La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Assunta Tataranni

Studio della stabilità lineare e non lineare di un sistema di P.D.Es del tipo reazione diffusione attraverso il metodo diretto di Liapunov. Applicazione ad una reazione chimica autocatalitica

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **2** (2009), n.2 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 291–293.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2009_1_2_2_291_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2009.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. II, Agosto 2009, 291-293

Studio della stabilità lineare e non lineare di un sistema di P.D.Es del tipo reazione diffusione attraverso il metodo diretto di Liapunov. Applicazione ad una reazione chimica autocatalitica

Assunta Tataranni

Oggetto del lavoro di tesi è l'analisi della stabilità lineare e non lineare dello stato di equilibrio di un sistema binario di equazioni a derivate parziali (PDEs) del tipo reazione-diffusione che modella una reazione chimica autocatalitica.

La dinamica dei sistemi chimici può essere descritta da equazioni che spesso assumono la forma di sistemi non lineari di PDEs di tipo parabolico allorquando si prenda in considerazione la diffusione delle sostanze chimiche coinvolte nella reazione. Uno dei principali contributi alla teoria matematica delle reazioni chimiche è fornito dalla monografia di Aris [1]. Numerose risultano, inoltre, le analogie tra sistemi chimici e la struttura dinamica degli organismi viventi in alcuni sistemi biologici: basti pensare, a tal fine, alle popolazioni, dove gli individui interagiscono e si muovono all'interno del loro habitat. Ne consegue che il modello di interazione-migrazione spazio temporale delle popolazioni assume la stessa struttura di quella utilizzata per sistemi chimici in cui le sostanze reagiscono e si diffondono e, precisamente, del tipo

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = D\Delta \boldsymbol{u} + F \tag{1}$$

dove $\boldsymbol{u}$ è un vettore n-dimensionale le cui componenti rappresentano le quantità che si diffondono; D è una matrice (detta matrice di diffusione) generalmente diagonale, i cui elementi rappresentano i coefficienti di diffusione; Δ è l'operatore di Laplace in coordinate spaziali; F (termine di sorgente o reazione) è il termine che descrive tutte le reazioni ed interazioni fra le componenti di $\boldsymbol{u}$.

Il ricco spettro di soluzioni a cui danno luogo i sistemi del tipo reazione diffusione è riflesso nella grande varietà di applicazioni: si pensi che tale meccanismo venne proposto da Turing, in uno dei più importanti lavori nell'ambito della biologia teorica [6], quale modello per la chimica alla base del processo di morfogenesi. Risulta pertanto di grande interesse lo studio del comportamento asintotico nel tempo delle soluzioni di sistemi del tipo reazione diffusione. Tale studio può essere ricondotto all'analisi delle proprietà di stabilità dello stato stazionario uniforme.

In particolare, detto Ω lo spazio geometrico in cui si svolge il fenomeno, l'ambiente naturale in cui studiare la stabilià è lo spazio funzionale $W_0^{1,2}(\Omega)$. Il modello preso in considerazione è il seguente:

$$
\begin{cases} U_t = \gamma(a - U + U^2 V) + \Delta U \\ V_t = \gamma(b - U^2 V) + d\Delta V \end{cases} \tag{2}
$$

in un assegnato dominio $\Omega \subset \boldsymbol{R}^3$ con condizioni al contorno di Dirichlet

$$
\begin{cases} U = a + b \\ V = \dfrac{b}{(a+b)^2} \end{cases} \qquad \forall (x,t) \in \partial\Omega \times \boldsymbol{R}^+ \tag{3}
$$

con a, b, γ e d costanti tali che

$$
\begin{cases} a + b > 0 \\ b > 0, d > 0 \end{cases} \tag{4}
$$

Il sistema (2) rientra come caso particolare nel modello di Segel-Jackson [5], e contiene quello introdotto da Schnackenberg [4] per reazioni trimolecolari autocatalitiche.

Al fine di studiare il comportamento asintotico delle soluzioni di (2)-(3) poniamo

$$
\begin{cases} U = u^* + C_1 \\ V = v^* + C_2 \end{cases} \tag{5}
$$

con

$$
\begin{cases} u^* = a + b \\ v^* = \dfrac{b}{(a+b)^2} \end{cases} \tag{6}
$$

punto critico di (2)-(3). Il comportamento asintotico delle soluzioni di (2)-(3) viene ricondotto allo studio della stabilità di (6) .

Il metodo applicato è il metodo diretto di Liapunov. Ai fini dell'analisi della stabilità il problema centrale nell'utilizzo del metodo diretto rimane la costruzione di un funzionale di Liapunov e, spesso, la possibiltà di trovare condizioni che assicurino la coincidenza tra l'analisi lineare e quella non lineare.

Per superare tali difficoltà viene impiegato un peculiare funzionale di Liapunov, introdotto da Rionero [2], che costituisce un legame diretto tra la stabilità lineare e non lineare. Infatti, esso è costruito in modo tale che il funzionale, con le sue derivate calcolate lungo le perturbazioni, dipenda direttamente dagli autovalori della parte lineare dell'operatore.

I risultati di stabilità lineare, instabilità e le condizioni che assicurano l'insorgere dell'instabilità di Turing (il processo secondo cui il punto critico (6), stabile rispetto a perturbazioni infinitesime in assenza di diffusione, viene destabilizzato dalla diffusione) sono stati ottenuti sia nel caso di dominio fisso che nel caso dominio crescente variabile con continuità del tipo

$$\Omega(t) \subset \boldsymbol{R}^3 \text{ tale che } (x, y, z) \in \Omega \Rightarrow z \in [0, l]$$

con $l = \text{cost.} > 0$, perturbazioni C_1 and C_2 aventi comportamento periodico nelle direzioni (x, y).

Infine, si affronta il problema della stabilità L^2 dello stato stazionaro uniforme rispetto a perturbazioni alle concentrazioni di equilibrio delle sostanze chimiche aventi ampiezza finita. Ovviamente, quando si considerano i termini non lineari, il fine è quello di cercare di controllarli in maniera opportuna. Orbene, il modello oggetto di studio presenta un termine non lineare che, con gli usuali teoremi di immersione, non si riesce a limitare nel giusto modo. Al fine di superare tale ostacolo si è proceduto in due modi differenti:

- per perturbazioni regolari si è utilizzata la limitatezza di una delle due soluzioni, limitatezza che consegue dall'applicazione di un principio di massimo per operatori parabolici;
- nel caso di perturbazioni in $W_0^{1,2}(\Omega)$, grazie ad un particolare cambiamento di variabili nello spazio delle fasi [3], si studia un sistema che presenta cross-diffusion, i.e. la matrice di diffusione D non è una matrice diagonale.

Ne consegue un teorema di stabilità non lineare, asintotica rispetto alla norma $L^2(\Omega)$.

BIBLIOGRAFIA

[1] Aris R., *The mathematical theory of diffusion and reaction in permeable catalysts*, Clarendon Press, Oxford, **I-II** (1975).

[2] Rionero S., *A rigorous reduction of the $L^2(\Omega)$-stability of the solutions to a nonlinear binary reaction-diffusion system of P.D.Es. to the stability of the solutions to a linear binary system of O.D.E's*, Journal of Math. Anal. Appl., **319** (2006), 377-397.

[3] Rionero S., *L2-energy stability via new dependent variables for circumventing strongly nonlinear reaction terms*, J. Nonlin. Anal. Series A: Theory, Methods and Applications, **70** (2009), 2530-2541.

[4] Schnakenberg J., *Simple chemical reaction systems with limit cycle behaviour.*, J. Theor. Biol., **81** (1979), 389-400.

[5] Segel L. e Jackson J., *Dissipative structure: an explanation and an ecological example*, J. Theor. Biol., **37** (1972), 545-559.

[6] Turing A. M., *The chemical basis of morphogenesis*, Phil. Trans. R. Soc. Lond. B, **237** (1952), 37-72.

Dipartimento di Matematica e Applicazioni “R.Caccioppoli”,
Università di Napoli Federico II
Dottorato in Scienze Matematiche
con sede presso l'Università di Napoli Federico II - Ciclo XIX
Direttore di ricerca: prof. S. Rionero,
Dipartimento di Matematica e Applicazioni “R.Caccioppoli”,
Università di Napoli Federico II