La Matematica nella Società e nella Cultura

RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

FRANCESCO BIGOLIN

Ipersuperfici regolari intrinseche nel gruppo di Heisenberg e soluzioni deboli di EDP non lineari del primo ordine

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **3** (2010), n.1 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 19–22.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2010_1_3_1_19_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2010.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. III, Aprile 2010, 19-22

Ipersuperfici regolari intrinseche nel gruppo di Heisenberg e soluzioni deboli di EDP non lineari del primo ordine

FRANCESCO BIGOLIN

Lo scopo di questa tesi è stato studiare le relazioni tra una ipersuperficie regolare intrinseca S nel gruppo di Heisenberg, munito della sua naturale struttura subriemanniana, e la sua parametrizzazione, vista come soluzione debole di un particolare sistema di equazioni differenziali del primo ordine che nel caso del primo gruppo di Heisenberg H^1 si riduce alla classica equazione di Burgers.

Il gruppo di Heisenberg $H^n = C^n \times R \equiv R^{2n+1}$ è l'esempio più semplice di gruppo di Carnot, su cui si definisce una metrica non equivalente alla metrica euclidea. I punti di H^n si denotano con $P = [z, t] = [x + iy, t]$, $z \in C^n$, $x, y \in R^n$, $t \in R$. Dati $P = [z, t]$, $Q = [\zeta, \tau] \in H^n$ si definiscono la legge di gruppo $P \cdot Q := \left[z + \zeta, t + \tau - \frac{1}{2} \Im m(z \cdot \bar{\zeta}) \right]$ e la norma su H^n $\|P\| := \max\{|z|, |t|^{1/2}\}$, da cui si ha la distanza $d_\infty(P, Q) := \|P^{-1} \cdot Q\|$ per $P, Q \in H^n$.

L'algebra di Lie h_n di campi vettoriali invarianti a sinistra è linearmente generata da

$$X_j = \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{1}{2} y_j \frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_j = \frac{\partial}{\partial y_j} + \frac{1}{2} x_j \frac{\partial}{\partial t}, \quad j = 1, \ldots, n, \quad T = \frac{\partial}{\partial t}$$

gli unici commutatori non banali sono $[X_j, Y_j] = T$, $j = 1, \ldots, n$.

Una funzione reale continua f su $\Omega \subseteq H^n$ appartiene a $C^1_H(\Omega)$ se il suo gradiente orizzontale $\nabla_H f$, definito da $\nabla_H f := (X_1 f, \ldots, X_n f, Y_1 f, \ldots, Y_n f)$ nel senso delle distribuzioni, è una funzione vettoriale continua.

Usualmente si identificano i campi vettoriali e gli operatori differenziali del primo ordine associati, si ha quindi che $X_1, \ldots, X_n$, $Y_1, \ldots, Y_n$ generano un fibrato vettoriale su H^n, chiamato fibrato orizzontale HH, che è un sottofibrato del fibrato tangente di H^n. Per ogni punto $P \in H^n$ la fibra orizzontale è indicata da HH_P e su oghi fibra si definiscono il prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle_P$ e la norma associata $| \cdot |_P$ che rendono il campo vettoriale $X_1, \ldots, X_n$, $Y_1, \ldots, Y_n$ ortonormale.

Definiamo un insieme $S \subset H^n$ *ipersperficie H-regolare* se esiste $f \in C^1_H(H^n)$ tale che S è localmente definito come l'insieme dei punti $P \in H^n$ tali che $f(P) = 0$ e $\nabla_H f \neq 0$ su S. Quindi una ipersperficie H-regolare S si può vedere localmente come luogo di zeri di una funzione $f \in C^1_H(H^n)$ con $X_1 f \neq 0$. Infine si definisce la *normale orizzontale* a S nel punto $P \in S$ $\nu_S(P)$, come il versore $\nu_S(P) := -\dfrac{\nabla_H f(P)}{|\nabla_H f(P)|_P}$.

In [6] si dimostra un teorema delle funzioni implicite per una ipersuperficie H-regolare così definita, in modo che se $S \subset H^n$ è H-regolare allora S è localmente un X_1-*grafico*: esiste cioè una funzione $\phi : \omega \subset R^{2n} \to R$, tale che

$$S = \{A \cdot \phi(A)\, e_1 : A \in \omega\}. \tag{1}$$

Data ϕ, $\Phi : \omega \to H^n$ indica la corrispondente funzione parametrica

$$\Phi(A) = A \cdot \phi(A)\, e_1, \quad A \in \omega. \tag{2}$$

In [1] si dà una caratterizzazione della parametrizzazione $\phi : \omega \to R$, che viene considerato come soluzione del sistema di EDP non lineari del primo ordine

$$\nabla^\phi \phi = w \qquad \text{in} \quad \omega, \tag{3}$$

dove ∇^ϕ è la famiglia di operatori differenziali del primo ordine definiti da

$$\nabla_j^\phi := \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial v_j} - \dfrac{v_{j+n}}{2}\dfrac{\partial}{\partial \tau} & \text{if } 2 \le j \le n \\ \dfrac{\partial}{\partial \eta} + \phi \dfrac{\partial}{\partial \tau} & \text{if } j = n+1 \\ \dfrac{\partial}{\partial v_j} + \dfrac{v_{j-n}}{2}\dfrac{\partial}{\partial \tau} & \text{if } n+2 \le j \le 2n, \end{cases}$$

se $n \geq 2$ e da $\nabla^\phi := \dfrac{\partial}{\partial \eta} + \phi\, \dfrac{\partial}{\partial \tau}$ se $n = 1$.

In particolare si osservi che l'operatore differenziale non lineare $C^1(\omega) \ni \phi \to B\phi := \nabla_{n+1}^\phi \phi$ è un operatore di tipo Burgers che può essere rappresentato in forma distribuzionale come $B\phi = \dfrac{\partial \phi}{\partial \eta} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \phi^2}{\partial \tau}$

In [1] $\nabla^\phi \phi$ è stato caratterizzato come gradiente intrinsico di ϕ in una struttura differenziale proiettata su R^{2n} dalla struttura differenziale di H^n tramite la parametrizzazione $\phi : \omega \to S$. Il risultato principale di [1] (teoremi 1.2 e 1.3) dimostra che se $\phi : \omega \to R$ è una funzione continua, allora $S = \Phi(\omega) = G^1_{H,\phi}(\omega)$ è una superficie H-regolare se e solo se la distribuzione $\nabla^\phi \phi$ è rappresentata da una funzione $w = (w_2, ..., w_{2n}) \in C^0(\omega; R^{2n-1})$ ed esiste una famiglia $(\phi_\varepsilon)_{\varepsilon > 0} \subset C^1(\omega)$ tale che, per ogni insieme aperto $\omega' \subset \omega$, vale

$$\phi_\varepsilon \to \phi \text{ e } \nabla^{\phi_\varepsilon} \phi_\varepsilon \to w \text{ uniformemente in } \omega'. \tag{4}$$

Questa caratterizzazione motiva i metodi e le tecniche usate nel lavoro. Questi derivano infatti principalmente dalla teoria delle EDP non lineari del primo ordine e dallo studio dell'equazione di Burgers. In particolare è fondamentale lo studio di due classi di soluzioni deboli: le soluzioni distribuzionali dell'equazione $\dfrac{\partial \phi}{\partial \eta} + \phi \dfrac{\partial \phi}{\partial \tau} = w$ e le soluzioni broad* del sistema (3), cioè per definizione una funzione continua $\phi : \omega \subseteq R^{2n} \to R$ tale che per ogni $A \in \omega$, $\forall j = 2, ..., 2n$ esiste una mappa esponenziale,

$$\gamma_j^B(s) = \exp(s\nabla_j^{\phi})(B) : [-\delta, \delta] \times \bar{I} \to \bar{J} \subset \omega$$

dove I e J sono intorni di A, $\delta > 0$ e $s \in [-\delta, \delta]$, tali che $\forall B \in I$.

(E.1) $\gamma_j^B \in C^1([-\delta, \delta])$

(E.2) $\begin{cases} \dot{\gamma}_j^B = \nabla_j^{\phi} \circ \gamma_j^B \\ \gamma_j^B(0) = B \end{cases}$

(E.3) $\phi(\gamma_j^B(s)) - \phi(\gamma_j^B(0)) = \int_0^s w_j(\gamma_j^B(r))\, dr \qquad \forall s \in [-\delta, \delta]$

I risultati principali della tesi si possono riassumere nelle seguenti caratterizzazioni:

TEOREMA 1. – *Se $\phi \in C^0(\omega)$ e $w \in C^0(\omega, R^{2n-1})$ le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

i) *$S = G^1_{H,\phi}(\omega)$ è una ipersurperficie H-regolare in H^n e $\forall P \in S$*

$$\nu_S(P) = \left(-\frac{1}{\sqrt{1+|w|^2}}, \frac{w}{\sqrt{1+|w|^2}}\right)(\phi^{-1}(P)).$$

ii) *ϕ è una soluzione broad* del sistema $\nabla^{\phi}\phi = w$.*

iii) *ϕ è una soluzione distribuzionale del sistema $\nabla^{\phi}\phi = w$.*

La caratterizzazione data nel teorema è l'esatta controparte di quello nel caso euclideo. Più precisamente una funzione $\phi \in C^1(\omega)$ può essere vista come soluzione distribuzionale di $\nabla\phi = w$ in ω, se $w \in C^0(\omega; R^m)$ e $\omega \subset R^m$ è aperto.

Si osservi che non è richiesta la forte ipotesi di esistenza dell'approssimazione (4) di ϕ fatta in [1]. La dimostrazione non è immediata e la continuità delle soluzioni broad* e distribuzionali gioca un ruolo centrale nel discorso: infatti sfruttando un risultato di [5] si prova che se la funzione ϕ è continua, i concetti di soluzione broad* e distribuzionale coincidono. Si dimostra l'equivalenza tra i punti i) e ii) sfruttando la regolarità della soluzione broad* lungo le sue linee caratteristiche, che dal punto di vista della geometria intrinseca di H^n sono le curve esponenziali dei campi ∇_j^{ϕ}.

La struttura della tesi è la seguente. Nel capitolo 1 si illustrano risultati classici della teoria delle leggi di conservazione. In particolare si studiano i concetti di soluzione debole: distribuzionale e broad. Viene ripreso approfonditamente il lavoro di [7]. Il capitolo 2 è dedicato all'introduzione del gruppo di Heisenberg H^n, alle sue principali definizioni e proprietà e a un'esaustiva trattazione dell'algebra multilineare in H^n. In particolare si richiama la teoria del complesso di Rumin, un complesso di forme differenziali che è l'analogo nella geometria CC di H^n del complesso di De Rham nella geometria euclidea. Il capitolo 3 è dedicato allo studio delle ipersuperfici H-regolari in H^n viste, come già detto, come luogo di zeri di funzioni $f \in C^1_H(H^n)$ senza punti critici. In particolare si riportano alcuni risultati di regolarità, scritti in collaborazione con D. Vittone [4]. Nel capitolo 4 vengono esposti i risultati originali ottenuti in collaborazione con il professor Serra Cassano e pubblicati in [2, 3]. Oltre alla caratterizzazione già descritta, si danno dei risultati di unicità per soluzioni broad* di (3) uniformemente limitate e la loro interpretazione geometrica: se due ipersperfici H-regolari con la stessa normale orizzontale sono la stessa ipersuperficie se hanno una curva verticale in comune nel caso di H^1 oppure se hanno un punto in comune nel caso di H^n. Le tecniche di dimostrazione si rifanno ai risultati di [7]. Si è infine studiato la regolarità euclidea di un grafico H-regolare $S = G^1_{H,\phi}(\omega)$ attraverso la regolarità del suo gradiente intrinsico $\nabla^\phi\phi$:

TEOREMA 2. – *Sia* $\phi \in C^0(\omega)$, $\omega \subset R^{2n}$, *una soluzione distribuzionale di* $\nabla^\phi\phi = w$.

i) *Caso* $n = 1$*: se* $\nabla^\phi\phi \in Lip(\omega)$ *allora* $\phi \in Lip(\omega)$.
ii) *Caso* $n \geq 2$*: se* $\phi, w_j \in Lip(\omega)$ $\forall j \in \{2, \dots, 2n\}$ *allora* $\phi \in C^1(\omega)$.
Se $w_j \in C^k(\omega)$ $\forall j \in \{2, \dots, 2n\}$ *allora* $\phi \in C^k(\omega)$.

La regolarità euclidea della parametrizzazione di una ipersuperficie regolare intrinseca dipende quindi dalla regolarità del gradiente intrinseco $\nabla^\phi\phi$, analogamente al caso euclideo.

BIBLIOGRAFIA

[1] AMBROSIO L., SERRA CASSANO F. e VITTONE D., *Intrinsic Regular Hypersurfaces in Heisenberg Groups,* J. Geom. Anal. **16** 2006.
[2] BIGOLIN F. e SERRA CASSANO F., *Intrinsic regular graphs in Heisenberg groups vs. weak solutions of non linear first-order PDEs*, Adv. Calc. Var. **3** (2010), 69-97, doi: 10.1515/ACV.2010.004.
[3] BIGOLIN F. e SERRA CASSANO F., *Distributional solutions of Burgers' equation and intrinsic regular graphs in Heisenberg groups*, Journal of Mathematical Analysis and Applications (2009), doi: 10.1016/j.jmaa.2009.11.042.
[4] BIGOLIN F. e VITTONE D., *Some remarks about parametrizations of intrinsic regular surfaces in the Heisenberg group*, Publ. Mat., **54** (2010), 159-172.
[5] DAFERMOS C.M., *Continuous solutions for balance laws*, Ric. Mat., **55** (2006), 79-91.
[6] FRANCHI B., SERAPIONI R. e SERRA CASSANO F., *Rectifiability and perimeter in the Heisenberg group*, Math. Ann. **321**, 2001.
[7] KRUŽKOV S.N., *First order quasilinear equations in several indipendent variable*, Math. USSR Sb., **10** (1970), 217-243.

Dipartimento di Matematica, Università di Trento
e-mail: bigolin@science.unitn.it
Dottorato in Matematica con sede presso l'Università di Trento – Ciclo XXI
Direttore di ricerca: prof. Francesco Serra Cassano