La Matematica nella Società e nella Cultura

RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ANDREA TOSIN

Teoria cinetica discreta e teoria dei giochi stocastica per il traffico veicolare: modellistica e problemi matematici

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **2** (2009), n.2 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 299–302.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2009_1_2_2_299_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2009.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. II, Agosto 2009, 299-302

Teoria cinetica discreta e teoria dei giochi stocastica per il traffico veicolare: modellistica e problemi matematici

ANDREA TOSIN

1. – Il traffico veicolare: un problema matematico

L'interesse del mondo scientifico verso il traffico veicolare è cresciuto considerevolmente negli ultimi anni, a causa di un impatto sempre maggiore di questa problematica sugli aspetti sociali ed economici delle società moderne (ad esempio, inquinamento ambientale, congestione delle città). Tuttavia, le metodologie classicamente utilizzate per affrontare il problema, essendo quasi interamente basate sulla rilevazione, l'organizzazione e l'elaborazione di grandi quantità di dati sperimentali, hanno spesso manifestato forti limiti dal punto di vista predittivo, in quanto sostanzialmente statiche e incapaci di cogliere la reale dinamica non stazionaria. Perciò il traffico veicolare, da questione principalmente ingegneristica, è diventato un problema stimolante per i matematici applicati.

A partire dagli anni Cinquanta, sono stati proposti in letteratura vari modelli matematici di traffico veicolare. L'approccio originario di Lighthill, Whitham e Richards [2, 4] è basato sull'analogia fluidodinamica: se si adotta un punto di vista a scala macroscopica, il flusso di traffico lungo una strada può essere descritto mediante una legge di conservazione iperbolica non lineare, che esprime la conservazione dei veicoli. Successivamente sono stati introdotti modelli microscopici, basati sulla dinamica di ogni veicolo in interazione con quello che lo precede (*follow the leader*), e, a partire dagli anni Sessanta con Prigogine [3], modelli cinetici che descrivono la distribuzione statistica delle posizioni e delle velocità microscopiche dei veicoli. In tempi più recenti, è stata formalizzata una teoria matematica del traffico veicolare su reti stradali, si veda Garavello e Piccoli [1].

La tesi sviluppa un quadro teorico basato sulla teoria cinetica discreta per la modellizzazione del traffico veicolare. I modelli cinetici discreti sono stati storicamente concepiti in relazione all'equazione di Boltzmann, principalmente come strumenti matematici atti a ridurne la complessità analitica. Tuttavia, nel contesto del traffico veicolare, la discretizzazione della velocità non è solo una semplificazione matematica, ma ha un preciso significato modellistico: essa permette di tenere conto, almeno parzialmente, della natura granulare del flusso di veicoli lungo una strada, riproducendo la situazione in cui la velocità non varia in modo continuo da un veicolo all'altro, ma è piuttosto raggruppabile in classi (veicoli lenti, veicoli veloci).

2. – Strutture cinetiche discrete

La discretizzazione della velocità v si effettua introducendo nel dominio della velocità (adimensionale) $D_v = [0, 1]$ una griglia con un numero finito m di punti, $I_v = \{v_i\}_{i=1}^m$, e ammettendo poi che $v \in I_v$. Ciò equivale a partizionare l'intervallo delle velocità ammissibili in m classi, descrivendo le variazioni di velocità come transizioni da una classe all'altra. La funzione di distribuzione ad una particella f viene di conseguenza scritta come una combinazione lineare in v di delta di Dirac centrate nei punti v_i, con coefficienti dipendenti dallo spazio $x \in D_x \subseteq \mathbb{R}$ e dal tempo $t \geq 0$:

$$f(t,\, x,\, v) = \sum_{i=1}^{m} f_i(t,\, x)\delta(v - v_i).$$

La quantità $f_i(t,\, x)$ rappresenta la densità dei veicoli appartenenti alla i-esima classe di velocità, che al tempo t si trovano nella posizione x. Le funzioni $f_1, \ldots, f_m$ soddisfano il seguente sistema di equazioni:

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial f_i}{\partial x} = G_i[\mathbf{f},\, \mathbf{f}] - f_i L_i[\mathbf{f}], \qquad i = 1, \ldots, m, \tag{1}$$

avendo posto $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m)$, dove:

(i) $G_i[\mathbf{f},\, \mathbf{f}]$ è l'i-esimo *operatore di guadagno*,

$$G_i[\mathbf{f},\, \mathbf{f}](t,\, x) = \sum_{j,\,h,\,k=1}^{m} \int\limits_{D_x^3} \mathcal{F}_{hk}^{ij}(x_1,\, x_2;\, x,\, x_*) f_h(t,\, x_1) f_k(t,\, x_2)\, dx_1\, dx_2\, dx_*,$$

che dà la quantità di veicoli che, nell'unità di tempo, entrano nell'i-esima classe di velocità in conseguenza di interazioni binarie con altri veicoli;

(ii) $L_i[\mathbf{f}]$ è l'i-esimo *operatore di perdita*,

$$L_i[\mathbf{f}](t,\, x) = \sum_{j,\,h,\,k=1}^{m} \int\limits_{D_x^3} \mathcal{F}_{ij}^{hk}(x,\, x_*;\, x_1,\, x_2) f_j(t,\, x_*)\, dx_1\, dx_2\, dx_*,$$

che fornisce invece la quantità di veicoli che, nell'unità di tempo, escono dalla classe di velocità i per effetto delle interazioni.

La *funzione di distribuzione delle transizioni* $\mathcal{F}_{hk}^{ij} : D_x^4 \to \mathbb{R}_+$ esprime la probabilità con cui avvengono le transizioni di classe di velocità in seguito alle interazioni tra i veicoli. Formulando le seguenti ipotesi modellistiche:

Ipotesi 1: i veicoli non cambiano posizione per effetto delle interazioni;

Ipotesi 2: il veicolo che segue modifica la propria velocità in conseguenza della velocità dei veicoli che precedono ma non viceversa;

Ipotesi 3: un generico veicolo in posizione x interagisce con tutti i veicoli presenti in un *intervallo di visibilità* $[x,\, x + \xi]$, con $\xi > 0$ lunghezza di visibilità,

e scrivendo convenientemente il termine $\mathcal{F}_{hk}^{ij}$ in modo da tenere conto di questi fattori, è possibile dedurre dalla struttura (1) il modello

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial f_i}{\partial x} = {} & \sum_{h,\,k=1}^{m} \int\limits_{x}^{x+\xi} \bar{\eta}(x_*) A_{hk}^{i}(x_*) f_h(t,\, x) f_k(t,\, x_*) w(x_* - x)\, dx_* \\ & - f_i(t,\, x) \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{x}^{x+\xi} \bar{\eta}(x_*) f_k(t,\, x_*) w(x_* - x)\, dx_*, \qquad i = 1, \ldots, m. \end{aligned} \tag{2}$$

Il *tasso di interazione (non pesato)* $\bar{\eta}$ esprime la frequenza di interazione tra i veicoli nell'intervallo di interazione; la *tavola dei giochi* A^i_{hk} dà la probabilità che un veicolo con velocità v_h acquisisca la velocità v_i per effetto dell'interazione con un veicolo con velocità v_k; infine, w pesa le interazioni tra i veicoli nell'intervallo di visibilità sulla base della loro distanza reciproca. Il modello proposto nella tesi introduce inoltre una dipendenza del tasso $\bar{\eta}$ e della tavola dei giochi A^i_{hk} dalla densità macroscopica $\rho(t, x) := \sum_{i=1}^{m} f_i(t, x)$ dei veicoli, per tenere conto dell'influenza che le condizioni dinamiche del traffico hanno sull'evoluzione del sistema.

3. – Il problema spazialmente omogeneo

Nel problema spazialmente omogeneo si studia l'evoluzione delle funzioni di distribuzione f_i nell'ipotesi di indipendenza dalla variabile spaziale x. L'interesse è quindi rivolto alla dinamica delle interazioni tra i veicoli, trascurando il trasporto delle disomogeneità nella distribuzione spaziale. A partire dal sistema (2), la formalizzazione matematica consiste nel seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{df_i}{dt} = \bar{\eta}[\rho]\left(\displaystyle\sum_{h,k=1}^{m} A^i_{hk}[\rho] f_h f_k - \rho f_i\right) \\ f_i(0) = f_i^0 \geq 0, \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, m \tag{3}$$

per il quale, sotto opportune ipotesi sulla dipendenza di $\bar{\eta}$ e di A^i_{hk} da ρ, nella tesi si dimostra che:

TEOREMA 1. – *Sia* $\rho_0 := \sum_{i=1}^{m} f_i^0 \in [0, 1)$*. Il problema* (3) *ammette un'unica soluzione locale in tempo, estendibile ad una soluzione globale, tale che, per ogni* $i = 1, \ldots, m$, $f_i \in C^1(0, +\infty)$, $f_i \geq 0$ *e inoltre vale la stima a priori (conservazione della massa dei veicoli)* $\sum_{i=1}^{m} |f_i(t)| = \rho_0$ *per ogni* $t > 0$.

Si stabilisce inoltre l'esistenza di punti di equilibrio per il sistema (3) per una dimensione m qualsiasi della griglia delle velocità e se ne studiano le proprietà nei casi particolari $m = 2$ ed $m = 3$. I punti di equilibrio del problema spazialmente omogeneo permettono di caratterizzare il cosidetto *diagramma fondamentale*, ossia la relazione tra la densità e il flusso macroscopici dei veicoli in condizioni stazionarie, studiata diffusamente anche dal punto di vista sperimentale. Il modello proposto nella tesi si è dimostrato capace di riprodurre fedelmente le caratteristiche salienti dei diagrammi fondamentali, inclusa la transizione di fase tra i regimi di flusso di traffico libero e congestionato.

4. – Il problema spazialmente non omogeneo

Il problema spazialmente non omogeneo consiste nel sistema di equazioni (2) corredato di opportune condizioni iniziali e al bordo. Nella tesi viene studiato il problema di Cauchy, per il quale, assumendo dati iniziali $\varphi_i \in L^1(\mathbb{R})$ quasi ovunque non negativi si dimostra:

TEOREMA 2. – *Se* $\sum_{i=1}^{m} \varphi_i(x - v_i t) \leq K_0 < 1$ *per q.o.* $x \in \mathbb{R}$ *e per ogni* $t \geq 0$, *con inoltre* $\lim_{|x|\to\infty} \varphi_i(x) = 0$ *per ogni* $i = 1, \ldots, m$, *allora esistono* $T^* > 0$ *e* $0 \leq K < 1$ *tali che il problema spazialmente non omogeneo ammette un'unica soluzione* $f_i \in C([0, T^*]; L^1(\mathbb{R}))$ *con* $f_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$, *e* $\sum_{i=1}^{m} \|f_i(t)\|_{L^1(\mathbb{R})} = \sum_{i=1}^{m} \|\varphi_i\|_{L^1(\mathbb{R})}$, $\sum_{i=1}^{m} f_i(t, x) < K$ *per ogni* $t \in (0, T^*]$ *e per q.o.* $x \in \mathbb{R}$.

Un risultato analogo si dimostra anche per il problema con condizioni al bordo periodiche, particolarmente significativo dal punto di vista applicativo perché permette di simulare il flusso di traffico in una rotonda. Viene inoltre discussa la buona posizione del problema per tempi lunghi, ovvero l'estendibilità della soluzione locale di cui al precedente Teorema 2 ad una soluzione globale in tempo. Il risultato (parziale) dimostrato nella tesi è che se si rilascia la richiesta di controllare a priori il massimo valore della densità dei veicoli (ossia il massimo di $\rho(t, x) = \sum_{i=1}^{m} f_i(t, x)$) è possibile provare l'esistenza e l'unicità di una soluzione globale in tempo, la cui norma infinito può però crescere (sebbene al più linearmente) con t. Tuttavia, dal punto di vista modellistico è importante garantire che i valori della densità non superino il massimo valore ammesso lungo la strada, che rappresenta la cosiddetta *capacità della strada*, quindi il problema è da considerarsi di fatto ancora aperto.

BIBLIOGRAFIA

[1] M. GARAVELLO e B. PICCOLI *Traffic flow on networks.* Volume 1 of AIMS Series on Applied Mathematics. American Institute of Mathematical Sciences (AIMS), Springfield, MO. Conservation laws models. (2006).

[2] M. J. LIGHTHILL e G. B. WHITHAM *On kinematic waves. II. A theory of traffic flow on long crowded roads.* Proc. Roy. Soc. London. Ser. A., **229** (1955), 317-345.

[3] I. PRIGOGINE *A Boltzmann-like approach to the statistical theory of traffic flow.* In "Theory of traffic flow", Elsevier, Amsterdam (1961), 158-164.

[4] P. I. RICHARDS *Shock waves on the highway.* Operations Res., 4 (1956), 42-51.

Dipartimento di Matematica, Politecnico di Torino
e-mail: andrea.tosin@polito.it
Dottorato in Matematica per le Scienze dell'Ingegneria
con sede presso il Politecnico di Torino - Ciclo XX
Direttore di ricerca: prof. Nicola Bellomo