizzo incontrollato dello schema di comprensione nel contesto della teoria delle categorie. Esso, nel presente contesto, consente l'introduzione del predicato "piccolo" nella logica interna della fibrazione. L'assioma somme richiede che i morfismi piccoli siano chiusi per composizione, esso corrisponde al fatto che l'unione di una famiglia di insiemi indiciata da un insieme sia un insieme, che in particolare comporta che il prodotto cartesiano di due insiemi sia un insieme. L'assioma prodotti ha richiesto l'esplicitazione di una costruzione categoriale articolata consistente nella possibilità di ottenere un diagramma come

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\varphi"'] & A \arrow[r, "\alpha"] & I \arrow[d, "u"] \\ E \arrow[rr, "e"'] & & J \end{tikzcd}$$

a partire dai morfismi a e u che si assumono essere entrambi piccoli, in maniera tale che esso risulti un pullback e che soddisfi una ulteriore proprietà universale. In termini elementari, tale possibilità corrisponde a richiedere che il prodotto di una famiglia di insiemi indiciata da un insieme sia un insieme, che in particolare comporta che la collezione delle funzioni da un insieme ad un altro sia un insieme.

L'assioma rappresentabilità richiede in termini categoriali elementari che per ogni classe esista la classe dei suoi sotto*insiemi* e che esse siano legate attraverso la relazione di appartenenza nel miglior modo possibile, che si esprime tramite la validità di una opportuna proprietà universale. Se S denota la struttura delle classi sommariamente descritta sopra e F la fibrazione ad essa associata allora la validità degli assiomi precedenti è in relazione con alcune proprietà peculiari possedute da F. Nello specifico, l'assioma somme equivale al fatto che F abbia coprodotti S-indiciati, l'assioma prodotti equivale al fatto che F sia cartesiana chiusa rispetto a S. Gli assiomi identità, somme e prodotti implicano la locale piccolezza di F, che dal punto di vista della teoria delle fibrazioni risulta essere una piacevole proprietà da avere a disposizione, specialmente se posta in relazione con l'assioma definibilità. L'assioma rappresentabilità è equivalente alla rappresentabilità, in un senso matematicamente preciso, di un'altra fibrazione diversamente associabile a S. Nella parte finale della tesi si è cercato di indirizzare la ricerca lungo vie concernenti possibili generalizzazioni della teoria dei topos con l'intenzione di capire quanta parte delle precedenti considerazioni potesse venire impiegata a tale scopo, anche sulla base della letteratura preesistente, si veda [2]. Un'altra via di ulteriore svilupppo è suggerita dalla possibilità di riformulare gli assiomi per una struttura delle classi nel linguaggio interno di una fibrazione, ad ulteriore conferma del valore di un approccio fibrazionale alla modellizzazione di categorie con struttura delle classi.

BIBLIOGRAFIA

[1] J. Bénabou, *Fibered categories and the foundations of naive category theory*, The Journal of Symbolic Logic, **Vol. 50**, Number 1 (1985), 10-37.
[2] T. Ehrhard, *Dictoses*, Lecture Notes in Computer Science, **Vol. 389** (1989), 213-223.
[3] A. Grothendieck, *Catégories Fibrées et Descent (Exposé VI)*, Lecture Notes in Mathematics, **Vol. 224** (1970), 145-194.
[4] B. Jacobs, *Categorical Logic and Type Theory*, Studies in Logic, Elsevier, **Vol. 141** (2001), 1-760.
[5] A. Joyal e I. Moerdijk, *Algebraic Set Theory*, Lecture Notes Series, London Mathematical Society, Cambridge University Press, **Vol. 220** (1995), 1-123.

Dipartimento di Informatica e Scienze dell'Informazione,
Università di Genova
e-mail: ruggero.pagnan@disi.unige.it
Dottorato in Matematica e Applicazioni
con sede presso l'Università di Genova - Ciclo XX
Direttore di ricerca: Prof. Giuseppe Rosolini, Università di Genova