La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Luigi Montoro

Concentrazione e comportamento asintotico delle soluzioni di alcuni problemi misti singolarmente perturbati

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **3** (2010), n.1 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 51–54.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2010_1_3_1_51_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2010.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. III, Aprile 2010, 51-54

Concentrazione e comportamento asintotico delle soluzioni di alcuni problemi misti singolarmente perturbati

LUIGI MONTORO

L'obiettivo del lavoro svolto nella tesi è analizzare alcune equazioni ellittiche che sono perturbate in natura. Il problema è stato studiato utilizzando due strumenti:

(i) metodi perturbativi - (ii) metodi variazionali.

In particolare, ci si è interessati allo studio del seguente problema perturbato con condizioni miste:

$$(\tilde{P}_\varepsilon) \qquad \begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta u + u = u^p & \text{in } \Omega; \\ \dfrac{\partial u}{\partial v} = 0 \text{ on } \partial_{\mathcal{N}}\Omega; & u = 0 \text{ on } \partial_{\mathcal{D}}\Omega; \\ u > 0 & \text{in } \Omega, \end{cases}$$

dove Ω è un dominio regolare contenuto in $\mathbb{R}^n$, $p \in \left(1, \dfrac{n+2}{n-2}\right)$, ε è un parametro positivo sufficientemente piccolo e $\partial_{\mathcal{N}}\Omega$, $\partial_{\mathcal{D}}\Omega$ sono due sottoinsiemi della frontiera di Ω tale che l'unione delle loro chiusure coincide con l'intero bordo. I problemi con condizioni miste appaiono in diverse situazioni fisiche: le applicazioni più comuni si trovano in *dinamica delle popolazioni*, nella *conduzione non lineare di calore* e nei *sistemi di reazione-diffusione*.

Questo tipo di problema, con condizioni solo di Neumann o solo di Dirichlet, è stato studiato in letteratura da autori come W.M.Ni, I.Takagi, J.Wei, P.L. Felmer, M. Del Pino, solo per ricordare i più importanti. In letteratura esistono vari risultati concernenti problemi perturbati con condizioni di Neumann o condizioni di Dirichlet, e precisamente

$$(N_\varepsilon) \quad \begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta u + u = u^p & \text{in } \Omega; \\ \dfrac{\partial u}{\partial v} = 0 & \text{on } \partial_{\mathcal{N}}\Omega; \\ u > 0 & \text{in } \Omega, \end{cases} \qquad (D_\varepsilon) \quad \begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta u + u = u^p & \text{in } \Omega; \\ u = 0 & \text{on } \partial_{\mathcal{D}}\Omega; \\ u > 0 & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

Le soluzioni u_ε dei problemi sopra elencati si comportano come uno *scaling* della soluzione U di

$$(1) \qquad -\Delta U + U = U^p \quad \text{in } \mathbb{R}^n \quad (\text{o in } \mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}),$$

i.e. $u_\varepsilon(x) \sim U\left(\frac{x-Q}{\varepsilon}\right)$, dove Q è un punto appartenente a $\overline{\Omega}$. La scelta del dominio dipende dalla locazione di Q, se all'interno di Ω o sul bordo. In quest'ultimo caso, $Q \in \partial_{\mathcal{N}}\Omega$, vengono imposte condizioni di Neumann. Se $p < \frac{n+2}{n-2}$, il problema (1) ammette soluzioni positive radiali che decadono esponenzialmente ad infinito. Le soluzioni di $(\tilde{P}_\varepsilon)$ che ereditano tale profilo sono chiamate *spike layers* poichè sono altamente concentrate vicino a qualche punto di $\overline{\Omega}$.

Come noto in letteratura, le *spike layers* soluzioni di (N_ε) si concentrano sul bordo di Ω vicino a punti critici della curvatura media di $\partial\Omega$, mentre per quel che riguarda (D_ε), le *spike layers* di minima energia si concentrano all'interno del dominio, in punti che massimizzano la distanza dal bordo.

Nel lavoro di tesi svolto, ci si è interessati all'analisi delle *spike layers* che si concentrano al bordo per il problema misto $(\tilde{P}_\varepsilon)$.

Si applica in primo luogo un approccio perturbativo: l'idea è quella di ottenere due effetti che si compensano derivanti dalle condizioni di Neumann e di Dirichlet. Più precisamente, chiamando $\mathcal{I}_\Omega$ l'intersezione delle chiusure di $\partial_{\mathcal{D}}\Omega$ e $\partial_{\mathcal{N}}\Omega$ e assumendo che il gradiente della curvatura media $\nabla H|_{\mathcal{I}_\Omega}$ punti verso $\partial_{\mathcal{D}}\Omega$, una *spike layer* centrata su $\partial_{\mathcal{N}}\Omega$ sarà spinta verso $\mathcal{I}_\Omega$ da ∇H e sarà respinta da $\mathcal{I}_\Omega$ dalla condizione di Dirichlet. La strategia usata nella prova si basa su una riduzione finito-dimensionale. Si cerca prima una varietà Z di soluzioni approssimate del problema dato, che nel caso studiato nella tesi sono della forma $U\left(\frac{1}{\varepsilon}(x-Q)\right)$, e poi si risolve l'equazione a meno di un vettore parallelo al piano tangente a Z.

TEOREMA 1 [1]. – *Sia* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, *un dominio regolare e limitato e* $1 < p < \frac{n+2}{n-2}$ ($1 < p < +\infty$ se $n = 2$). *Supponiamo che* $\partial_{\mathcal{D}}\Omega$, $\partial_{\mathcal{N}}\Omega$ *siano sotto-insiemi disgiunti di* $\partial\Omega$ *tale che l'unione delle loro chiusure sia l'intero bordo di* Ω *e tale che la loro intersezione* $\mathcal{I}_\Omega$ *sia una ipersuerficie immersa regolare. Supponiamo inoltre che* $\overline{Q} \in \mathcal{I}_\Omega$ *è tale che* $H|_{\mathcal{I}_\Omega}$ *sia critica e non degenere a* $\overline{Q}$, *e che* $\nabla H(\overline{Q}) \neq 0$ *punti verso* $\partial_{\mathcal{D}}\Omega$. *Allora per* $\varepsilon > 0$ *sufficientemente piccolo il problema* $(\tilde{P}_\varepsilon)$ *ammette una soluzione* u_ε *che concentra a* $\overline{Q}$.

Nella tesi ci si è inoltre interessati all'analisi, mediante metodi variazionali, del profilo asintotico delle soluzioni di minima energia del problema $(\tilde{P}_\varepsilon)$, con generiche assunzioni sul dominio e sull'interfaccia. Si mostra che le soluzioni di Passo Montano sono in realtà soluzioni di minima energia e che data una famiglia di soluzioni di minima energia $\{u_\varepsilon\}$, per valori piccoli del parametro ε, i loro punti di massimo devono stare sul bordo del dominio Ω. Inoltre, sotto opportune condizioni geometriche, la soluzione di minima energia concentra in punti della chiusura di $\partial_{\mathcal{N}}\Omega$ dove la curvatura media è massima.

TEOREMA 2 [2]. – *Sia* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, *un dominio regolare e limitato e* $1 < p < \dfrac{n+2}{n-2}$ $(1 < p < +\infty$ *se* $n = 2)$. *Supponiamo che* $\partial_{\mathcal{D}}\Omega$, $\partial_{\mathcal{N}}\Omega$ *siano sotto-insiemi disgiunti di* $\partial\Omega$ *tale che l'unione delle loro chiusure sia l'intero bordo di* Ω *e tale che la loro intersezione* $\mathcal{I}_\Omega$ *sia una ipersuerficie immersa regolare. Supponiamo inoltre che* $\overline{Q} \in \mathcal{I}_\Omega$ *è tale che* $H|_{\mathcal{I}_\Omega}$ *sia critica e non degenere a* $\overline{Q}$, *e che* $\nabla H(\overline{Q}) \neq 0$ *punti verso* $\partial_{\mathcal{D}}\Omega$. *Allora se* $\varepsilon \to 0$, *le soluzioni di minima energia di* $(\tilde{P}_\varepsilon)$ *ammettono un unico punto di massimo che converge al punto* $\overline{Q} \in \overline{\partial_{\mathcal{N}}\Omega}$ *tale che* $H(\overline{Q}) = \max_{\overline{\partial_{\mathcal{N}}\Omega}} H$.

Nell'ultima parte della tesi si considerano le soluzioni di minima energia e si approssima la *shape* mediante un algoritmo numerico, dovuto a Y.S. Choi e P.J. McKenna, che permette di determinare soluzioni di Passo Montano. Lo si applica, con opportune modifiche, a problemi differenti da quelli trattati dagli autori che studiano problemi ellittici non perturbati su domini, contenuti in $\mathbb{R}^2$, quadrati. Nella tesi si considera un caso particolare di $(\tilde{P}_\varepsilon)$, scegliendo $p = 3$ e $n = 2$. Tale problema è perturbato e presenta condizioni miste che sono difficili da trattare numericamente e lo si definisce in un dominio ellittico di $\mathbb{R}^2$ che presenta una curvatura media H variabile sul bordo, mostrando che le soluzioni di minima energia concentrano all'interfaccia, come mostra la Figura 1.

I risultati ottenuti nella tesi sono parte dei lavori [1, 2, 3].

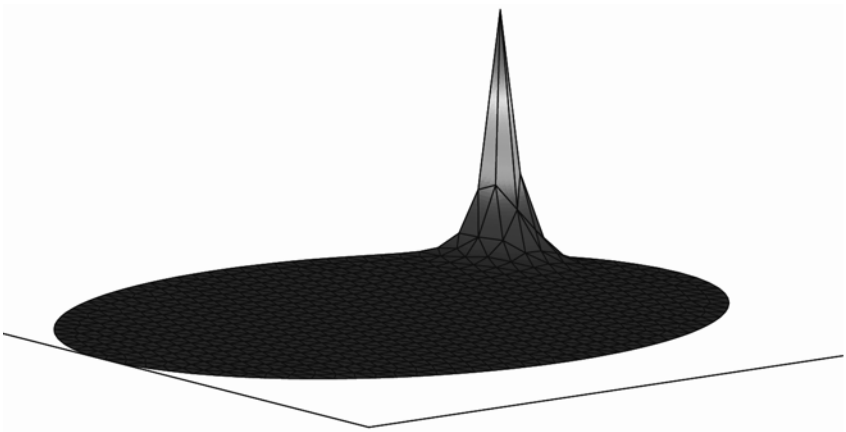

Fig. 1. – La soluzione u_ε di minima energia.

BIBLIOGRAFIA

[1] J. Garcia Azorero, A. Malchiodi, L. Montoro and I. Peral, *Concentration of solutions for some singularly perturbed mixed problems: existence results*, Arch. Rational Mech. Anal., **196** (2010), 907-950.

[2] J. Garcia Azorero, A. Malchiodi, L. Montoro and I. Peral, *Concentration of solutions for some singularly perturbed mixed problems: asymptotics of minimal energy solutions*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire., **27**, no. 1 (2010), 37-56.

[3] L. Montoro, *On the shape of the least-energy solutions to some singularly perturbed mixed problems*, Commun. Pure Appl. Anal., to appear.

Dipartimento di Matematica UNICAL
e-mail: montoro@mat.unical.it
Dottorato in Matematica ed Informatica
con sede presso l'Università della Calabria – Ciclo XXI
Direttore di ricerca: Prof. Annamaria Canino, Università della Calabria
Prof. Ireneo Peral, Università Autonoma di Madrid