

---

# *La Matematica nella Società e nella Cultura*

RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

---

LUIGI RARITÀ

## **Problemi di controllo per flussi su reti**

*La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. 3 (2010), n.1 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 71–74.*

Unione Matematica Italiana

[<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI\\_2010\\_1\\_3\\_1\\_71\\_0>](http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2010_1_3_1_71_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

*SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2010.

## Problemi di controllo per flussi su reti

LUIGI RARITÀ

### 1. – Introduzione

Lo scopo della tesi è la presentazione di tecniche per la scelta ottima di parametri che caratterizzano i modelli macroscopici (basati su leggi di conservazione) per flussi su reti, con applicazioni a reti stradali e di telecomunicazioni. L'idea di base prevede di considerare una scala temporale intermedia per la quale si può assumere la conservazione della densità di auto o pacchetti, visti come particelle. Quindi, la dinamica in una strada o linea di trasmissione viene descritta dalla legge di conservazione:

$$(1) \quad \partial_t \rho + \partial_x f(\rho) = 0,$$

dove  $\rho = \rho(t, x) \in [0, \rho_{\max}]$ ,  $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ , è la densità di auto o pacchetti,  $\rho_{\max}$  è la densità massima,  $f(\rho) = \rho v(\rho)$  è il flusso, con  $v$  velocità media.

I vantaggi principali dell'approccio presentato, rispetto a quelli esistenti, sono i seguenti: i modelli fluidodinamici sono completamente evolutivi, quindi sono capaci di descrivere la situazione di traffico di una rete ad ogni istante di tempo; è possibile una descrizione accurata della formazione di code; la teoria permette lo sviluppo di efficienti schemi numerici anche per la simulazione di reti di grandi dimensioni (ciò è possibile grazie al fatto che il traffico ai nodi viene modellato mediante dei problemi di programmazione lineare).

### 2. – Reti stradali

A partire dal modello fluidodinamico proposto da Piccoli ([3]) per la descrizione del traffico su reti stradali, sono state sviluppate alcune tecniche di ottimizzazione dei parametri di rete, al fine di evitare fenomeni di congestione.

Una rete è descritta da una coppia  $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ , dove  $\mathcal{I} = \{I_i : i = 1, \dots, N\}$  è l'insieme delle strade mentre  $\mathcal{J}$  è l'insieme dei nodi che connettono le strade. La dinamica è data dalla (1) per ogni strada e per ogni nodo da Riemann Solver  $RS_J$ , basati su parametri di precedenza e di distribuzione del traffico,  $p$  e  $a$ . In particolare, supponendo che un nodo stradale  $J$  abbia  $n$  strade entranti e  $m$  strade uscenti, i Riemann Solver  $RS_J$  sono basati sulle seguenti regole:

- (A) le auto, arrivando dalla  $i$ -esima strada entrante,  $i = 1, \dots, n$ , con probabilità  $a_{ji}$  si dirigono verso la  $j$ -esima,  $j = n + 1, \dots, n + m$ , strada uscente.

(B) Nel rispetto della regola (A), i guidatori si comportano in maniera tale da massimizzare il flusso attraverso  $J$ .

Se  $n > m$ , occorre introdurre una regola di precedenza per avere un'unica soluzione al nodo. In particolare, per nodi con due strade entranti ( $n = 2$ ),  $a$  e  $b$ , ed una strada uscente ( $m = 1$ ),  $c$ , vale la seguente regola.

(C) Solo una quantità  $Q$  di auto può entrare nella strada  $c$ . Allora, fissato un parametro di precedenza  $p$ ,  $pQ$  auto provengono dalla strada  $a$  e  $(1 - p)Q$  auto dalla strada  $b$ .

Per valutare l'efficienza della rete, si considerano due funzionali di costo,  $J_1(t)$  e  $J_2(t)$ , che misurano, rispettivamente, la velocità media delle auto che viaggiano lungo la rete e il tempo medio di viaggio. Se  $\rho_i$  indica la densità sulla strada  $i$ , definiamo  $J_1(t)$  e  $J_2(t)$  come:

$$J_1(t) = \sum_i \int_{I_i} v(\rho_i(t, x)) dx, \quad J_2(t) = \sum_i \int_{I_i} \frac{1}{v(\rho_i(t, x))} dx.$$

Si vuole massimizzare  $J_1$  e minimizzare  $J_2$  rispetto ai parametri di precedenza  $p$  agli incroci, in merito ad un intervallo di tempo fissato  $[0, T]$  per  $T > 0$ . In ([1]), vengono presentati i valori di  $p$  che ottimizzano i funzionali.

Presentiamo alcuni risultati ([1]) su Piazza dei Re di Roma, formata da incroci con due strade entranti ed una uscente (giunzioni  $2 \times 1$ ) ed incroci con una strada entrante e due uscenti (giunzioni  $1 \times 2$ ). La piazza è stata simulata considerando come dato iniziale strade vuote e dato al bordo 0.3 per strade esterne alla piazza. Sono stati studiati tre diversi casi di simulazione: parametri di precedenza che ottimizzano i funzionali di costo  $J_1$  e  $J_2$  (caso ottimo); parametri di precedenza fissi (caso fisso): il parametro di precedenza è lo stesso per ogni giunzione (si è scelto  $p = 0.2$ ); parametri random dinamici (caso random dinamico): i parametri di precedenza per ogni incrocio di tipo  $2 \times 1$  cambiano in maniera casuale ad ogni step di simulazione. La figura 1 mostra il comportamento temporale del funzionale  $J_2$  per piazza Re di Roma. Si può notare che il funzionale per il caso ottimo è più basso del funzionale relativo al caso fisso. Le prestazioni dei casi ottimo e random dinamico sono simili, e ci si può chiedere se si può evitare una procedura di ottimizzazione. A tal fine è stato ana-

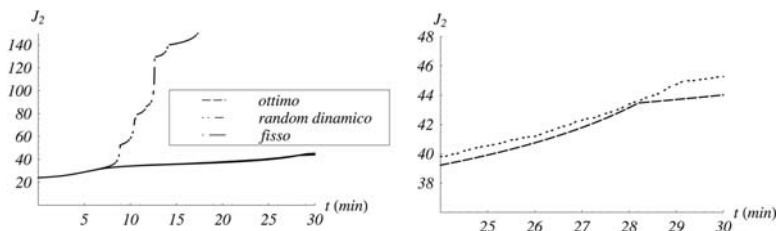


Fig. 1. – Simulazione di  $J_2(t)$ . A destra, zoom su caso ottimo e caso random dinamico.

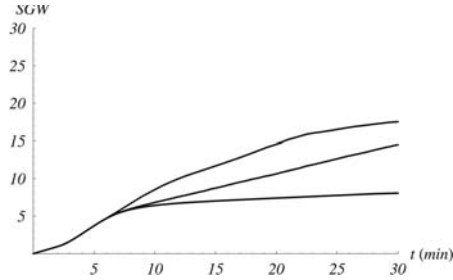


Fig. 2. – Simulazione di SGV.

lizzato il funzionale di Stop and Go Waves (SGW), definito come:

$$SGW = \int_0^T \int_{\cup I_i} |Dv(\rho)| dt dx,$$

che misura la variazione della velocità e fornisce quindi una stima della sicurezza dei guidatori che viaggiano sulla rete. Il funzionale SGW (Figura 2) è più basso nel caso ottimo ed indica che non vi sono brusche variazioni di velocità, con conseguente vantaggio per la sicurezza sulle strade. Segue che l'algoritmo ottimo è da preferire al random dinamico.

### 3. – Reti di telecomunicazioni

Idee provenienti dall'approccio fluidodinamico classico per il traffico stradale sono state estese per trattare flussi di dati su reti basate sul protocollo TCP ([4]). Focalizziamo l'attenzione su una singola linea tra due nodi (routers) di una rete Internet. Dal momento che il primo router rispedisce al secondo i pacchetti eventualmente persi, possiamo ipotizzare che, in una scala temporale intermedia, vi sia conservazione dell'informazione. Quindi, si può assumere che la dinamica su una linea sia descritta dalla (1), dove  $\rho$  è la densità dei pacchetti e  $f = \rho v(\rho)$ , con  $v(\rho)$  velocità di trasmissione. Le dinamiche ai nodi sono state risolte usando il seguente algoritmo di instradamento:

**(RA)** i pacchetti vengono spediti sulle linee di uscita per massimizzare il flusso attraverso il nodo sia sulle linee entranti che uscenti.

Anche per il modello di flusso dati sono state sviluppate tecniche di ottimizzazione, massimizzando e minimizzando, rispettivamente, due funzionali di costo,  $J_1$  e  $J_2$ , definiti come in precedenza, e che misurano, rispettivamente, velocità media dei pacchetti e tempi medi di percorrenza. L'ottimizzazione è fatta su coefficienti di distribuzione  $a$  e parametri di priorità  $p$  per incroci con due linee entranti e due linee uscenti ([2]). La procedura di ottimizzazione è stata testata su una rete di telecomunicazioni con 24 nodi (ognuno con 2 linee entranti e 2 linee uscenti) e 60 linee.

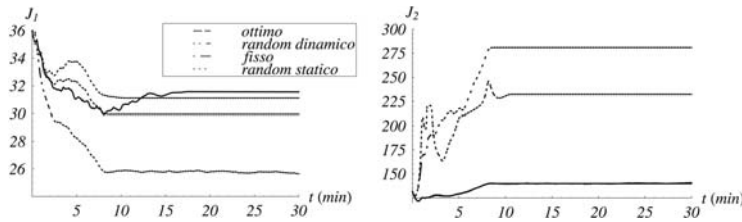


Fig. 3. – A sinistra:  $J_1(t)$ ; a destra:  $J_2(t)$ .

I risultati numerici sono stati ottenuti considerando gli stessi tipi di simulazione già esaminati per il traffico stradale, con l'aggiunta del caso random statico, per il quale i parametri della rete vengono scelti casualmente nell'istante iniziale di simulazione e poi mantenuti costanti fino alla fine della simulazione stessa. Si suppone che le linee della rete abbiano dati iniziali molto alti, prossimi alla massima densità consentita per ogni linea. I risultati numerici ottenuti sono in Figura 3. Il comportamento ottimo di  $J_1$  è più alto rispetto agli altri, come ci si aspetta. Gli andamenti di  $J_2$  nelle simulazioni ottima e random dinamica sono simili, quindi si può pensare di evitare una procedura di ottimizzazione. In realtà, effettuare una simulazione random dinamica corrisponde ad una situazione di caoticità sulla rete. Dettagli su quest'ultimo aspetto sono in [2].

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] CASCONI A., D'APICE C., PICCOLI B. e RARITÀ L., *Optimization of traffic on road networks*, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences (M3AS), **17-10** (2007), 1587-1617.
- [2] CASCONI A., MARIGO A., PICCOLI B. e RARITÀ L., *Decentralized optimal routing for packets flow on data networks*, Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B (DCDS-B), **13-1** (2010), 59-78.
- [3] COCLITE G., GARAVELLO M. e PICCOLI B., *Traffic flow on a road network*, SIAM J. Math. Anal., **36** (2005), 1862-1886.
- [4] D'APICE C., MANZO R. e PICCOLI B., *Packets flow on telecommunication networks*, SIAM J. Math. Anal., **38** (2006), 717-740.

Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione e Matematica Applicata  
 Università di Salerno,  
 e-mail: lrarita@unisa.it

Dottorato di Ricerca in Ingegneria dell'Informazione  
 con sede presso l'Università di Salerno – Ciclo VI, Nuova Serie  
 Direttore di ricerca: Prof. Giuliano Gargiulo, Università del Sannio

Correlatori: Prof. Ciro D'Apice, Università di Salerno; Prof. Benedetto Piccoli, Istituto per le Applicazioni del Calcolo "Mauro Picone", CNR, Roma