La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Vita Triani

Analisi dei principi costitutivi in termodinamica debolmente non locale dei processi irreversibili

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **2** (2009), n.2 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 303–306.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2009_1_2_2_303_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2009.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. II, Agosto 2009, 303-306

Analisi dei principi costitutivi in termodinamica debolmente non locale dei processi irreversibili

VITA TRIANI

La presente tesi di dottorato ha riguardato l'analisi e l'applicazione in termodinamica debolmente non locale dei principi costitutivi di dissipazione e di indifferenza materiale [1].

La termodinamica debolmente non locale è quella teoria che introduce i gradienti dei campi incogniti nelle equazioni costitutive, al fine di modellizzare effetti termomeccanici dovuti ad interazioni a lungo range tra le particelle materiali [2].

Il principio di dissipazione afferma che in ogni processo termocinetico che riguarda un qualsiasi sistema continuo la produzione di entropia sia non negativa.

Al fine di derivare le conseguenze di tale principio sono state elaborate le seguenti due tecniche che risultano ampiamente applicate in letteratura: la tecnica di Coleman-Noll [3] e la tecnica di Liu [4].

La prima consiste nel "*sostituire*" le leggi di bilancio per i campi incogniti nella legge di bilancio per l'entropia sotto le seguenti ipotesi costitutive

$$\boldsymbol{J} = \frac{\boldsymbol{q}}{\vartheta}, \tag{1}$$

$$\sigma_s = \frac{r_s}{\vartheta}, \tag{2}$$

dove $\boldsymbol{J}$ rappresenta il flusso di entropia, $\boldsymbol{q}$ il flusso di calore, ϑ la temperatura assoluta, r_s è il contributo di energia dovuto a sorgenti di calore di tipo radiativo e σ_s la produzione di entropia dovuta a tali sorgenti.

La tecnica di Liu si applica "*addizionando*" alla disuguaglianza dell'entropia le leggi di bilancio moltiplicate per opportuni moltiplicatori di Lagrange, senza alcuna ipotesi costitutiva sul flusso di entropia e sulla produzione di entropia dovuta alle sorgenti.

Per questo motivo la tecnica di Liu è stata per molti anni considerata più generale di quella di Coleman e Noll.

In entrambi i casi, le restrizioni termodinamiche conseguono dall'osservare che la disuguaglianza generale ottenuta con i due metodi è lineare rispetto alle derivate delle funzioni costitutive, le quali si considerano completamente arbitrarie.

Nel capitolo 2 della tesi le due tecniche vengono comparate per la classe dei continui rigidi conduttori di calore.

In primo luogo si prova che la tecnica di sostituzione di Coleman e Noll è valida anche in assenza delle ipotesi (1) e (2) e perciò essa può essere applicata esattamente agli stetssi sistemi per i quali si applica la tecnica di Liu.

In secondo luogo si prova che se le (1) e (2) vengono rimosse, allora le due tecniche sono equivalenti, nel senso che esse conducono alle stesse restrizioni sulle equazioni costitutive ed alla stessa disuguaglianza ridotta dell'entropia.

Questo risultato generale di equivalenza è stato ottenuto applicando le due tecniche a vari casi particolari. Ad esempio, si è considerato un conduttore rigido di calore le cui funzioni di stato sono l'energia interna ε ed una variabile vettoriale $\boldsymbol{z}$ non specificata.

L'equivalenza è stata dimostrata sia nel caso locale, ovvero quando lo spazio termodinamico è generato da ε e $\boldsymbol{z}$, sia nel caso debolmente non locale, in cui lo spazio termodinamico è generato da $\varepsilon, \boldsymbol{z}$ e dai loro gradienti. Come applicazione particolare è stato analizzato il caso in cui $\boldsymbol{z}$ coincida con il flusso di calore $\boldsymbol{q}$, ottenendo il modello per la conduzione del calore in termodinamica debolmente non locale elaborato in [5], e provando l'equivalenza anche in questo caso.

Come ulteriore applicazione sono stati studiati quei sistemi le cui equazioni costitutive dipendono da variabili interne, ovvero da variabili di non equilibrio che descrivono effetti dissipativi all'interno del materiale e che non coincidono con le variabili termodinamiche convenzionali, quali temperatura e deformazione. Due tipi di variabili interne sono stati trattati: quelle per le quali è nota l'equazione di evoluzione e quelle per le quali tale equazione non è nota.

In entrambi i casi, le due tecniche sono equivalenti.

Infine, l'equivalenza è stata provata anche nel caso in cui lo spazio degli stati dipenda da una variabile interna scalare, di cui è nota l'equazione di evoluzione, e dal suo gradiente.

Il principio di indifferenza materiale, nella sua formulazione classica fornita da Truesdell e Noll [1], impone che le quantità costitutive siano delle grandezze oggettive rispetto a trasformazioni rigide di coordinate, ovvero rispetto a trasformazioni del tipo

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}(t), \tag{3}$$

dove $\boldsymbol{Q}$ è una matrice ortogonale propria e $\boldsymbol{c}$ è un vettore arbitrario . Come conseguenza di questa richiesta, si hanno le seguenti leggi di trasformazione per una quantità scalare ϕ, per una quantità vettoriale $\boldsymbol{v}$ e per una quantità tensoriale $\boldsymbol{t}$:

$$\begin{aligned} \phi' &= \phi, \\ \boldsymbol{v}' &= \boldsymbol{Q}\boldsymbol{v}, \\ \boldsymbol{t}' &= \boldsymbol{Q}\boldsymbol{t}\boldsymbol{Q}^T. \end{aligned} \tag{4}$$

Nel capitolo 3 della tesi sono state ottenute le conseguenze delle leggi di trasformazione (4) sul modello di conduzione del calore non lineare e debolmente non locale sviluppato da Lebon et al. in [5].

In primo luogo si è provveduto a generalizzare il modello summenzionato, il quale era stato sviluppato per materiali isotropi, estendendolo al caso di materiali anisotropi. Pertanto, sono state proposte opportune equazioni costitutive per il flusso del flusso di calore, per la produzione di flusso di calore, per il flusso di entropia e per la produzione di entropia, valide per conduttori rigidi anisotropi.

Le restrizioni derivanti dal principio di indifferenza materiale sono state ottenute imponendo le (4) per le funzioni costitutive citate. In questo modo, è stato possibile ottenere un numero congruo di relazioni tensoriali addizionali su tutte le funzioni materiali che compaiono nelle equazioni costitutive.

Nel capitolo 4 è stato elaborato un modello non locale di conduttore rigido che si basa sia su assunzioni della termodinamica razionale estesa (R.E.T.) [6], che su assunzioni della termodinamica estesa dei processi irreversibili (E.I.T.) [7].

Queste due teorie differiscono in quanto nella seconda lo spazio degli stati può essere non locale mentre nella prima esso è strettamente locale. Dalla prima teoria è stata presa l'ipotesi costitutiva

$$\boldsymbol{q} = c^2 \boldsymbol{p}, \tag{5}$$

dove c è la velocità media dei fononi, la cui dinamica è correlata alla conduzione del calore alle basse temperature, e $\boldsymbol{p}$ rappresenta il momento primo del sistema gerarchico di equazioni della teoria cinetica dei fononi. In accordo con la seconda teoria, si è assunto che le funzioni costitutive dipendano da ϑ, $\boldsymbol{p}$ e dai loro gradienti.

Le conseguenze derivanti dal principio di dissipazione sono state ottenute applicando la tecnica di Coleman e Noll.

In tal modo si è pervenuti ad un modello molto generale di conduttore rigido non locale, capace di riprodurre la famosa equazione di Guyer e Krumhansl che descrive l'evoluzione del flusso di calore nei cristalli alle basse temperature. Poichè questa equazione deriva da un'equazione di Boltzmann linearizzata, per ottenerla dal nostro modello macroscopico sono state necessarie varie approssimazioni. La compatibilità di ognuna di esse con la seconda legge della termodinamica è stata controllata nel dettaglio.

Infine, è stato derivato un sistema di equazioni atto a descrivere la propagazione del calore in conduttori piani, in quanto questi ultimi possono essere usati negli esperimenti di propagazione del calore alle basse temperature.

BIBLIOGRAFIA

[1] Truesdell C., Noll W., *The non-linear field theories of mechanics*, Handbuch der Physik, **III/3** (Springer-Verlag, Berlin, 1965).

[2] Cimmelli V. A., Ván P., *The effects of nonlocality on the evolution of higher order fluxes in nonequilibrium thermodynamics*, J. Math. Phys., **46** (2005), 112901.

[3] Coleman D., Noll W., *The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity*, Arch. Rat. Mech. Anal., **13** (1963), 167-178.

[4] LIU I-SHIH., *Method of Lagrange multipliers for exploitation of the entropy principle*, Arch. Rat. Mech. Anal., **46** (1972), 131-148.
[5] LEBON G., JOU D., CASAS-VÁZQUEZ J., MUSCHIK W., *Weakly Nonlocal And Nonlinear Heat Transport In Rigid Solids*, J. Non-Equilib. Thermodyn., **23** (1998), 176-191.
[6] MÜLLER I., RUGGERI T., *Rational Extended Thermodynamics*, Springer Tracts in Natural Philosophy, 2nd ed., **37** (Springer-Verlag New York, 1998).
[7] JOU D., CASAS-VÁZQUEZ J., LEBON G., *Extended Irreversible Thermodynamics*, 3rd ed. (Springer-Verlag, Berlin, 2001).

Dipartimento di Matematica e Informatica, Università della Basilicata
e-mail: vitrian@virgilio.it
Dottorato in Metodi e Modelli Matematici per i Sistemi Dinamici
con sede presso l'Università della Basilicata - Ciclo XX
Direttore di ricerca: Prof. V. A. Cimmelli