La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Valentina Russo

CL-sottogruppi di p-gruppi finiti

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **2** (2009), n.2 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 283–286.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2009_1_2_2_283_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2009.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. II, Agosto 2009, 283-286

CL-sottogruppi di *p*-gruppi finiti

VALENTINA RUSSO

In questa tesi abbiamo studiato particolari proprietà aritmetiche di p-gruppi finiti ed una particolare classe di sottogruppi di p-gruppi finiti naturalmente definiti a partire da tali proprietà.

In [2] A. Chermak e A. Delgado hanno presentato un "measuring argument" per gruppi finiti, a partire dal quale hanno ottenuto numerosi risultati per speciali classi di gruppi finiti e potenti applicazioni per gruppi semplici finiti e per p-gruppi finiti.

In un recente lavoro G. Glauberman (si veda [3]) ha studiato un caso particolare delle proprietà introdotte da Chermak e Delgado, fornendo altri risultati per p-gruppi finiti:

Sia G un p-gruppo finito.

DEFINIZIONE 1. – *Un sottogruppo abeliano A di G è large se*

$$|A| \geq |A^*|$$

per ogni sottogruppo abeliano A^* di G.

DEFINIZIONE 2. – *Un sottogruppo Q di G è* centrally large, *o un* CL-sottogruppo, *se*

$$|Q|\,|Z(Q)| \geq |Q^*|\,|Z(Q^*)|$$

per ogni sottogruppo Q^* di G.

Un CL-sottogruppo soddisfa la condizione

$$|Q|\,|C_G(Q)| \geq |Q^*|\,|C_G(Q^*)|$$

per ogni sottogruppo Q^* di G.

Se Q, R sono CL-sottogruppi, allora

$$QR = RQ \text{ e un CL-sottogruppo di } G,$$

così G contiene un unico CL-sottogruppo massimale.

Si ha una stretta connessione tra CL-sottogruppi e sottogruppi abeliani large. In particolare, ogni CL-sottogruppo contiene un sottogruppo abeliano large, e se A è un sottogruppo abeliano large di G e Q è un CL-sottogruppo di G, allora

$$QA = AQ \text{ e un CL-sottogruppo di } G.$$

Ciò fornisce una condizione sufficiente affinchè $J(G)$, il sottogruppo di Thompson di G, generato dall'insieme dei sottogruppi abeliani large di G, sia un sottogruppo proprio di G.

DEFINIZIONE 3. – *Un CL-sottogruppo è minimale se lo è rispetto all'inclusione nell'insieme dei CL-sottogruppi.*

I CL-sottogruppi minimali hanno tutti lo stesso ordine e lo stesso sottogruppo derivato, il quale è un sottogruppo caratteristico di G.

In particolari situazioni di "pushing-up" (in particolare si veda [4]), se G è un gruppo finito ed S è un p-sottogruppo di Sylow di G, il sottogruppo derivato dei CL-sottogruppi minimali di S è un sottogruppo normale di G.

Inoltre esiste un CL-sottogruppo minimale normalizzato da $J(G)$, da tutti i CL-sottogruppi minimali di G e da tutti i sottogruppi normali di G aventi classe di nilpotenza al più $p-1$.

DEFINIZIONE 4. – *G è un self-minimal CL-gruppo, o un SMCL-gruppo, se è un CL-sottogruppo minimale di se stesso.*

G è un SMCL-gruppo se e solo se

$$|G|\,|Z(G)| > |A|\,|C_G(A)|$$

per ogni sottogruppo normale abeliano A contenente propriamente $Z(G)$.

In [3] è dato il seguente esempio di SMCL-gruppo:

- Sia $\mathcal{N}$ il gruppo di Nottingham per il campo finito F_p e sia

$$\{\mathcal{N}_n, \text{ tale che } n \text{ e un intero positivo}\}$$

una particolare serie discendente di sottogruppi normali di $\mathcal{N}$ (per le definizioni si veda [1]). Allora $\mathcal{N}/\mathcal{N}_{p+3}$ è un SMCL-gruppo di ordine p^{p+2} e classe di nilpotenza p.

Nella tesi abbiamo studiato qualche ulteriore proprietà strutturale dei CL-sottogruppi di p-gruppi finiti, in particolare degli SMCL-gruppi, e abbiamo fornito altri esempi e controesempi:

- Il gruppo libero G d-generato di esponente p e classe di nilpotenza 2, per $d \geq 3$ e p primo dispari, tale che $|G| = p^{d+\frac{d(d-1)}{2}}$ e $|Z(G)| = |G'| = p^{\frac{d(d-1)}{2}}$ è un SMCL-gruppo.
- Il gruppo libero G 2-generato di esponente p e classe di nilpotenza 3, per $p \geq 5$, tale che $|G| = p^5$ e $|Z(G)| = p^2$ è un SMCL-gruppo.
- Se $|Z(G)| = p$, allora G non è un SMCL-gruppo; in particolare, i p-gruppi di classe massimale non sono SMCL-gruppi.

- Se $|G/Z(G)| = p^2$, allora G non è un SMCL-gruppo.
- Se $c \geq 3$ e $|\gamma_c(G)| = p$, allora G non è un SMCL-gruppo.
- Se A è un sottogruppo normale abeliano massimale di G, $[G, A]$ è ciclico e $\Omega([G, A]) \subseteq Z(G)$, allora G non è un SMCL-gruppo.
- Se G è un gruppo di classe di nilpotenza 2, allora se $exp(G) = p$ e $|G'| = p^2$, oppure se G' è ciclico, oppure se $p \neq 2$ e G' è un sottogruppo abeliano di rango 2, allora G non è un SMCL-gruppo.

I principali risultati ottenuti sono i seguenti:

Il prodotto diretto di due SMCL-gruppi è un SMCL-gruppo.

Un SMCL-gruppo G possiede un sottogruppo H tale che

$$|G|\,|Z(G)| = |H|\,|C_G(H)|$$

se e solo se $G = HK$, con $K = C_G(H)$, $H = C_G(K)$. Inoltre, in tal caso, H, K sono SMCL-gruppi.

Viceversa, se G ha una tale struttura, ovvero $G = HK$, con $H = C_G(K)$, $K = C_G(H)$, e H, K sono SMCL-gruppi, allora G è un CL-sottogruppo di se stesso, non necessariamente minimale, come i seguenti esempi mostrano:

- Siano H_1, H_2 due copie dell'SMCL-gruppo libero 2-generato di esponente p e classe di nilpotenza 3, per $p \geq 5$. Consideriamo il prodotto centrale $G = H_1H_2$, con $Z(H_1) = Z(H_2)$. Allora G è un SMCL-gruppo.
- Siano H_1, H_2 due copie dell'SMCL-gruppo libero 3-generato di esponente p e classe di nilpotenza 2, per $p \geq 5$. Consideriamo il prodotto centrale $G = H_1H_2$, con $Z(H_1) = Z(H_2)$ e supponiamo che -1 sia un quadrato mod p. Allora G non è un SMCL-gruppo.

Se G è un SMCL-gruppo ed A è un gruppo abeliano, allora $G \times A$ è un SMCL-gruppo; se H è un sottogruppo di G tale che $HZ(G) = G$, allora H è un SMCL-gruppo; se N è un sottogruppo normale di G tale che $N \cap G' = 1$, allora G/N è un SMCL-gruppo.

Da questo segue che la proprietà di essere un SMCL-gruppo è invariante per isoclinismo (si veda [5]).

Non è quindi restrittivo considerare i cosiddetti gruppi *stem* della famiglia degli SMCL-gruppi, ovvero gli SMCL-gruppi tali che $Z(G) \leq G'$, allo scopo di classificare questa speciale classe di p-gruppi finiti.

BIBLIOGRAFIA

[1] R. CAMINA, *The Nottingham group*, New Horizons in pro-p Groups, ed. by M. du Sautoy, et al (Birkháuser Boston, Boston, 2000), 205-222.

[2] A. CHERMAK e A. DELGADO, *A measuring argument for finite groups*, Proc. Amer. Math. Soc., **107** (1989), 907-914.

[3] G. Glauberman, *Centrally Large Subgroups of finite p-groups*, Journal of Algebra, **300**(2006), 480-508.
[4] G. Glauberman e R. Niles, *A pair of characteristic subgroups for pushing-up in finite groups*, Proc. London Math. Soc. (3), **46** (1983), 907-914.
[5] P. M. Weichsel, *On isoclinism*, Journal of London Math. Soc., **38** (1963), 63-65.

Dipartimento di Matematica Pura e Applicata, Università di L'Aquila
e-mail: valentina.russo@univaq.it
Dottorato in Matematica
con sede presso l'Università di L'Aquila - Ciclo XX
Direttore di ricerca: Prof. Carlo M. Scoppola, Università di L'Aquila