La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Carmela Zappulla

La geometria proiettiva complessa. Origini e sviluppi da von Staudt a Segre e Cartan

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **3** (2010), n.1 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 91–93.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2010_1_3_1_91_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica
Italiana, Unione Matematica Italiana, 2010.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. III, Aprile 2010, 91-93

La geometria proiettiva complessa. Origini e sviluppi da von Staudt a Segre e Cartan

CARMELA ZAPPULLA

Gli interessi di Corrado Segre (1863-1924) per la teoria di K.G.C. von Staudt (1798-1867) e soprattutto per la sua impostazione datano almeno dal 1888, anno in cui viene intrapresa la traduzione di [1] da M. Pieri (1860-1904) su indicazione di Segre. Nello stesso anno viene pubblicata la memoria [2] largamente ispirata al [1] e ai suoi più recenti *Beiträge zur Geometria der Lage* [3].

Nei Beiträge von Staudt aveva mostrato che le coppie di elementi immaginarie necessarie allo sviluppo della geometria proiettiva potevano essere introdotte per via puramente sintetica attraverso involuzioni ellittiche (involuzioni prive di elementi uniti reali). Segre ispirato da von Staudt, modificando in parte e semplificando la sua teoria, dà in [2] la prima definizione rigorosa degli elementi complessi in geometria proiettiva.

Un'ulteriore riflessione su questi argomenti, unita allo studio approfondito dei lavori di A. Möbius e di F. Klein, fanno pervenire Segre in [4] a risultati della cui novità egli si rende subito ben conto (basta guardare al titolo un po' enfatico di [4] per rendersi conto dell'importanza che egli dava a tale lavoro). In esso possiamo dire che vengano poste le fondamenta della geometria proiettiva sul campo complesso.

Come si sa, in geometria proiettiva il punto fondamentale sta nella dimostrazione del teorema fondamentale: *ogni corrispondenza proiettiva tra forme di prima specie è determinata da tre coppie di elementi corrispondenti*. Già Staudt aveva notato che il teorema non è più vero se la geometria è definita sui complessi, in quanto l'invarianza del birapporto (o *tetrade*, come la chiama Segre, o *Wurf*, secondo il linguaggio di Staudt) non basta più a caratterizzare un'unica trasformazione. Segre risolve il problema introducendo nuove trasformazioni che chiama **antiproiettività** nelle quali il valore del birapporto di 4 elementi della forma viene mutato nel suo complesso coniugato. Viene così introdotto per la prima volta un concetto essenziale per estendere a campi qualsiasi (in particolare campi dotati di automorfismi non banali) i teoremi della geometria proiettiva. Si può quindi dire che l'idea di geometria proiettiva su un campo nasce con la memoria [4].

Analogamente al fatto che le forme bilineari definivano le quadriche negli spazi proiettivi reali, anche in campo complesso alle nuove trasformazioni vengono associati nuovi oggetti algebrici e nuovi enti geometrici, i quali vengono chiamati da Segre **iperalgebrici** e che sono i punti, le curve, le superfici, ecc., cui corrisponde una o più equazione del tipo $f(x, \overline{x}) = 0$, cioé equazioni $\Sigma a_{lm} x_l \overline{x}_m = 0$ con $a_{lm} = \overline{a}_{lm}$, ossia forme hermitiane, anche esse dette *iperalgebriche*, nelle coordinate x dei loro punti e nei loro complessi-coniugati $\overline{x}$, e viceversa. Quindi è iperalgebrico un ente che ha per coordinate elementi immaginari coniugati.

Il lavoro [4] non ebbe subito grande risonanza. Segre quindi pubblicò le sue ricerche in forma allargata nella memoria [5] sui *Mathematische Annalen*. Se la prima parte di [5] ripercorre la precedente memoria [2], nella seconda viene compiuto un ulteriore e audace passo avanti che inizialmente andò inosservato: in essa viene infatti introdotta l'algebra dei bicomplessi quale estensione possibile del campo complesso (ogni numero bicomplesso è definito a partire da due numeri complessi in analogia con la definizione di numero complesso a partire da due numeri reali). Segre costruisce quindi su questa algebra – con divisori dello zero – un'organica geometria proiettiva: si tratta della prima presentazione di una geometria su un'algebra. Il lavoro viene chiuso con un suggerimento per ulteriori e successive generalizzazioni.

È questa una delle cose più rilevanti dell'opera di Segre: aver intravisto già nel momento stesso della stesura dei suoi scritti, e cioé nei primi anni Novanta del XIX secolo, l'importanza degli stessi sia come base per eventuali studi in analisi complessa, sia come fonte di studio in campo geometrico. Ciò forse è stato poco compreso sia dai suoi contemporanei, che pur apprezzando i contenuti degli articoli di Segre non hanno saputo continuare le sue ricerche, sia dai suoi più recenti biografi che hanno sottovalutato la portata di queste memorie di Segre.

Segre, quindi, non si limita a riprende l'opera di von Staudt, ma le fa anche fare un gran balzo in avanti, perfezionando concetti come quello di coppie di elementi immaginari, e definendo nuove trasformazioni come le antiproiettività; d'altro canto, con le rappresentazioni reali degli enti complessi, l'introduzione dei punti bicomplessi e le generalizzazioni a sistemi di punti via via sempre più articolati, intuisce la potenzialità delle riflessioni di Möbius e guida verso lo studio di geometrie su campi diversi da quello reale e dal complesso ordinario, per estendere lo sguardo verso le geometrie definite su campi con più unità immaginarie e con divisori dello zero. Una visione lungimirante quella di Segre che non è stata colta dai suoi contemporanei, se non per qualche rara eccezione ben rappresentate da E. Study (1862-1930) che molto scrisse su argomenti analoghi. Una vera ripresa di questi studi e una loro collocazione in un ambito più ampio avverrà solo e negli anni venti dello scorso secolo soprattutto a opera di J. L. Coolidge (1873-1954), che fece delle ricerche di Segre, anche grazie a Study, il suo campo di studio privilegiato, e di É. Cartan (1869-1951). Coolidge infatti pubblicò nel 1924 il volume [6] che tratta in modo sistematico, sulla scia delle ricerche di Segre, la geometria del campo complesso. Tale fatto permise a L. R. Ford (1886-1967), nel 1929, di dare una solida base organica al suo libro sulla teoria delle funzioni automorfe. Un ulteriore balzo in avanti sarà compiuto da Cartan che farà della geometria proiettiva complessa un punto centrale nella sua impostazione della geometria e delle algebre di Lie; egli nel 1931 pubblicherà il testo [7], frutto delle sue lezioni alla Sorbona, nel quale sin dall'inizio rende esplicito il suo riferimento all'opera di Segre. Egli tra l'altro dice: *. . . la géométrie projective complexe, considérée comme une discipline autonome, bien qu'on puisse la faire remonter à! von Staudt à qui est due l'introduction de la notion de chaîn! e, s'est principalement dé-*

veloppée à la suite des travaux de Juel et surtout de C. Segre. Ce dernier géométre a montré l'importance des transformations antiprojectives (...) à côté des transformations projectives, qu'on avant seules considérées auparavant [1, p. V].

In Italia, se si esclude il contributo [8] di Pieri in relazione all'assiomatizzazione della geometria proiettiva complessa del 1904-05, e quello di G. Fubini (1879-1943) che comunque svilupperà soprattutto il punto di vista analitico connesso alle rappresentazioni geometriche, non ci furono studiosi che diedero risonanza tra la fine dell'Ottocento e l'inizio del Novecento agli articoli di Segre, studi che rimasero quindi isolati sia nella sua produzione scientifica che nel panorama delle ricerche italiane. Subito dopo, però, i riferimenti alle geometrie sui bicomplessi si moltiplicarono, e lo stesso Segre nel 1911 continuava la sua opera riguardo alle geometrie sulle algebre col lavoro [9] (in questo caso in stretta connessione coi lavori di E. Study), nel quale l'attenzione è posta sui numeri duali (cioé i numeri del tipo $a + \varepsilon b$ con a, b reali ed $\varepsilon^2 = 0$). Quest'opera pioneristica, come detto, troverà in Italia un'eco modestissima.

In tal senso, la tesi ha voluto colmare il deficit di riconoscimento alle ricerche di Segre sulla geometria proiettiva complessa, mettendo in evidenza la popolarità che queste ebbero non solo nel periodo tra le due guerre mondiali, soprattutto a opera di Coolidge e Cartan e con un *ritardo* di circa 40 anni, ma anche a fine Novecento con le trattazioni sui sistemi di numeri 2^n-ioni e le applicazioni alle grafica 3D.

BIBLIOGRAFIA

[1] von Staudt G. K. C., *Geometria di posizione,* trad. a cura di M. Pieri di Geometrie der Lage, Fratelli Bocca Editori, Torino, 1847.
[2] Segre C., *Le coppie di elementi immaginari nella Geometria Proiettiva Sintetica*, Mem. della R. Acc. d. Scienze di Torino, serie **II, XXXVIII** (1888), 3-24.
[3] von Staudt G. K. C., *Beiträge zur Geometrie der Lage*, Korn'schen Buchhandlung, Nürnberg, 1856.
[4] Segre C., *Un nuovo campo di ricerche geometriche*, Atti della R. Acc. d. Scienze di Torino, **XXV, XXVI**, 1889-1990.
[5] Segre C., *Le rappresentazioni reali delle forme complesse e gli enti iperalgebrici*, Mathematische Annalen, **40** (1892), 413-467.
[6] Coolidge J. L., *The geometry of complex domain*, Oxford University Press, 1924.
[7] Cartan É., *Leçons sur la géométrie projective complexe*, Gauthier-Villars, Paris, 1931.
[8] Pieri M., *Nuovi Principi di Geometria Projettiva Complessa*, Mem. della Regia Acc. delle Scienze di Torino, **2, 55** (1904-1905), 189-235.
[9] Segre C., *Le Geometrie projettive nei campi di numeri duali*, Atti della Regia Acc. delle Scienze di Torino, **XLVII** (1911-1912), 308-326, 384-405.

Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Palermo
e-mail: zappulla@math.unipa.it
Dottorato di ricerca in Storia e Didattica della Matematica,
della Fisica e della Chimica
con sede presso l'Università di Palermo – Ciclo XX
Direttore di ricerca: Prof. Aldo Brigaglia, Università degli Studi di Palermo