

---

# *La Matematica nella Società e nella Cultura*

RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

---

SIMONE SCACCHI

## **Precondizionatori di Schwarz multilivello per il sistema Bidominio e applicazioni in elettrocardiologia**

*La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. 2 (2009), n.2 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 287–290.*

Unione Matematica Italiana

[http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI\\_2009\\_1\\_2\\_2\\_287\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2009_1_2_2_287_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)  
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2009.

## **Precondizionatori di Schwarz multilivello per il sistema Bidominio e applicazioni in elettrocardiologia**

SIMONE SCACCHI

### **1. – Introduzione**

Negli ultimi anni una vasta letteratura interdisciplinare si è concentrata sull'attività bioelettrica del cuore, con particolare attenzione alle patologie cardiache. Il modello matematico più completo dell'elettrofisiologia cardiaca è il modello Bidominio [4], un sistema parabolico degenere di equazioni alle derivate parziali di reazione-diffusione nonlineari, che modellano i potenziali elettrici intra- ad extra-cellulari del tessuto cardiaco (macroscala). Le equazioni alle derivate parziali sono accoppiate tramite il termine di reazione con un sistema stiff di equazioni differenziali ordinarie, detto modello di membrana, che descrive l'attività elettrica della membrana cellulare (microscala).

L'approssimazione numerica del sistema Bidominio è molto costosa dal punto di vista computazionale, a causa dell'interazione tra scale spaziali e temporali molto diverse fra loro e della natura degenere delle equazioni alle derivate parziali coinvolte. Nella maggior parte degli studi numerici sul sistema Bidominio sono stati sviluppati metodi agli elementi finiti per la discretizzazione in spazio e metodi semi-impliciti per la discretizzazione in tempo, che richiedono ad ogni passo temporale la soluzione di un sistema lineare di grosse dimensioni e mal condizionato. Diversi tipi di preconditionatori sono stati proposti in letteratura per accelerare la convergenza di metodi iterativi per la soluzione di tali sistemi lineari; si vedano ad esempio [1, 5].

In questo lavoro sono stati studiati dei preconditionatori di Schwarz multilivello per il sistema Bidominio. Sono state dimostrate stime di scalabilità e di ottimalità, cioè che la convergenza di tali metodi è indipendente dal numero di sottodomini (scalabilità), dai parametri di discretizzazione e dal numero di livelli (ottimalità). I risultati teorici sono stati validati da test numerici paralleli su cluster linux.

### **2. – Il modello Bidominio**

L'evoluzione in tempo dei potenziali elettrici intra- ed extra-cellulari  $u_i$ ,  $u_e$  e del potenziale transmembranario  $v = u_i - u_e$  in un dominio tridimensionale  $\Omega$  rappresentante una porzione di tessuto cardiaco è descritta nel modello Bidominio dal seguente sistema di equazioni alle derivate parziali paraboliche di reazione-diffu-

sione, accoppiato con un sistema di equazioni differenziali ordinarie, detto modello di membrana, per le variabili ioniche  $w$ :

$$(1) \quad \begin{cases} c_m \frac{\partial v}{\partial t} - \operatorname{div}(\mathbf{D}_i \nabla u_i) + I_{ion}(v, w) = I_{app} & \text{in } \Omega \times (0, T) \\ -c_m \frac{\partial v}{\partial t} - \operatorname{div}(\mathbf{D}_e \nabla u_e) - I_{ion}(v, w) = -I_{app} & \text{in } \Omega \times (0, T) \\ n^T \mathbf{D}_i \nabla u_i = 0 \quad n^T \mathbf{D}_e \nabla u_e = 0 & \text{su } \partial\Omega \times (0, T) \\ \frac{\partial w}{\partial t} - R(v, w) = 0, & \text{in } \Omega \times (0, T), \end{cases}$$

con opportune condizioni iniziali per  $v$  e  $w$ .  $\mathbf{D}_{i,e}$  sono i tensori di conduttività intra- ed extra-cellulare;  $I_{app}$  è la corrente applicata;  $I_{ion}$  e  $R$  modellano le correnti ioniche che attraversano la membrana cellulare e la loro forma analitica dipende dalla scelta del modello di membrana. In questo lavoro sono stati utilizzati i modelli Luo-Rudy I e Luo-Rudy II; per una rassegna sui modelli di membrana si veda [3]. La discretizzazione è stata effettuata con elementi finiti Q1 in spazio e un metodo semi-implicito in tempo. Ad ogni passo temporale si ottiene quindi un sistema lineare di matrice

$$(2) \quad A_{bid} = \frac{c_m}{\Delta t} \begin{bmatrix} \mathbf{M} & -\mathbf{M} \\ -\mathbf{M} & \mathbf{M} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_e \end{bmatrix},$$

dove  $\mathbf{M}$  è la matrice di massa e  $\mathbf{A}_i, \mathbf{A}_e$  sono le matrici di rigidità associate ai tensori  $\mathbf{D}_i, \mathbf{D}_e$ .

### 3. – Precondizionatori di Schwarz additivi multilivello

Sia  $\Omega^k$ ,  $k = 0, \dots, \ell - 1$  una famiglia di  $\ell$  triangolazioni annidate di  $\Omega$ , che si diradano da  $\ell - 1$  a  $0$ , e sia  $\mathbf{A}^k$  la matrice ottenuta discretizzando (1) su  $\Omega^k$ . Vale quindi  $\mathbf{A}^{\ell-1} = A_{bid}$ . Si indichino con  $\mathbf{R}^k$  gli operatori di restrizione da  $\Omega^{\ell-1}$  a  $\Omega^k$  e si decomponga ogni triangolazione  $\Omega^k$  in  $N_k$  sottodomini overlapping  $\Omega_m^k$  per  $m = 1, \dots, N_k$ , in modo che l'overlap  $\delta^k$  sia uguale alla mesh size  $h^k$  della triangolazione  $\Omega^k$ . Siano infine  $\mathbf{R}_m^k$  gli operatori di restrizione da  $\Omega^{\ell-1}$  a  $\Omega_m^k$  e si ponga  $\mathbf{A}_m^k := \mathbf{R}_m^k \mathbf{A}^k \mathbf{R}_m^{kT}$ . Il preconditionatore di Schwarz multilivello additivo (MAS) è dato da

$$B_{MAS}^{-1} := \mathbf{R}^{0T} \mathbf{A}^{0-1} \mathbf{R}^0 + \sum_{k=1}^{\ell-1} \mathbf{R}_m^{kT} \mathbf{A}_m^{k-1} \mathbf{R}_m^k.$$

Il teorema seguente assicura che la convergenza del preconditionatore MAS è indipendente dal numero di sottodomini  $N_k$  (scalabilità) e dal numero di livelli  $\ell$  (ottimalità).

TEOREMA 1. – *Il numero di condizionamento dell'operatore  $T_{MAS} = B_{MAS}^{-1}A_{bid}$  è limitato da*

$$\kappa_2(T_{MAS}) \leq C \max_{k=1, \dots, L-1} \left( 1 + \frac{h_{k-1}}{\delta_k} \right),$$

dove  $C$  è una costante indipendente da  $h_k$ ,  $N_k$  e  $\ell$ .

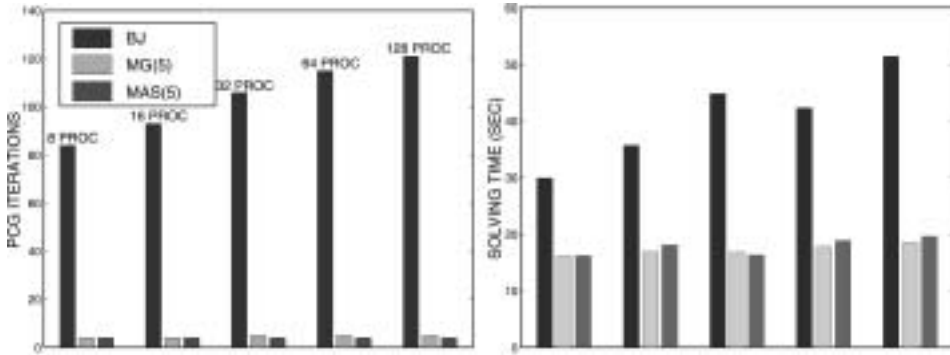


Fig. 1. – Test di tipo scaled speedup su domini tridimensionali. PROC è il numero di processori (= numero di sottodomini). Il preconditionatore di Schwarz additivo a 5 livelli (MAS(5)) è stato confrontato con il preconditionatore di Jacobi a blocchi (BJ) e con il preconditionatore multigrid ciclo a V a 5 livelli (MG(5)). Sinistra: media sui passi temporali del numero di iterazioni del gradiente coniugato preconditionato. Destra: media sui passi temporali del tempo di calcolo per risolvere un sistema lineare.

#### 4. – Risultati numerici

Per i test numerici è stato utilizzato il cluster linux IBM CLX/1024 del CINECA. Il codice Fortran è basato sulla libreria parallela PETSc, sviluppata dall'Argonne National Laboratory. È stato effettuato un test di tipo scaled speedup su parallelepipedi rappresentanti porzioni di tessuto cardiaco. Il numero di sottodomini è stato variato da 8 a 128, mantenendo la dimensione della griglia locale associata ad ogni sottodominio fissa a  $48 \times 48 \times 48$  elementi (221184 incognite). Il numero totale di gradi di libertà è stato quindi variato da  $1.7 \times 10^6$  nel caso più piccolo con 8 sottodomini a  $2.8 \times 10^7$  nel caso più grande con 128 sottodomini. Nell'implementazione ogni sottodominio è stato associato ad un processore, perciò il numero di sottodomini coincide con il numero di processori. È stata simulata la fase iniziale di eccitazione del muscolo cardiaco, integrando il modello Bidominio per 2 ms, cioè 40 passi temporali di 0.05 ms. Il sistema lineare ad ogni passo temporale è stato risolto con il metodo del gradiente coniugato (CG) preconditionato, usando come criterio d'arresto la riduzione della norma  $l^2$  del residuo con tolleranza  $10^{-4}$ . Il preconditionatore MAS a 5 livelli (MAS(5)) è stato confrontato con il preconditionatore di Jacobi a blocchi (BJ) e con il preconditionatore multigrid ciclo a V a 5 livelli (MG(5)). In Figura 1 sono ri-

portate le medie sui passi temporali del numero di iterazioni del CG e del tempo di calcolo per risolvere un singolo sistema lineare. I risultati confermano il teorema (1), poichè le iterazioni del CG preconditionato con MAS(5) restano costanti al crescere del numero di sottodomini.

Il codice basato sul preconditionatore MAS è stato applicato allo studio di patologie ischemiche cardiache, si veda [2].

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] P. COLLI FRANZONE and L. F. PAVARINO, *A parallel solver for reaction-diffusion systems in computational electrocardiology*, Math. Models Methods Appl. Sci., **14** (6) (2004), 883-911.
- [2] P. COLLI FRANZONE, L. F. PAVARINO and S. SCACCHI, *Dynamical effects of myocardial ischemia in anisotropic cardiac models in three dimensions*, Math. Models Methods Appl. Sci., **17** (12) (2007), 1965-2008.
- [3] D. NOBLE and Y. RUDY, *Models of cardiac ventricular action potentials: iterative interaction between experiment and simulation*, Phil. Trans. R. Soc. Lond. A, **359** (2001), 1127-1142.
- [4] M. PENNACCHIO, G. SAVARÉ and P. COLLI FRANZONE, *Multiscale modeling for the bioelectric activity of the heart*, SIAM J. Math. Anal., **37** (4) (2006), 1333-1370.
- [5] R. WEBER DOS SANTOS, G. PLANK, S. BAUER e E. J. VIGMOND, *Parallel multigrid preconditioner for the cardiac bidomain model*, IEEE Trans. Biomed. Eng., **51** (11) (2004), 1960-1968.

Dipartimento di Matematica “Federigo Enriques”, Università di Milano  
e-mail: simone.scacchi@unimi.it

Dottorato in Matematica e Statistica

con sede presso l'Università di Pavia – Ciclo XX

Direttori di Ricerca: Prof. Piero Colli Franzone, Università di Pavia,

Prof. Luca Franco Pavarino, Università di Milano