*La Matematica nella Società e nella Cultura*

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Bruno Antonio Pansera

# Principi di selezione in topologia generale: proprietà relative e applicazioni agli spazi di funzioni continue

*La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1*, Vol. **2** (2009), n.2 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 271–274.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2009_1_2_2_271_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2009.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. II, Agosto 2009, 271-274

# Principi di selezione in topologia generale: proprietà relative e applicazioni agli spazi di funzioni continue

BRUNO ANTONIO PANSERA

## 1. – Introduzione

Importanti classi di spazi topologici possono essere descritte mediante opportuni schemi, ottenuti assegnando famiglie $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ di ricoprimenti aperti e procedure $\mathcal{P}$, che permettono di costruire partendo da elementi di $\mathcal{A}$, mediante l'ausilio di $\mathcal{P}$, elementi di $\mathcal{B}$. Tali procedure vengono dette *Principi di Selezione*.

Il simbolo $S_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ (risp. $S_{fin}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$) [5] denota la seguente ipotesi selettiva:

per ogni successione $(\mathcal{A}_n : n \in \boldsymbol{N})$ di elementi di $\mathcal{A}$, selezioniamo per ogni $n \in \boldsymbol{N}$ un elemento $A_n \in \mathcal{A}_n$ (risp. un sottoinsieme finito $\mathcal{B}_n$ di $\mathcal{A}_n$) tale che $\{A_n : n \in \boldsymbol{N}\} \in \mathcal{B}$ (risp. $\bigcup_{n \in \boldsymbol{N}} \mathcal{B}_n \in \mathcal{B}$).

A tali principi di selezione vengono associati dei giochi, come ad esempio a $S_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ il gioco $G_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ [5] il quale è definito in modo tale che per venga giocato da UNO e DUE (i partecipanti) un inning per ogni numero intero positivo. Nell'n-esimo inning UNO seleziona per primo un insieme $\mathcal{A}_n \in \mathcal{A}$, mentre DUE selezione un elemento $B_n \in \mathcal{A}_n$. Il gioco $(\mathcal{A}_1, B_1, \mathcal{A}_2, B_2, \dots,)$ è vinto da DUE se l'insieme $\{B_n : n \in \boldsymbol{N}\}$ è un elemento di $\mathcal{B}$. Nel caso contrario, il gioco viene vinto da UNO.

Il simbolo dell'*Ordinaria Relazione di Partizione* $\mathcal{A} \to (\mathcal{B})^n_k$ [5] afferma, data una coppia di interi $(n, k)$, che:

per ogni $A \in \mathcal{A}$ ed ogni funzione $f : [A]^n \to \{1, 2, \dots, k\}$ esistono un insieme $B \in \mathcal{B}$, con $B \subset A$, e qualche $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ tale che, per ogni $Y \in [B]^n$, $f(Y) = i$.

Le famiglie $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ variano all'intermo delle seguenti famiglie di ricoprimenti: $\mathcal{O}$-collezione dei ricoprimenti *aperti* di $X$; $\Omega$-collezione degli $\omega$-ricoprimenti di $X$ (Un ricoprimento aperto $\mathcal{U}$ di $X$ è un *$\omega$-ricoprimento* [5] se $X \notin \mathcal{U}$ ed ogni sottoinsieme finito di $X$ è contenuto in qualche elemento di $\mathcal{U}$); $\mathcal{K}$- collezione dei $k$-ricoprimenti di $X$ (Un ricoprimento aperto $\mathcal{U}$ di $X$ è un *$k$-ricoprimento* [3] se $X \notin \mathcal{U}$ e ogni sottoinsieme compatto di $X$ è contenuto in qualche elemento di $\mathcal{U}$); $\Gamma_k$- collezione dei $\gamma_k$-ricoprimenti di $X$ (Un ricoprimento aperto $\mathcal{U}$ di $X$ è un *$\gamma_k$-ricoprimento* [3] se è infinito ed ogni sottoinsieme compatto di $X$ è contenuto in tutti, eccetto che per un numero finito, gli elementi di $\mathcal{U}$); $\Omega_x$ (Dato uno spazio topologico X e un punto $x \in X$, il simbolo $\Omega_x$ denota il seguente insieme: $\{A \subset X \setminus \{x\} : x \in \overline{A}\}$).

Per uno spazio di Tychonoff $X$, il simbolo $C_p(X)$ (risp. $C_k(X)$) denota l'insieme delle funzioni continue definite in $X$ ed a valori reali dotato della topologia della *convergenza puntuale* (risp. *compatta aperta*). Per una funzione $f \in C_p(X)$, un insieme finito $F$ di $X$ (risp. $f \in C_k(X)$, un insieme compatto $K$ di $X$) ed un numero reale positivo $\varepsilon$ poniamo $W(f; F; \varepsilon) = \{g \in C_p(X) : |f(x) - g(x)| < \varepsilon, \forall x \in F\}$ (risp. $W(f; K; \varepsilon) = \{g \in C_p(X) : |f(x) - g(x)| < \varepsilon, \forall x \in K\}$). La base locale standard di un punto $f \in C_p(X)$ (risp. $f \in C_k(X)$) consiste degli insiemi del tipo $W(f; F; \varepsilon)$ (risp. $W(f; K; \varepsilon)$).

La funzione $\pi : C_p(X) \to C_p(Y)$ (risp. $\pi : C_k(X) \to C_k(Y)$ è definita dalla relazione $\pi(f) = f_{|Y}$, per ogni $f \in C_p(X)$ (rispettivamente $f \in C_k(X)$).

Per uno spazio topologico $X$ e $Y$ un suo sottospazio, $\mathcal{A}_X$ denota la famiglia dei ricoprimenti aperti di $X$, $\mathcal{A}_{YX}$ indica la collezione dei ricoprimenti aperti di $Y$ costituiti da insiemi aperti in $X$.

In questo lavoro studiremo strutture combinatorie definite sugli spazi topologici dai principi di selezione. Daremo delle versioni relative di alcuni principi di selezione e faremo vedere come questi schemi si possono applicare agli spazi di funzioni continue.

## 2. – Principi di Selezione: Versioni Relative

In questa sezione diamo una versione relativa del principio di selezione $S_1(\mathcal{K}, \Gamma_k)$. Lo studio della relativizzazione di una proprietà topologica, rappresenta un possibile modo per descrivere la posizione di un sottoinsieme $Y \subseteq X$ nello spazio $X$ mediante le proprietà topologiche.

DEFINIZIONE 1 [2]. – *Sia $Y$ un sottospazio di uno spazio $X$. Diciamo che $Y$ è un $\gamma_k$-insieme in $X$ (oppure un $\gamma_k$-insieme relativo in $X$) se verifica l'ipotesi selettiva $S_1(\mathcal{K}_X, (\Gamma_k)_{YX})$.*

Caratterizziamo i $\gamma_k$-insiemi relativi in differenti modi.

DEFINIZIONE 2 [2]. – *Sia $Y$ un sottospazio di uno spazio $X$. Diciamo che $Y$ è emicompatto in $X$ se esiste una successione $(C_n : n \in \boldsymbol{N})$ di sottoinsiemi compatti di $X$ tale che ogni insieme compatto $K \subset Y$ è contenuto in $C_n$, per qualche $n \in \boldsymbol{N}$.*

TEOREMA 1 [2]. – *Sia $Y$ un sottospazio dello spazio $X$. Allora $Y$ è emicompatto in $X$, allora $S_1(\mathcal{K}_X, (\Gamma_k)_{YX})$ vale.*

La seguente caratterizzazione, studia il comportamento dei $\gamma_k$-insiemi relativi in termini di teoria dei giochi e teoria di Ramsey.

TEOREMA 2 [2]. – *Per uno spazio k-Lindelöf $X$ ed un sottospazio $Y$ di $X$, le seguenti sono equivalenti:*

1. *$S_{fin}(\mathcal{K}_X, (\Gamma_k)_{YX})$ vale;*
2. *$S_1(\mathcal{K}_X, (\Gamma_k)_{YX})$ è soddisfatto, cioè $Y$ è un $\gamma_k$-insieme in $X$;*
3. *UNO non ha una strategia vincente nel gioco $G_1(\mathcal{K}_X, (\Gamma_k)_{YX})$;*
4. *Per tutti gli $n, m \in \boldsymbol{N}$, si verifica $\mathcal{K}_X \to ((\Gamma_k)_{YX})^n_m$.*

TEOREMA 3 [2]. – *Dati gli spazi $X$ e $Y$ e i sottospazi $Z \subseteq X$ e $T \subseteq Y$ che, se $Z$ soddisfa $S_1(\mathcal{K}_X, (\Gamma_k)_{ZX})$ e $T$ è emicompatto in $Y$, $S_1(\mathcal{K}_{X\times Y}, (\Gamma_k)_{Z\times T X\times Y})$ vale.*

## 3. – Principi di Selezione: Applicazione agli Spazi di Funzione

Studiamo, in tale sezione, le dualità tra proprietà di ricoprimento degli spazi topologici e alcune proprietà di chiusura delle funzioni continue. Diamo una versione della proprietà di Pytkeev per le funzioni continue. Tale ricerca, è parte integrante dell'idea piú generale, introdotta da Cammaroto ed altri,di trasferire delle proprietà definite su spazi topologici alle funzioni continue. Gli spazi considerati in questa sezione sono di Tychonoff.

DEFINIZIONE 3. – *Per uno spazio $X$ ed un punto $x \in X$, una famiglia $\mathcal{F}$ di sottoinsiemi di $X$ è detta $\pi$-network in $x$ se ogni intorno di $x$ contiene un elemento di $\mathcal{F}$.*

DEFINIZIONE 4 [4]. – *Siano $X$ e $Y$ sono spazi topologici e $f : X \to Y$ è una funzione continua e $x \in X$. Diciamo che $f$ ha la proprietà di Pytkeev in $x$ se per ogni elemento $A$ di $\Omega_x$ esiste una successione $(B_n : n \in \boldsymbol{N})$ di sottoinsiemi infiniti di $A$ tale che $\{f(B_n) : n \in \boldsymbol{N}\}$ è un $\pi$-network in $f(x)$.*

DEFINIZIONE 5 [4]. – *Un $\omega$-ricoprimento (risp. k-ricoprimento) $\mathcal{U}$ di $X$ è detto relativamente $\omega$(k)-shrinkable rispetto ad $Y$ (sottospazio di $X$) se per ogni $U \in \mathcal{U}$ esiste un insieme chiuso $C(U)$ di $X$ tale che $U \subset C(U)$ e $\{C(U) : U \in \mathcal{U}\}$ è un $\omega$-ricoprimento (risp. k-ricoprimento) di $Y$.*

TEOREMA 4 [4]. – *La funzione $\pi : C_p(X) \to C_p(Y)$ ha la proprietà di Pytkeev se e solo se $\mathcal{U}$ è un $\omega$-ricoprimento di $X$ relativamente $\omega$-shrinkable rispetto ad $Y$, esiste una successione $(\mathcal{V}_n : n \in \boldsymbol{N})$ di sottofamiglie di $\mathcal{U}$ tali che, per ogni $n \in \boldsymbol{N}$, $|\mathcal{V}_n| = \omega$ e $\{\cap\mathcal{V}_n : n \in \boldsymbol{N}\}$ è un $\omega$-ricoprimento di $Y$.*

TEOREMA 5 [4]. – *La funzione $\pi : C_k(X) \to C_k(Y)$ ha la proprietà di Pytkeev se e solo se $\mathcal{U}$ è un k-ricoprimento di $X$ relativamente k-shrinkable rispetto ad $Y$, esiste una successione $(\mathcal{V}_n : n \in \boldsymbol{N})$ di sottofamiglie di $\mathcal{U}$ tali che, per ogni $n \in \boldsymbol{N}$, $|\mathcal{V}_n| = \omega$ e $\{\cap\mathcal{V}_n : n \in \boldsymbol{N}\}$ è un k-ricoprimento di $Y$.*

Un analogo studio è stato sviluppato per la proprietà di Reznichenko e la (strong) fan tightness (vedi [4]).

## BIBLIOGRAFIA

[1] W. Just, A. W. Miller, M. Scheepers e P. J. Szeptycki, *Combinatorics of open covers II*, Topology and its Applications, **73** (1996), 241-266.
[2] M. Bonanzinga, F. Cammaroto e B. A. Pansera, *On relative $\gamma_\kappa$-sets*, Bollettino U.M.I., **10** (2)(2007), 445-454.
[3] Lj. D. R. Kočinac, *$\gamma$-sets, $\gamma_k$-sets and hyperspaces*, Mathematica Balcanika, in fase di pubblicazione.
[4] B. A. Pansera, *Relative properties on function spaces*, Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS), **30** (2) (2008), 359-372.
[5] M. Scheepers, *Combinatorics of open covers I: Ramsey theory*, Topology and its Applications, **69**(1996), 31-62.

Dipartimento di Matematica, Università di Messina
e-mail: brunopansera@virgilio.it
Dottorato in Matematica
con sede presso l'Università di Messina - Ciclo XVIII
Direttore di ricerca: Prof. Filippo Cammaroto, Università di Messina