CARLO CELLUCCI

Matematica e filosofia della matematica: presente e futuro

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **3** (2010), n.2, p. 201–234.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2010_1_3_2_201_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2010.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. III, Agosto 2010, 201-234

Matematica e filosofia della matematica: presente e futuro

CARLO CELLUCCI

1. – Il futuro della matematica

Agli inizi del nuovo secolo sono apparsi alcuni articoli in cui si fanno previsioni sul futuro della matematica. (1)

In questo articolo si riprende il tema, ma in una chiave differente. Mentre in quegli articoli si fanno previsioni sullo sviluppo di singoli campi della matematica, in questo articolo si sostiene che in futuro la matematica si svilupperà lungo linee sostanzialmente differenti da quelle secondo cui essa si è sviluppata dalla seconda metà dell'Ottocento fino a oggi. Questo comporterà un cambiamento nella filosofia che è stata alla base della matematica in tale periodo, perché inadeguata rispetto ai nuovi sviluppi.

Nell'articolo si propone una filosofia della matematica alternativa a essa, e alternativa anche alle altre filosofie della matematica che sono state proposte nel Novecento perché, da un lato, molte di esse sono incompatibili con i teoremi di incompletezza di Gödel, e, dall'altro, le rimanenti presentano altri difetti sostanziali.

2. – La rivoluzione della scuola di Göttingen

Fino al Cinquecento la matematica aveva studiato quasi esclusivamente questioni statiche: il numero e la forma. In particolare "la matematica greca si occupa quasi esclusivamente di numeri e figure statiche." (2) Con la nascita del calcolo infinitesimale nella matematica

(1) Cfr. Griffiths 2000, Devlin 2008.
(2) Cleary 1995, p. 101.

fu introdotto lo studio di questioni dinamiche: il movimento e il cambiamento. Tali questioni non erano state studiate nella matematica greca per una ragione che appare evidente dalla definizione di Aristotele del movimento: "Il movimento è l'attualizzazione di ciò che esiste in potenza." (3) Si tratta di una definizione puramente qualitativa, che in quanto tale si sottrae a ogni matematizzazione. In particolare Aristotele si oppone all'idea base del calcolo infinitesimale perché afferma che "il movimento nell'istante non è possibile." (4)

Il calcolo infinitesimale, quale formulato da Newton e Leibniz, andava però incontro a problemi che appaiono chiari già dalla prima parziale assiomatizzazione del calcolo data da L'Hospital, che si basava su due assiomi: 1) "Si richiede che si possano prendere indifferentemente l'una per l'altra due quantità che non differiscono tra loro che per una quantità infinitamente piccola." (5) 2) "Si richiede che una linea curva possa considerarsi come la giustapposizione di un'infinità di linee rette, ciascuna infinitamente piccola." (6) Gli infinitesimi venivano trattati, in base a 1), come se fossero eguali a zero, e, in base a 2), come se fossero diversi da zero. Questo portava inevitabilmente a contraddizioni, i cosiddetti paradossi del calcolo infinitesimale.

Per evitarli, Cauchy e Weierstrass eliminarono gli infinitesimi mediante la definizione epsilon-delta. Su tale base Dirichlet sostituì il concetto di funzione di Eulero, secondo cui una funzione è un'espressione contenente delle variabili, con il concetto insiemistico di funzione, secondo cui una funzione è un'applicazione da un insieme a un altro che soddisfa una condizione di univocità. Riemann definì una funzione complessa olomorfa in termini della sua proprietà di differenziabilità. Dedekind, prendendo l'avvio dalle classi di congruenza di Gauss, introdusse i concetti di anello, campo e ideale, ciascuno dei quali definito come un insieme di oggetti dotato di certe operazioni.

Le innovazioni di Dirichlet, Riemann Dedekind determinarono una rivoluzione nella matematica, l'ultima vera rivoluzione fino ad oggi.

(3) Aristotele, *Fisica* III, 2, 202 a 11.
(4) Ivi, VI 3, 234 a 31.
(5) de L'Hospital 1716, p. 2.
(6) Ivi, p. 3.

Essa ebbe il suo epicentro nella piccola città universitaria di Göttingen, perciò si può parlare di rivoluzione della scuola di Göttingen. ([7])

Alla sua base vi era una nuova filosofia della matematica, secondo cui l'aspetto cruciale della matematica non stava più nell'effettuare calcoli ma nel formulare concetti astratti e relazioni. Gli oggetti matematici, che erano stati pensati dal Seicento come dati principalmente da formule, erano ora visti invece come portatori di proprietà concettuali. Ciò che importava non era la natura degli oggetti matematici ma erano invece le relazioni concettuali tra essi. Dimostrare non consisteva più nel trasformare formule secondo regole ma era un processo di deduzione logica da proprietà e relazioni concettuali. La matematica, occupandosi di pure relazioni concettuali, era una libera creazione della mente umana, non soggetta ad alcun vincolo tranne la coerenza.

Questa nuova filosofia della matematica era implicita, piuttosto che esplicita, nella scuola di Göttingen, ma in Dedekind si possono trovare, se non una formulazione organica, almeno alcune dichiarazioni esplicite al riguardo.

Infatti, Dedekind afferma che intende realizzare una "costruzione puramente logica della scienza dei numeri." ([8]) Egli vuole ricondurre la matematica "a concetti generali e a quelle attività dell'intelletto senza le quali in assoluto non è possibile alcun pensiero, ma con le quali è anche dato un fondamento tanto alla sicurezza e completezza delle dimostrazioni, quanto alla costruzione di definizioni coerenti di concetti." ([9]) In essa "si prescinde totalmente dalla particolare natura degli elementi, si conserva esclusivamente la loro distinguibilità, e si considerano solo le relazioni reciproche determinate dalla funzione ordinante." ([10]) Con questo "liberare gli elementi da ogni altro contenuto (astrazione), i numeri possono giustamente dirsi una libera creazione della mente umana." ([11])

([7]) Per informazioni storiche sulla scuola di Göttingen e in generale sulla matematica dell'epoca, cfr. Ferreiros 1999, Ferreiros-Gray 2006.

([8]) Dedekind 1932, p. 335.

([9]) Dedekind 1974, p. 272.

([10]) Dedekind 1932, p. 360.

([11]) *Ibid.*

La filosofia della matematica della scuola di Göttingen è stata esplicitata nel Novecento e va sotto il nome di strutturalismo.

Alla sua diffusione hanno contribuito in modo determinante altri eminenti rappresentanti della scuola di Göttingen a cavallo tra Ottocento e Novecento, come Klein con il suo 'programma di Erlangen' e i suoi sviluppi, e Hilbert con le sue *Grundlagen der Geometrie*.

È vero che Hilbert elaborò un ambizioso programma filosofico autonomo, non riducibile semplicemente allo strutturalismo. Tuttavia tale programma ha in comune con la filosofia della matematica della scuola di Göttingen alcune assunzioni, a cominciare da quella che "l'essenza della matematica sta nella sua libertà." (12) Essa è soggetta unicamente a "una condizione, una sola ma assolutamente necessaria," e "questa è la condizione della coerenza." (13)

Come sottolinea Zellini, il richiamo della scuola di Göttingen alla libertà assoluta nel creare concetti matematici è un fondamentale carattere della matematica della seconda metà dell'Ottocento e ha influenzato per molti versi anche quella del Novecento. (14) Tale richiamo può anche essere visto come l'affermarsi tra i matematici, sia pure un po' tardivamente, dello spirito del Romanticismo. (15)

3. – Le filosofie della matematica del Novecento

Nel Novecento sono state sviluppate varie filosofie della matematica. Nel primo Novecento, il logicismo (Frege, Russell), il formalismo (Hilbert), l'intuizionismo (Brouwer). Nel secondo Novecento, il neologicismo (Wright, Hale), il platonismo (Gödel), il neoformalismo (Curry, Mac Lane, Robinson, Cohen), l'implicazionismo (Putnam), lo strutturalismo (Bourbaki, Shapiro, Resnik), il finzionalismo (Field), l'internalismo (Maddy), il costruttivismo (Bishop), il congetturalismo (Lakatos), l'empirismo (Kitcher), il cognitivismo (Lakoff, Núñez).

Molte di queste filosofie della matematica sono esterne alla mate-

(12) Hilbert 1929, p. 9.
(13) Hilbert 1926, p. 179.
(14) Cfr. Zellini 1985, specialmente i capp. 1 e 5.
(15) Cfr. Cellucci 2002, pp. 38-43.

matica e non hanno interagito con il suo sviluppo. Tra esse va incluso anche il formalismo di Hilbert, perché Hilbert lo formula dichiaratamente non per farlo interagire con lo sviluppo della matematica, ma per "far scomparire definitivamente nella matematica le questioni fondazionali in quanto tali." (16) Dopodiché i matematici avrebbero potuto continuare a fare matematica come prima, nello stesso modo di prima. (17) Un caso a parte è l'intuizionismo di Brouwer, che non si propone di interagire con la matematica del tempo ma di sostituirla con un altro tipo di matematica. Il suo tentativo, però, non ha avuto successo. (18)

Una concezione interna alla matematica, che ha interagito profondamente con il suo sviluppo, è invece lo strutturalismo, la filosofia implicita della scuola di Göttingen. Altre concezioni interne alla matematica, che hanno interagito in certa misura con il suo sviluppo, sono il platonismo e il neoformalismo. Questo articolo, perciò, si concentra su queste tre concezioni. (19)

4. – Lo strutturalismo

Secondo lo strutturalismo – la cui filosofia è stata formulata esplicitamente dal Bourbaki e, in una forma più raffinata, da Shapiro e Resnik – la matematica "è lo studio deduttivo delle strutture." (20) Una struttura si ottiene "attraverso un processo di astrazione. Si osservano parecchi sistemi aventi quella struttura, e si focalizza l'attenzione sulle relazioni tra gli oggetti, ignorando quei caratteri degli oggetti che non sono rilevanti per tali relazioni." (21) Per esempio, l'unica cosa "che importa dei numeri naturali è la relazione in cui stanno l'uno con l'altro." (22)

(16) Hilbert 1931, p. 489.
(17) Sul formalismo di Hilbert, cfr. Cellucci 2007, pp. 38-62.
(18) Sull'intuizionismo di Brouwer, cfr. Cellucci 2007, pp. 63-81.
(19) Le rimanenti concezioni sono discusse in Cellucci 2007.
(20) Shapiro 2004, p. 32.
(21) Shapiro 2000, p. 259.
(22) Shapiro 2004, p. 32.

Lo strutturalismo è la filosofia della matematica tuttora più diffusa tra i matematici. Ciò nonostante, esso presenta sostanziali difetti.

1. Secondo lo strutturalismo, la matematica è lo studio deduttivo delle strutture. Ma questo contrasta con il fatto che il lavoro in vari campi della matematica, come la teoria dei numeri o la teoria delle equazioni alle derivate parziali, non consiste nel formulare assiomi per una struttura e dedurre teoremi da essi. Tale non è, ad esempio, il lavoro su questioni come la distribuzione dei numeri primi o la trascendenza di π.

2. Lo strutturalismo scambia per natura della matematica quella che è solo una caratteristica di una particolare scuola, la scuola di Göttingen, che, attraverso la *Moderne Algebra* di Van der Waerden, influenzò il Bourbaki.

Per la sua astrattezza e mancanza di contatto con la realtà, negli ultimi decenni del Novecento la matematica ispirata allo strutturalismo ha attraversato una crisi profonda, tanto che nel 1997 Cartier ne annunciò la morte, e a tale annuncio venne data ampia diffusione dal quotidiano francese *Libération*. ([23])

3. Lo strutturalismo ha avuto effetti negativi sullo sviluppo della matematica, portando a trascurare certe sue parti e a considerare la matematica un'attività autoreferenziale, rivolta a problemi interni e separata dalle scienze naturali.

Addirittura Dieudonné, uno degli esponenti più significativi del Bourbaki, rivendica che, "tra tutti i sorprendenti progressi" della matematica recente, "neppure uno" ha "avuto nulla a che fare con le applicazioni fisiche: e persino nella teoria delle equazioni alle derivate parziali l'accento viene posto oggi molto di più su problemi strutturali 'interni' che su questioni aventi un significato fisico diretto." ([24])

4. Lo strutturalismo non è in grado di dare una nozione primitiva di struttura. Infatti Shapiro dichiara che "una struttura è una classe di equivalenza nella gerarchia degli insiemi." ([25]) Ma così diventa primi-

([23]) Cfr. Cartier 1997, Huet 1998.
([24]) Dieudonné 1964, p. 248.
([25]) Shapiro 1997, p. 92.

tivo il concetto di insieme invece di quello di struttura, perciò la matematica non è lo studio delle strutture.

Per evitare questa difficoltà Shapiro formula una teoria assiomatica delle strutture, che egli presenta come indipendente dalla teoria degli insiemi. Ma tale teoria è del tutto simile alla teoria degli insiemi e non chiarisce alcuna questione né risolve alcun problema lasciato aperto da quest'ultima. Lo stesso Shapiro ammette che "la gerarchia degli insiemi e il regno delle strutture sono poco più che varianti notazionali l'una dell'altro." ([26]) Perciò tutto quello che si può dire di uno dei due ambiti può essere trasferito all'altro. Ma allora il concetto di struttura è solo un travestimento di quello di insieme.

5. Lo strutturalismo non è in grado di dire sotto quali condizioni una struttura esiste. In base a esso la matematica consiste nel formulare assiomi per una struttura e nel dedurne conseguenze logiche. Ma sotto quale condizione gli assiomi sono non vuoti, cioè esiste una struttura che li soddisfa?

Secondo Shapiro, la condizione è che gli assiomi devono essere "un gruppo di enunciati coerente." ([27])

Ma non si può intendere 'coerente' nel senso della nozione sintattica di coerenza: dagli assiomi non si possono dedurre contraddizioni, cioè non esiste alcuna deduzione di una contraddizione nel sistema formale avente quegli assiomi. Infatti, consideriamo, ad esempio, il sistema formale dell'aritmetica di Peano. I concetti di 'termine', 'formula', 'deduzione' di tale sistema formale, come di qualsiasi sistema formale, sono introdotti mediante definizioni ricorsive, e le definizioni ricorsive presuppongono il concetto di numero naturale. Quindi la coerenza dell'aritmetica di Peano è definita in termini del concetto di numero naturale. Ma allora dire che la struttura dei numeri naturali esiste sotto la condizione che dagli assiomi dell'aritmetica di Peano non si possano dedurre contraddizioni, equivale a dire che la struttura dei numeri naturali esiste sotto la condizione che la struttura dei numeri naturali esista. Si ha così un circolo vizioso.

([26]) Shapiro 2004, p. 20.
([27]) Shapiro 2000, p. 286.

D'altra parte, non si può intendere 'coerente' neppure nel senso della nozione semantica di coerenza: gli assiomi hanno un modello. Infatti, dire che una struttura che soddisfa gli assiomi esiste sotto la condizione che gli assiomi abbiano un modello, equivale a dire che una struttura che soddisfa gli assiomi esiste sotto la condizione che una struttura che soddisfa gli assiomi esista. Si ha così di nuovo un circolo vizioso.

Shapiro afferma che tale circolo "può non essere vizioso" perché si può dire che una struttura che soddisfa gli assiomi esiste sotto la condizione che essa possa essere modellata "nella gerarchia degli insiemi." ([28]) Egli ammette che anche così "la circolarità è chiara" perché "noi strutturalisti assumiamo che la teoria degli insiemi abbia per oggetto una particolare struttura – la gerarchia degli insiemi." ([29]) Tuttavia Shapiro argomenta che tale gerarchia "è così grande che pressoché qualsiasi struttura può essere modellata o esemplificata in essa." ([30]) Dunque, secondo Shapiro, una struttura che soddisfa gli assiomi esiste sotto la condizione che la sua esistenza possa essere dimostrata nella teoria degli insiemi. Questo pone il problema: la teoria degli insiemi è coerente?

Shapiro afferma che, sebbene ovviamente "non possiamo giustificare la coerenza della teoria degli insiemi modellandola nella teoria degli insiemi" perché "il circolo sarebbe troppo sfacciato", nondimeno "la coerenza della teoria degli insiemi è presupposta da molta dell'attività fondazionale della matematica contemporanea. A ragione o a torto, la matematica presuppone che la soddisfacibilità (nella gerarchia degli insiemi) sia sufficiente per l'esistenza" di una struttura, e "gli strutturalisti accettano questo presupposto e ne fanno uso come chiunque altro, e non sono in una posizione migliore (e neppure peggiore) per giustificarlo." ([31]) Tale "presupposto non è vizioso, anche se manca di una giustificazione esterna." ([32])

([28]) Ivi, p. 288.
([29]) Shapiro 1997, p. 13.
([30]) Shapiro 2000, p. 288.
([31]) Ivi, pp. 288-289.
([32]) Shapiro 1997, p. 136.

Ma l'argomento di Shapiro, che dobbiamo accettare la coerenza della teoria degli insiemi perché è presupposta da gran parte della matematica contemporanea, è simile all'argomento che dobbiamo accettare l'esistenza di Dio perché è presupposta dall'esistenza del mondo: si tratta di una *petitio principii*.

6. Lo strutturalismo non è in grado di specificare un'unica struttura come oggetto dell'aritmetica. Esso distingue tra "teorie univalenti, cioè tali che il sistema globale dei loro assiomi le determina completamente", come l'assiomatizzazione "dell'aritmetica di Dedekind e Peano", e teorie non univalenti, cioè tali il sistema globale dei loro assiomi non le determina completamente, come "la teoria dei gruppi". ([33]) Ma tale distinzione, per molti versi, è solo apparente.

Infatti, in primo luogo, dire che teorie come l'assiomatizzazione dell'aritmetica di Dedekind e Peano sono univalenti si basa sul fatto che l'aritmetica di Peano del secondo ordine è categorica, cioè tutti i suoi modelli pieni sono isomorfi alla struttura dei numeri naturali, e perciò sono isomorfi tra loro – dove per modelli pieni si intendono quei modelli in cui il dominio delle variabili del secondo ordine è costituito dall'insieme di tutti gli insiemi di numeri naturali. Ma l'aritmetica di Peano del secondo ordine ha anche modelli non pieni che non sono isomorfi alla struttura dei numeri naturali. ([34]) Perciò non è vero che tutti i suoi modelli sono isomorfi. ([35])

In secondo luogo, l'aritmetica di Peano del secondo ordine è categorica solo relativamente a un dato modello della teoria degli insiemi. Non tutti i modelli pieni dell'aritmetica di Peano del secondo ordine sono isomorfi, ma solo quelli appartenenti a uno stesso modello della teoria degli insiemi. Quindi l'aritmetica di Peano del secondo ordine è categorica solo in senso relativo.

([33]) Bourbaki 1962, p. 45.

([34]) I modelli non pieni, o modelli deboli, dell'aritmetica di Peano del secondo ordine sono, naturalmente, modelli in cui il dominio delle variabili del secondo ordine non è costituito da tutti gli insiemi di numeri naturali.

([35]) Per dettagli, cfr. Cellucci 2007, pp. 209-211.

In terzo luogo, modelli isomorfi tra loro non sono realmente la stessa struttura. Shapiro afferma che, “poiché modelli isomorfi sono equivalenti, le proprietà rilevanti di ogni modello dell’assiomatizzazione sono le stesse, e perciò, in un certo senso, ogni modello va altrettanto bene di qualsiasi altro. Possiamo studiare la struttura studiando una sua esemplificazione.” ([36]) Pertanto, tutto quello che possiamo sapere sulla struttura dei numeri naturali possiamo saperlo considerando una sua qualsiasi esemplificazione.

Ma non è così. Per esempio, la definizione dei numeri naturali di Zermelo identifica i numeri naturali $0, 1, 2, 3, \ldots$ con gli insiemi $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\{\emptyset\}\}$, $\{\{\{\emptyset\}\}\}$,... , quella di von Neumann li identifica con gli insiemi $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$,... . Tali definizioni forniscono due esemplificazioni della struttura dei numeri naturali. Perciò, secondo quanto afferma Shapiro, tutto ciò che possiamo sapere sulla struttura dei numeri naturali considerando una di esse possiamo saperlo considerando l’altra.

Ma per lo strutturalismo l’unica cosa che importa riguardo a una data struttura sono le relazioni in cui gli oggetti stanno tra loro. In particolare, l’unica cosa che importa riguardo alla struttura dei numeri naturali è la relazione in cui i numeri naturali stanno tra loro. Allora, nelle esemplificazioni della struttura dei numeri naturali di Zermelo e von Neumann, in cui i numeri naturali sono identificati con certi insiemi, l’unica cosa che importa è la relazione di appartenenza. Questa, infatti, è la relazione in cui i numeri naturali stanno tra loro in tali esemplificazioni.

Ora, la relazione di appartenenza ha proprietà differenti in esse. Per esempio, nell’esemplificazione di von Neumann, $1 \in 3$ poiché $\{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$. Invece, nell’esemplificazione di Zermelo, $1 \notin 3$ poiché $\{\emptyset\} \notin \{\{\{\emptyset\}\}\}$. Ma allora le definizioni dei numeri naturali di Zermelo e von Neumann non possono considerarsi entrambe esemplificazioni della struttura dei numeri naturali. Qual è l’esemplificazione corretta? A questa domanda lo strutturalismo non sa dare una risposta.

([36]) Shapiro 2004, p. 32.

5. – Il platonismo

Secondo il platonismo, la matematica è lo studio di oggetti che non sono né mentali né fisici ma appartengono a un terzo tipo di realtà, che esiste fuori di noi ma è diversa da quella fisica. Tale realtà è in qualche misura conoscibile, altrimenti la matematica sarebbe impossibile. Secondo il platonismo, essa è conoscibile mediante l'intuizione.

Posizioni platoniste possono rintracciarsi in vari matematici, da Hermite e Hardy a Penrose.

Per esempio, Hardy afferma: "Credo che la realtà matematica stia fuori di noi, che la nostra funzione sia di scoprirla o di osservarla, e che i teoremi che noi dimostriamo, e che descriviamo pomposamente come nostre 'creazioni', sono semplicemente delle note alle nostre osservazioni." ([37]) Un matematico è "in primo luogo un osservatore, un uomo che fissa con insistenza" oggetti matematici, li coglie mediante l'intuizione, e "prende nota delle sue osservazioni." ([38])

Ma il platonismo è noto soprattutto attraverso la formulazione di Gödel, secondo cui la realtà matematica esistente fuori di noi è costituita dagli insiemi. Questi formano "una realtà non sensibile, che esiste indipendentemente dagli atti e dalle disposizioni della mente umana, e viene soltanto percepita," sebbene "molto incompletamente, dalla mente umana." ([39]) Essa viene percepita attraverso "l'intuizione," che "è sufficientemente chiara da produrre gli assiomi della teoria degli insiemi." ([40]) In questo modo "gli oggetti matematici sono conosciuti con precisione, e le leggi generali" relative ad essi "possono essere riconosciute con certezza." ([41]) Noi ci formiamo le nostre idee sugli oggetti matematici attraverso il concetto di insieme ma, per avere conoscenza degli insiemi, tale concetto deve essere rappresentato nell'intuizione. Questa rappresentazione è possibile perché noi possiamo "afferrare in modo comprensivo e sicuro" oggetti astratti come

([37]) Hardy 1992, pp. 123-124.
([38]) Hardy 1929, p. 18.
([39]) Gödel 1986-2002, III, p. 323.
([40]) Ivi, II, p. 268.
([41]) Ivi, III, p. 312, nota 18.

gli insiemi, e “le relazioni fondamentali che sussistono tra essi, cioè gli assiomi che valgono per essi,” concentrandoci “più attentamente sui concetti considerati.” ([42])

La posizione di Gödel ha dei difetti che la rendono inadeguata.

1. L’affermazione che noi percepiamo gli insiemi attraverso l’intuizione va incontro alla difficoltà che, mentre noi possiamo avere una percezione degli oggetti sensibili perché questi esercitano un’azione causale su di noi, è difficile sostenere che lo stesso possa valere per oggetti non sensibili come gli insiemi. Per spiegarlo, Gödel è costretto a ipotizzare che esista un organo sensoriale “fisico per rendere possibile trattare impressioni astratte.” ([43]) Ma dell’esistenza di un organo sensoriale fisico capace di percepire gli insiemi infiniti non vi è alcuna traccia.

2. L’affermazione che, attraverso l’intuizione, gli insiemi sono conosciuti con precisione, e le leggi generali relative a essi possono essere riconosciute con certezza deducendole dagli assiomi, è in contrasto con il fatto che, per il secondo teorema di incompletezza di Gödel, la verità di nessun insieme di assiomi per la teoria degli insiemi può essere riconosciuta con certezza. A maggior ragione le leggi generali relative agli insiemi non possono essere riconosciute con certezza deducendole dagli assiomi. La generale inaffidabilità dell’intuizione rende non realistico fondare su essa la certezza degli assiomi della teoria degli insiemi, e quindi dell’intera matematica.

3. Supponiamo che, come propone Gödel, concentrandoci più attentamente sul concetto di insieme I, noi riusciamo a riconoscere con certezza la verità degli assiomi della teoria degli insiemi T, e perciò la loro coerenza. Allora, per il primo teorema di incompletezza di Gödel, esiste un enunciato A che è vero rispetto al concetto di insieme I ma non è dimostrabile in T. Perciò la teoria $\mathrm{T} + \neg A$ è coerente, e quindi ha un modello, diciamo I'. Dunque I' è un modello di T, e $\neg A$ è vero rispetto a I', perciò A è falso rispetto a I'. Pertanto I e I' sono entrambi modelli di T, e quindi sono en-

([42]) *Ibid.*
([43]) Wang 1996, p. 233.

trambi concetti di insieme, ma A è vero rispetto a I e falso rispetto a I′. Di conseguenza I e I′ non sono isomorfi, e perciò sono concetti di insieme essenzialmente differenti.

Ora se, come ci chiede Gödel, noi ci concentriamo più attentamente sul modo in cui abbiamo ottenuto I′, possiamo rappresentarci nell'intuizione il concetto di insieme I′. Abbiamo allora due intuizioni differenti, una delle quali ci dice che il vero concetto di insieme è I, mentre l'altra ci dice che il vero concetto di insieme è I′. Quale di I e I′ è il vero concetto di insieme? Concentrarci più attentamente su I e I′ non ci permetterebbe di dare alcuna risposta a questa domanda.

6. – Il neoformalismo

Secondo il neoformalismo, l'essenza della matematica sta nel metodo formale in quanto tale, e la giustificazione di tale metodo è di tipo empirico.

Il neoformalismo è stato sostenuto da vari matematici e logici, da Mac Lane e Curry a Robinson e Cohen.

Per esempio, Curry afferma che "l'essenza della matematica non sta in alcun particolare tipo di sistema formale, ma nella struttura formale in quanto tale." (44) La matematica "è caratterizzata più dal suo metodo che dal suo argomento." (45) Ora, il suo metodo è il metodo assiomatico formale, perciò "la matematica è la scienza dei metodi formali." (46) Quanto alla giustificazione di tali metodi, non occorre che "ci accertiamo che una teoria sia coerente" prima "di usarla." (47) Noi "accettiamo una teoria fino a quanto è utile" e "non è nota condurre ad errori," la "modifichiamo o scartiamo appena non lo è più." (48) Il secondo teorema di incompletezza di Gödel "ci dice che questo è tutto quello che possiamo fare; una filosofia empirica della scienza ci dice che

(44) Curry 1951, p. 56.
(45) Curry 1977, p. 8.
(46) *Ibid.*, p. 14.
(47) *Ibid.*, p. 16.
(48) *Ibid.*

questo è tutto quello che dobbiamo fare." ([49]) Pertanto "l'accettabilità è relativa alla nostra conoscenza in un dato momento." ([50])

Anche la posizione di Curry ha dei difetti che la rendono inadeguata.

1. Poiché, per il primo teorema di incompletezza di Gödel, è impossibile trovare un unico sistema formale che comprenda tutta la matematica, dire che la matematica è la scienza dei metodi formali equivale a dire che la matematica consiste nel metodo assiomatico formale più qualcosa che trascende tale metodo. Curry descrive questo qualcosa dicendo che, poiché "il concetto di dimostrazione intuitivamente valida non può essere esaurito da alcuna singola formalizzazione," la "dimostrazione matematica è precisamente quella sorta di cosa crescente che gli intuizionisti hanno postulato nel caso di certi insiemi infiniti." ([51]) Infatti, per il primo teorema di incompletezza di Gödel, nessun sistema formale permette di dimostrare neppure tutte le proposizioni vere della teoria elementare dei numeri, ad ogni passo possono venir fuori nuove proposizioni vere la cui dimostrazione richiede l'introduzione di nuovi assiomi, ed anzi esiste un numero infinito di tali proposizioni. Perciò, già nel caso della teoria elementare dei numeri, la nozione di dimostrazione non è fissata una volta per tutte ma è qualcosa che richiede sempre nuove estensioni. In questo senso, come dice Curry, la dimostrazione matematica è una 'cosa crescente'. Tuttavia dirlo è incompatibile con la nozione di dimostrazione del metodo assiomatico formale, che è fissata una volta per tutte e perciò è una cosa fissa, non una cosa crescente.

2. Dire che l'accettabilità è relativa alla nostra conoscenza in un dato momento, equivale a dire che nel metodo assiomatico formale la dimostrazione non garantisce che la proposizione dedotta dagli assiomi sia valida. Questo è incompatibile con lo scopo della dimostrazione nel metodo assiomatico formale, che è quello di dare una giustificazione della proposizione dimostrata.

([49]) *Ibid.*
([50]) Curry 1951, p. 49.
([51]) Curry 1977, p. 15.

7. – Approccio *top down* e approccio *bottom up*

Dati i limiti di strutturalismo, platonismo e neoformalismo, sarebbe difficile considerarli filosofie della matematica soddisfacenti per la matematica attuale. A maggior ragione è difficile supporre che essi possano essere soddisfacenti per la matematica del futuro.

Sebbene fare previsioni sia sempre rischioso, non sembra azzardato affermare che in futuro vi saranno sostanziali progressi nel campo delle scienze della vita e delle scienze sociali, quali la biologia, la psicologia, le neuroscienze, lo studio della mente e della coscienza, la sociologia, l'economia. Tali campi richiedono lo sviluppo di nuova matematica non molto somigliante a quella attuale, poiché sono caratterizzati da un alto grado di non-determinismo e da un grado di complessità così elevato da non essere trattabile con le tecniche della matematica attuale.

Lo sviluppo di tale nuova matematica richiederà presumibilmente un mutamento nel modo di considerare la relazione tra la matematica e i campi non matematici. Come osserva Lévy-Leblond, vi è "un doppio movimento contraddittorio all'interno della matematica, che da un lato tende a diventare totalmente autonoma installando meccanismi di sviluppo propri, e dall'altro continua a trovare motivazione e appoggio nella fisica." ([52])

Questo doppio movimento contraddittorio è in effetti l'espressione di un contrasto tra due approcci differenti alla relazione tra la matematica e i campi non matematici, che possono essere denominati, rispettivamente, approccio *top down* e approccio *bottom up*.

1. L'approccio *top down* cerca di applicare matematica già nota a campi non matematici.

2. L'approccio *bottom up* parte da argomentazioni usate in campi non matematici e cerca di trasformarle in nuova matematica.

L'approccio *top down* porta a usare modelli matematici che riflettono solo rozzamente il campo di applicazione, poiché trascurano molto della sua complessità.

([52]) Lévy-Leblond 1982, p. 203.

Un esempio di approccio *top down* è dato dagli attuali modelli matematici per l'economia, che non sono stati sviluppati a partire dal campo di applicazione.

Invece l'approccio *bottom up* porta a sviluppare nuova matematica a partire da campi non matematici cercando di rispecchiarne tutta la complessità, poiché trasforma le argomentazioni proprie di tali campi in nuova matematica.

Un esempio di approccio *bottom up* è dato dalla procedura con cui Archimede arriva a determinare l'area del segmento di parabola. Egli suppone che oggetti geometrici siano messi sui piatti di una bilancia, poi usa i loro pesi – cioè le loro lunghezze e superfici – e le loro distanze dal fulcro per stabilire, partendo dalla legge dell'equilibrio della leva, l'area del segmento di parabola. Così egli trasforma argomentazioni fisiche in nuova matematica.

Un altro esempio di approccio *bottom up* è dato dallo sviluppo di Newton del calcolo infinitesimale.

Newton dichiara: "Io considero le quantità matematiche" come "descritte da un moto continuo. Le linee sono descritte, e venendo descritte sono generate," attraverso "il moto continuo di punti, le superfici attraverso il moto di linee, i solidi attraverso il moto di superfici, gli angoli attraverso la rotazione di lati, il tempo attraverso il flusso continuo, e similmente negli altri casi. Queste generazioni hanno luogo nella natura fisica." ([53]) Su questa base egli formula "un metodo per determinare le quantità in termini delle velocità del moto o incremento con cui esse sono generate", e chiama " 'flussioni' queste velocità dei moti o incrementi." ([54]) Per esempio, per determinare la flussione della quantità x^n, egli dice: "Si faccia fluire la quantità x uniformemente." ([55]) Allora, "nel tempo in cui la quantità x fluendo diventa $x + o$, la quantità x^n diverrà $(x + o)^n$." ([56]) Qui la quantità infinitesima o corrisponde a una sorta di particella atomica di tempo. Sviluppando $(x + o)^n$ Newton stabilisce che la flussione o velocità di incremento

([53]) Newton 1981, p. 122.
([54]) *Ibid.*
([55]) Ivi, p. 126.
([56]) *Ibid.*

della quantità fisica x^n rispetto a x è nx^{n-1}. Così Newton trasforma argomentazioni fisiche in nuova matematica.

Nell'ultimo secolo l'approccio *top down* è stato dominante. Come voleva Dieudonné, la matematica è stata divisa dalla fisica teorica, dalla statistica e dalla computer science, ed è anche stata divisa al suo interno in matematica pura e matematica applicata, solo per scoprire che alcuni degli sviluppi più interessanti della matematica sono venuti proprio dalla fisica teorica, dalla statistica e dalla computer science.

Nondimeno, qualche esempio di approccio *bottom up* si può trovare anche nell'ultimo secolo. Così la teoria delle funzioni computabili è stata sviluppata da Turing partendo da un modello fisico di macchina calcolatrice, la macchina di Turing. Dopo aver analizzato le operazioni di tale macchina e aver osservato che "tali operazioni comprendono tutte quelle che vengono usate nel computo di un numero", su questa base Turing procede "allo sviluppo della teoria." ([57])

Un altro esempio di approccio *bottom up* è dato dalla ricerca operativa, che parte da un problema e cerca di risolverlo in modo interdisciplinare per sviluppare un modello soddisfacente del tipo di realtà considerata.

Nella matematica del futuro è presumibile che il predominio dell'approccio *top down* si ridurrà, e l'approccio *bottom up* avrà un grande sviluppo.

Naturalmente vi saranno sempre matematici che faranno matematica esclusivamente a partire da altra matematica, ma è presumibile che la società nel suo complesso farà sempre più pressione perché si faccia matematica utile piuttosto che matematica coltivata solo per motivi estetici, come voleva Hardy, secondo cui il matematico "è un creatore di forme" e le forme create da un matematico "devono essere belle" perché la "bellezza è il primo test: nel mondo non vi è un posto permanente per la matematica brutta." ([58])

Presumibilmente questo porterà a un cambiamento nel modo di fare matematica, perché vi è una grande differenza tra una matematica

([57]) Turing 2001 , p. 20.
([58]) Hardy 1992, pp. 13-14.

sviluppata a partire da altra matematica e una matematica sviluppata trasformando argomentazioni usate in campi non matematici in nuova matematica. In questo secondo tipo di matematica non ci si limita a proiettare modelli rozzi sugli aspetti della realtà che si vuole trattare, ma si parte da questi ultimi e, basandosi sulla loro specificità, e sulla specificità degli argomenti propri dei campi a cui appartengono, si trasformano tali argomenti in nuova matematica.

8. – Metodi corrispondenti agli approcci *top down* e *bottom up*

Agli approcci *top down* e *bottom up* corrispondono due diversi modi di intendere il metodo della matematica.

All'approccio *top down* corrisponde il metodo assiomatico. Questo è il metodo, teorizzato per la prima volta da Aristotele negli *Analitici Secondi*, sistematicamente usato da Euclide negli *Elementi*, e poi modificato da Pascal, Pieri, Hilbert e Padoa, in base al quale si assumono alcune proposizioni come punti di partenza assoluti per le dimostrazioni, o assiomi, e si deducono conseguenze da esse. ([59]) Gli assiomi richiedono un qualche tipo di giustificazione, che di solito viene individuata nel fatto che essi sono veri, in un qualche senso. Uno dei sensi più popolari è quello che identifica 'vero' con 'coerente': gli assiomi sono giustificati se sono coerenti.

Che all'approccio *top down* corrisponda tipicamente il metodo assiomatico appare chiaro, ad esempio, da Bourbaki, il quale afferma che "la verità matematica consiste unicamente nella deduzione logica a partire da premesse poste arbitrariamente mediante gli assiomi." ([60]) Gli assiomi, però, devono essere coerenti perché, se una teoria è incoerente, "ogni teorema è nello stesso tempo vero e falso in questa teoria, che in questo caso perde ogni interesse." ([61])

All'approccio *bottom up* corrisponde invece il metodo analitico.

([59]) Aristotele, però, propone il metodo assiomatico non come il metodo della scienza ma come il metodo dell'insegnamento della scienza, una volta che questa sia compiuta. Sull'evoluzione del metodo assiomatico, cfr. Cellucci 1998, capp. 4-5.

([60]) Bourbaki 2007, p. 29.

([61]) Bourbaki 2006, p. 13.

Questo è il metodo, teorizzato per la prima volta da Platone nel *Menone* e nel *Fedone*, in base al quale, per risolvere un problema, si formula, mediante un'inferenza non deduttiva (induttiva, analogica, metaforica, metonimica, diagrammatica, ecc.) a partire dal problema, un'ipotesi che è una condizione sufficiente per la sua soluzione, e si controlla che essa sia plausibile, cioè compatibile con i dati esistenti. ([62]) L'ipotesi, a sua volta, costituisce un problema che deve essere risolto, e viene risolto nello stesso modo. Cioè, si formula, mediante un'inferenza non deduttiva a partire dall'ipotesi, un'altra ipotesi che è una condizione sufficiente per la soluzione del problema costituito dall'ipotesi precedente, e si controlla che essa sia plausibile. E così via. ([63])

Che all'approccio *bottom up* corrisponda tipicamente il metodo analitico appare chiaro, ad esempio, da Newton, il quale afferma che le proposizioni dei suoi *Principia Mathematica* "furono trovate attraverso l'analisi." ([64]) Questo è il metodo dei "matematici degli ultimi tempi", i quali "hanno molto migliorato l'analisi" e "si fermano lì" poiché pensano "di aver risolto un problema" quando ne hanno dato una soluzione con quel metodo, e "in questo modo il metodo della sintesi", cioè il metodo assiomatico, "è quasi messo da parte." ([65])

Uno degli esempi più antichi di uso del metodo analitico riguarda il problema della duplicazione del cubo di lato a. Ippocrate di Chio diede una soluzione di tale problema ricorrendo all'ipotesi che si potessero trovare due medi proporzionali in proporzione continua tra a e $2a$. Poi Menecmo diede una soluzione del problema costituito da tale ipotesi ricorrendo a un'altra ipotesi. E così via.

Un esempio recente di uso del metodo analitico riguarda il problema di Fermat. Ribet diede una soluzione di tale problema ricorrendo all'ipotesi di Taniyama-Shimura che ogni curva ellittica sui razionali è modulare. Poi Wiles e Taylor diedero una soluzione del problema costituito da tale ipotesi ricorrendo a un'altra ipotesi. E così via.

([62]) Sui vari tipi di inferenze non deduttive che permettono di formulare le ipotesi, cfr. Cellucci 2002, pp. 235-295.

([63]) Sul metodo analitico, cfr. Cellucci 2002, 2008a.

([64]) Newton 1971, p. 294.

([65]) *Ibid.*

Si potrebbe pensare che dire, ‘e così via’ sia ingiustificato. Ma questo equivarrebbe a trascurare le implicazioni del secondo teorema di incompletezza di Gödel. Per esempio, nel caso del problema di Fermat, la sua soluzione fa uso di risultati di vari campi della matematica, che sono dimostrabili a partire dagli assiomi della teoria degli insiemi. Ma, per il secondo teorema di incompletezza di Gödel, gli assiomi della teoria degli insiemi non ammettono alcuna giustificazione sicura e perciò sono delle mere ipotesi. La loro giustificazione richiederebbe altre ipotesi, la cui giustificazione, di nuovo in base al secondo teorema di incompletezza di Gödel, richiederebbe a sua volta altre ipotesi. E così via.

Il metodo analitico è sia un metodo di scoperta sia un metodo di giustificazione. In esso, infatti, le ipotesi vengono formulate mediante inferenze non deduttive, tali inferenze permettono di ottenere più ipotesi a partire dalle stesse premesse, e per sceglierne una si devono valutare le ragioni a favore e contro ciascuna di esse. Inoltre le inferenze non deduttive permettono di ottenere così tante ipotesi che generarle tutte prima e vagliarle poi non sarebbe fattibile, perciò la loro generazione e la loro valutazione devono procedere parallelamente. Pertanto la giustificazione non è separabile dalla scoperta.

Il metodo assiomatico è ciò che si ottiene dal metodo analitico quando le ipotesi formulate a un certo stadio vengono considerate come punti di partenza assoluti, di cui non si dà alcuna ulteriore giustificazione attraverso la formulazione di nuove ipotesi. Ma, se si fa questo, allora, secondo l’obiezione di Platone contro il metodo assiomatico, la matematica decade a mera convenzione. In tal caso, infatti, poiché “il principio non è conosciuto, le conclusioni e le proposizioni intermedie sono connesse a partire da ciò che non si conosce”, e “quale espediente potrà mai trasformare una simile convenzione in una scienza?” ([66])

Il metodo assiomatico e il metodo analitico portano a due diverse concezioni della nozione di dimostrazione e della sua funzione.

([66]) Platone, *Repubblica*, VII 533 c 4-6.

Il metodo assiomatico porta alla nozione di dimostrazione secondo cui questa è un'argomentazione deduttiva mediante la quale si ottiene una proposizione a partire da assiomi che sono veri, in un qualche senso. Il suo scopo è quello di dare una giustificazione della proposizione considerata, perciò la dimostrazione è un mezzo di giustificazione.

Il metodo analitico porta alla nozione di dimostrazione secondo cui questa è un'argomentazione non deduttiva mediante la quale si ottiene un'ipotesi a partire da un problema. Il suo scopo è quello di scoprire un'ipotesi capace di dare una soluzione al problema considerato, perciò la dimostrazione è un mezzo di scoperta. ([67])

9. – Matematica pura e applicata

La distinzione tra approccio *top down* e approccio *bottom up* è rilevante per la distinzione tra matematica pura e matematica applicata. Tale distinzione è abbastanza recente poiché risale al secolo diciannovesimo. In esso i matematici cominciarono a introdurre gradualmente concetti privi di un significato fisico diretto e, intorno alla metà del secolo, era ormai ampiamente accettata l'idea che si potessero introdurre concetti e teorie matematiche prive di una interpretazione fisica immediata. Di lì è nata la distinzione corrente tra matematica pura e matematica applicata, secondo la quale la matematica pura è la parte della matematica rivolta al suo interno, mentre la matematica applicata è la parte della matematica rivolta all'esterno, cioè all'uso in altri campi.

Tale distinzione non ha senso dal punto di vista dell'approccio *bottom up*, secondo cui la matematica si sviluppa partendo da argomentazioni usate in campi non matematici e cercando di trasformarle in nuova matematica. Esso ha senso solo dal punto di vista dell'approccio *top down*, secondo cui, invece, la matematica si sviluppa puramente dall'interno, e solo successivamente si cerca di

([67]) Sulla distinzione tra queste due nozioni di dimostrazione, cfr. Cellucci 2008b.

vedere se certi suoi concetti e teorie ammettano applicazioni a campi non matematici.

Anche dal punto di vista dell'approccio *top down*, però, la distinzione tra matematica pura e matematica applicata è difficilmente giustificabile. Questo viene talora riconosciuto anche dai sostenitori di tale approccio. Per esempio, Gowers ammette che "non vi è alcuna chiara linea di divisione tra matematica pura e matematica applicata." ([68]) Dal canto suo, Suppes dichiara che "dal punto di vista filosofico non vi è alcuna netta distinzione tra matematica pura e matematica applicata, nonostante le tante affermazioni contrarie." ([69])

Alcuni sostenitori dell'approccio *top down* hanno cercato di giustificare la distinzione in termini di metodo, affermando che "la distinzione tra matematica pura e applicata è rilevante" perché "mentre il metodo della prima potrebbe, teoricamente, essere puramente sintetico, quello della seconda è tenuto a essere parzialmente analitico." ([70]) Ma questo è contraddetto dal fatto che molti altri sostenitori dell'approccio *top down* affermano che anche la matematica applicata deve basarsi sul metodo sintetico, cioè assiomatico.

Per esempio, Dirac afferma che un "nuovo schema diventa una teoria fisica precisa quando sono specificati tutti gli assiomi e le regole di manipolazione che governano le quantità matematiche, e quando inoltre sono stabilite certe leggi che connettono i fatti fisici con il formalismo matematico." ([71]) In un'applicazione della teoria "verrebbe data una certa informazione fisica che si passerebbe a esprimere mediante equazioni tra le quantità matematiche. Poi si dedurrebbero nuove equazioni con l'aiuto degli assiomi e delle regole di manipolazione." ([72]) La "giustificazione dell'intero schema si fonda, oltre che sulla coerenza interna, sull'accordo dei risultati finali con l'esperimento." ([73])

([68]) Gowers 2008, p. ix.
([69]) Suppes 2002, p. 33.
([70]) Welton-Monahan-Mellone 1962, p. 233.
([71]) Dirac 1958, p. 16.
([72]) *Ibid.*
([73]) *Ibid.*

10. – Filosofia della matematica 'mainstream' e 'maverick'

La matematica del futuro richiederà un'opportuna filosofia della matematica.

Nella filosofia della matematica attuale si possono distinguere due tendenze, denominate rispettivamente filosofia della matematica 'mainstream' [prevalente] e filosofia della matematica 'maverick' [fuori del branco, dissenziente]. (74)

La filosofia della matematica 'mainstream' considera la matematica come un corpo di conoscenze statico ed è principalmente interessata alla giustificazione della conoscenza matematica. Per essa l'attività matematica è deduzione di teoremi da assiomi che sono veri in un qualche senso. Questo garantisce la validità dei teoremi. La logica matematica fornisce il modello dell'attività matematica, e mostra che questa è ben fondata. La filosofia della matematica 'mainstream' non dà una risposta univoca alla domanda di che cosa si occupi la matematica, ma i suoi esponenti concordano nel ritenere che la logica matematica svolga un ruolo essenziale nello spiegare la natura della matematica.

La filosofia della matematica 'maverick', invece, considera la matematica come un corpo di conoscenze dinamico, ed è principalmente interessata alla scoperta della conoscenza matematica. Per essa l'attività matematica è soluzione di problemi mediante ipotesi che sono plausibili. La loro soluzione richiede la scoperta di opportune ipotesi, che avviene attraverso l'uso di inferenze non deduttive. La filosofia della matematica 'maverick' non dà una risposta univoca alla domanda come si sviluppi l'attività matematica, ma i suoi esponenti concordano nel ritenere che la logica matematica non ne fornisca un'immagine adeguata.

La filosofia della matematica 'mainstream' consiste delle tre grandi scuole fondazionali del primo Novecento, cioè logicismo, formalismo e intuizionismo, e delle posizioni che ne sono derivate nel secondo

(74) Questa terminologia risale a Aspray-Kitcher 1988 ed è ora corrente, come si vede ad esempio da Hersh 1997 oppure Mancosu 2008. Sui suoi possibili limiti, cfr. Cellucci 2009.

Novecento, cioè neologicismo, platonismo, neoformalismo, implicazionismo, strutturalismo, finzionalismo, internalismo, costruttivismo.

La filosofia della matematica 'maverick' risale alla dissertazione di Lakatos, *Essays in the Logic of Mathematical Discovery*, che fornì la base del suo libro postumo *Proofs and Refutations*. ([75]) Successivamente Davis, Hersh, Kline, Kitcher, Tymoczko, Rota, Gillies, Grosholz, van Kerkhove, van Bengedem, Ferreiros, Gray hanno esteso l'approccio maverick in varie direzioni. ([76])

Per esempio, Hersh afferma che le scuole di filosofia della matematica del primo Novecento avevano un "presupposto comune," cioè che "si dovesse dare un fondamento assolutamente affidabile alla matematica," ma questo "scopo non è stato mai raggiunto, e pochi ancora sperano che possa essere raggiunto." ([77]) In realtà quelle scuole "falsificano una parte della realtà della nostra esperienza quotidiana," perciò dobbiamo abbandonarle, e abbandonare "la ricerca di una certezza assoluta della verità matematica." ([78]) Nella "matematica non abbiamo la certezza assoluta," e negarlo è "ipocrisia." ([79]) Invece di "cercare invano dei fondamenti, o di sentirci disorientati e delegittimati dalla mancanza di fondamenti," dobbiamo "cercare di guardare che cosa la matematica è realmente, e renderne conto come parte della conoscenza umana in generale. Cioè, dobbiamo riflettere onestamente su che cosa facciamo quando usiamo, insegniamo, inventiamo, o scopriamo matematica." ([80])

Similmente, Rota afferma che "la filosofia della matematica" trascura "completamente le questioni filosofiche con cui i matematici devono confrontarsi nel loro lavoro." ([81]) Invece deve farlo, per esempio

([75]) Cfr. Lakatos 1961, 1976.

([76]) Cfr. Davis-Hersh 1980, Kline 1980, Kitcher 1983, Tymoczko 1985, Kac-Rota-Schwartz 1986, Aspray-Kitcher 1988, Gillies 1992, Rota 1997, Hersh 1997, Hersh 1998, Grosholz-Breger 2000, Corfield 2003, Hersh 2006, Ferreiros-Gray 2006, Grosholz 2007, van Kerkhove-van Bengedem 2007.

([77]) Hersh 1998, p. 17.

([78]) Ivi, p. 18.

([79]) Ivi, p. 20.

([80]) Ivi, p. 21.

([81]) Rota 1997, p. 163.

deve confrontarsi con la questione degli argomenti euristici mediante i quali i matematici arrivano ai loro risultati. Gli "argomenti euristici si presentano comunemente nella pratica della matematica," e tuttavia la loro importanza "non è stata riconosciuta dalla filosofia della matematica, nonostante il ruolo cruciale che essi svolgono nella scoperta matematica." ([82]) Perciò la filosofia della matematica deve occuparsene. Anche il valore di una dimostrazione matematica, come quella dell'ultimo teorema di Fermat, "non sta in ciò che essa dimostra, ma in ciò che essa ha aperto per noi, in ciò che renderà possibile," cioè nelle "nuove tecniche che porteranno a stabilire ulteriori relazioni tra teoria dei numeri e geometria algebrica." ([83]) Dunque il maggior valore di una dimostrazione matematica sta nel suo potere euristico, nella sua capacità di fornirci nuovi mezzi di scoperta. ([84])

Dai caratteri sopra descritti appare evidente che la filosofia della matematica 'mainstream' è omogenea all'approccio *top down*, quella 'maverick' all'approccio *bottom up*.

11. – Insostenibilità della filosofia della matematica 'mainstream'

La filosofia della matematica 'mainstream' e quella 'maverick' non sono sullo stesso piano rispetto alla sostenibilità. Infatti, la tesi della filosofia della matematica 'mainstream', che l'attività matematica è deduzione di teoremi da assiomi che sono veri in un qualche senso, è insostenibile per almeno due motivi.

1. In base al primo teorema di incompletezza di Gödel, per ogni sistema di assiomi per qualsiasi campo della matematica che soddisfi certe condizioni minime, esistono proposizioni vere di quel campo della matematica che non possono essere dedotte dagli assiomi. Dunque l'attività matematica non può essere ridotta, come sostiene la filosofia della matematica 'mainstream', alla deduzione di teoremi da assiomi.

Contro questa affermazione si potrebbe obiettare che il risultato di

([82]) Ivi, p. 134.
([83]) Ivi, p. 144.
([84]) Per un esame più approfondito del pensiero di Rota, cfr. Cellucci 2009.

Gödel non impedisce di affermare che l'essenza della matematica consista nel metodo assiomatico formale. Ma questa obiezione non è valida perché, come abbiamo visto in relazione al neoformalismo, in base al risultato di Gödel tutt'al più si potrebbe affermare che l'essenza della matematica consiste nel metodo assiomatico formale più qualcosa che trascende tale metodo. Ma questo qualcosa non può consistere nel fatto che la dimostrazione matematica è una cosa crescente perché, in base alla nozione di dimostrazione dell'approccio *top down*, la dimostrazione è una cosa fissa.

Che la dimostrazione sia una cosa crescente è compatibile solo con la nozione di dimostrazione dell'approccio *bottom up*, in base alla quale la dimostrazione è una derivazione non deduttiva di un'ipotesi da un problema, tale ipotesi è a sua volta un problema che deve essere risolto, e così via con un processo potenzialmente infinito.

2. In base al secondo teorema di incompletezza di Gödel, per ogni sistema di assiomi per qualsiasi campo della matematica che soddisfi certe condizioni minime, è impossibile stabilire con mezzi sicuramente affidabili se gli assiomi sono veri, neppure nel senso debole che essi sono coerenti. ([85]) Dunque non si può affermare, come fa la filosofia della matematica 'mainstream', che gli assiomi da cui l'attività matematica deduce i teoremi sono veri in un qualche senso. Infatti non si può sapere se gli assiomi sono veri.

Perciò non vi è alcuna garanzia che il metodo assiomatico non porti a falsità. Inoltre la coerenza non è un criterio adeguato di verità perché, per un corollario del primo teorema di incompletezza di Gödel, esistono estensioni dell'aritmetica di Peano che sono coerenti ma in cui si possono dimostrare teoremi che sono falsi nella struttura dei numeri naturali. ([86]) Dunque, non solo non vi è alcuna garanzia che il metodo assiomatico non porti a falsità, ma anzi si può dimostrare che esso, anche quando un sistema di assiomi è coerente, può portare a falsità.

Contro questa affermazione si potrebbe obiettare che la matematica non ha bisogno della certezza assoluta per la sua giustificazione, una

([85]) Per una discussione di questo punto, cfr. Cellucci 2008b.
([86]) Per dettagli, cfr. Cellucci 2007, pp. 178-179.

teoria matematica è accettabile fino a che non si scopre che essa conduce ad errori, nel qual caso la sia modifica o la si scarta. Ma questa obiezione non è valida perché, come abbiamo visto a proposito del neoformalismo, essa implica che nel metodo assiomatico la dimostrazione non fornisca una giustificazione della validità della proposizione derivata deduttivamente dagli assiomi. Questo è incompatibile con la filosofia della matematica ‘mainstream’, per la quale lo scopo della dimostrazione è dare una giustificazione della proposizione dimostrata.

Dire che una teoria matematica è accettabile fino a che non si scopre che essa conduce ad errori è compatibile solo con la filosofia della matematica ‘maverick’, per la quale scopo della dimostrazione è scoprire un’ipotesi capace di dare una soluzione del problema considerato. Infatti le ipotesi sono sempre provvisorie, a ogni passo possono emergere nuovi dati che possono essere incompatibili con le ipotesi, perciò l’accettabilità delle ipotesi è relativa alla nostra conoscenza in un dato momento.

12. – Memorandum per la filosofia della matematica del futuro

Dai limiti della filosofia della matematica ‘mainstream’ si possono trarre alcune indicazioni per la filosofia della matematica del futuro.

1. *Lo scopo della filosofia della matematica non può essere diverso da quello della matematica*. Essa deve mirare a far progredire la conoscenza matematica.

Secondo la filosofia ‘mainstream’, gli scopi della filosofia della matematica differiscono radicalmente da quelli della matematica. Mentre questa fa avanzare la conoscenza, la filosofia della matematica si limita a far luce su quello che già conosciamo. Essa non contribuisce al progresso della conoscenza, fa solo chiarezza su ciò che già sappiamo.

Ma così la filosofia ‘mainstream’ rende la filosofia della matematica una disciplina marginale e in ultima analisi irrilevante. Se essa deve essere rilevante, deve servire al progresso della matematica.

2. *La principale questione della filosofia della matematica non può essere quella del fondamento della matematica*. Deve essere invece quella di come l’attività matematica effettivamente si sviluppa.

Secondo la filosofia 'mainstream', quella del fondamento è la principale questione della filosofia della matematica.

Ma questo è insostenibile, perché i teoremi di incompletezza di Gödel implicano che non si può dare un fondamento assoluto e assolutamente certo alla matematica.

3. *La filosofia della matematica deve render conto di tutti gli aspetti dell'attività matematica*. Essi comprendono questioni come la scoperta, la spiegazione, la comprensione, l'uso di diagrammi.

Per esempio, per quanto riguarda la scoperta, secondo la filosofia 'mainstream' la filosofia della matematica deve occuparsi solo dei prodotti del pensiero matematico. Lo studio del processo di produzione non può essere oggetto della filosofia della matematica, perché l'attività "di un cervello creativo non ha mai avuto alcuna spiegazione razionale, né in matematica né in altri campi." ([87])

Ma questo è contraddetto da numerosi casi storici, i quali mostrano che la matematica è un'attività razionale in ogni suo momento, ivi compreso quello più importante, la scoperta. Fin dall'antichità molti hanno riconosciuto che la scoperta è un processo razionale e che per esso esiste un metodo, cioè il metodo analitico.

Dopo di allora, fino alla nostra epoca, molti hanno ribadito che la matematica è un'attività razionale in ogni suo momento, ivi compreso quello della scoperta. Per esempio Poincaré, nel suo articolo 'L'invenzione matematica', si propone di sviluppare una psicologia della scoperta per far luce sulla razionalità umana. Egli infatti afferma che "la genesi dell'invenzione matematica è un problema che deve ispirare il più vivo interesse allo psicologo," perché nell'invenzione matematica la mente umana "agisce soltanto attraverso se stessa e su se stessa, perciò studiandola "possiamo sperare di arrivare a cogliere ciò che vi è di più essenziale nella mente umana." ([88])

Studiare il processo della scoperta è essenziale per la filosofia della matematica perché solo migliorando i metodi di scoperta esistenti e

([87]) Dieudonné 1988, p. 38.

([88]) Poincaré 1908, p. 43. Una ripresa, sebbene un po' riduttiva, del tentativo di Poincaré è Hadamard 1954. Sul lavoro attuale in tal senso, v. ad esempio Weisberg 2006.

inventandone di nuovi essa può contribuire al progresso della matematica. Così vi contribuirono, ad esempio, Ippocrate di Chio e Platone inventando il metodo analitico, e ancora Platone nel *Parmenide* inventando il metodo di dimostrazione per induzione. ([89])

Oltre alla scoperta, la filosofia della matematica deve occuparsi degli altri aspetti dell'attività matematica. Trascurandoli, la filosofia della matematica 'mainstream' dà un'idea distorta dell'attività matematica.

Tale è il caso, ad esempio, dell'uso di diagrammi. Nella matematica greca esso occupava un posto centrale. È per questo motivo che Platone mette in bocca al giovane matematico Teeteto l'affermazione che "la conoscenza non è altro che percezione." ([90]) Tale affermazione era naturale per un matematico greco, perché allora la matematica era soprattutto geometria, e la geometria, come si vede da Euclide, si basava essenzialmente sull'uso di diagrammi, e perciò sulla percezione.

Nell'ultimo secolo, invece, è prevalsa un'ideologia contraria all'uso di diagrammi. È emblematica l'esclamazione di Dieudonné durante un convegno a Royaumont nel 1959: "Abbasso Euclide! Morte ai triangoli!" Questa divenne la parola d'ordine del Bourbaki, che nelle sue pubblicazioni si fece un punto di onore di non usare alcun diagramma. Al riguardo Cartier afferma, e non solo scherzosamente, che "i membri del Bourbaki erano Puritani, e i Puritani sono fortemente contrari alle rappresentazioni figurative delle verità della loro fede." ([91]) Secondo Cartier, il rifiuto dei diagrammi da parte del Bourbaki fu dovuto in parte "all'influenza di persone come Russell, che affermavano di poter dimostrare tutto formalmente." ([92]) In effetti, Russell aveva scritto che "prima sia i filosofi sia i matematici ritenevano che le dimostrazioni della geometria si basassero sulla figura; oggi si sa che questo è falso. Nei libri migliori non vi è alcuna figura. Il ragionamento procede in base alle rigorose regole della logica formale, partendo da un insieme di assiomi formulati dall'inizio." ([93])

([89]) Cfr. Acerbi 2000.
([90]) Platone, *Teeteto*, 151 e 2-3.
([91]) Senechal 1998, p. 27.
([92]) *Ibid.*
([93]) Russell 1994, p. 92.

Ma l'ideologia contraria all'uso dei diagrammi non riguarda solo il Bourbaki. Come osserva Needham, sarebbe ingiusto e irrazionale se vi fosse una legge che prescrivesse, 'La musica non deve mai essere ascoltata o eseguita!', ma "nella nostra società di matematici abbiamo una legge di quel genere. Non è una legge scritta, e quelli che la contravvengono possono anche prosperare, ma essa dice, 'La matematica non deve essere visualizzata!'," e in effetti "negli ultimi cento anni l'onore del ragionamento visivo in matematica è stato appannato." ([94])

Che l'uso dei diagrammi debba essere evitato e il ragionamento debba procedere unicamente deducendo conseguenze da un insieme di assiomi formulati dall'inizio, è una perfetta espressione della filosofia della matematica 'mainstream', secondo la quale escludere i diagrammi basando tutto sulla deduzione da assiomi è un dogma di fede. Ma si tratta di un dogma assolutamente non realistico perché in matematica si fa continuamente uso di diagrammi, dalla retta numerica ai grafici cartesiani, dai diagrammi di Hasse a quelli di Cailey, e così via. ([95])

Questo è un esempio di come la filosofia della matematica 'mainstream' dia un'idea distorta dell'attività matematica: essa porta a trascurarne un aspetto essenziale, qual è l'uso di diagrammi. Nello stesso modo, essa porta a trascurarne altri aspetti essenziali, come la spiegazione e la comprensione matematica. ([96])

L'idea distorta dell'attività matematica a cui conduce la filosofia della matematica 'mainstream' si riflette sul modo in cui la matematica viene spesso presentata nei manuali e nei corsi. Come osserva Kline, "le levigate presentazioni dei corsi non mostrano le lotte del processo creativo, le frustrazioni, e la lunga e ardua via che i matematici devono percorrere per raggiungere una struttura afferrabile." ([97]) Esse danno "l'impressione che i matematici passino di teorema in teorema quasi naturalmente" e "che gli argomenti siano completamente definiti e sistemati." ([98])

([94]) Needham 1997, p. vii.
([95]) Per esempio, sui diagrammi di Cayley, cfr. Starikova 2010.
([96]) Sulla spiegazione matematica, cfr. Cellucci 2008c.
([97]) Kline 1990, I, p. xi.
([98]) *Ibid.*

Omettendo aspetti essenziali dell'attività matematica, la filosofia della matematica 'mainstream' ne impoverisce il contenuto. La filosofia della matematica, invece, non deve omettere alcun aspetto essenziale dell'attività matematica. Solo così può elaborare idee e metodi utili per lo sviluppo della matematica.

Ringraziamenti. – Ringrazio Riccardo Ricci e due anonimi recensori per osservazioni e commenti su una prima versione di questo articolo.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

ACERBI, F. (2000), 'Plato: *Parmenides* 149 a7-c3. A proof by complete induction?', *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 55, pp. 57-76.

ASPRAY, W. e KITCHER, P. (a cura di) (1988), *History and philosophy of modern mathematics*, University of Minnesota Press, Minneapolis.

BOURBAKI, N. (1962), 'L'architecture des mathématiques', in F. Le Lionnais (ed.), *Les grands courants de la pensée mathématique*, Blanchard, Paris, pp. 35-47.

BOURBAKI, N. (2006), *Théorie des ensembles*, Springer, Berlin.

BOURBAKI, N. (2007), *Éléments d'histoire des mathématiques*, Springer, Berlin. (Trad. it., Feltrinelli, Milano 1963).

CARTIER, P. (1997), *Vie et mort de Bourbaki. Notes sur l'histoire et la philosophie des mathématiques I*, Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Paris.

CELLUCCI, C. (1998), *Le ragioni della logica*, Laterza, Bari.

CELLUCCI, C. (2002), *Filosofia e matematica*, Laterza, Bari.

CELLUCCI, C. (2007), *La filosofia della matematica del Novecento*, Laterza, Bari.

CELLUCCI, C. (2008a), *Perché ancora la filosofia*, Laterza, Bari.

CELLUCCI, C. (2008b), 'Why proof? What is a proof?', in R. Lupacchini e G. Corsi (eds.), *Deduction, computation, experiment. Exploring the effectiveness of proof*, Springer, Berlin, pp. 1-27.

CELLUCCI, C. (2008c), ' The nature of mathematical explanation', *Studies in History and Philosophy of Science*, vol. 39, pp. 202-210.

CELLUCCI, C. (2009), 'Indiscrete variations on Gian-Carlo Rota's themes', in E. Damiani, O. D'Antona, V. Marra e F. Palombi (eds.), *Combinatorics to philosophy. The legacy of G. C. Rota*, Springer, New York 2009, pp. 211-228. Ristampato in M. Pitici (a cura di), *The best writings on mathematics 2010*, Princeton University Press, Princeton, di prossima pubblicazione.

CLEARY, J.J. (1995), *Aristotle and mathematics: aporetic method in cosmology and metaphysics*, Brill, Leiden.

CORFIELD, D. (2003), *Towards a philosophy of real mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge.

CURRY, H.B. (1951), *Outlines of a formalist philosophy of mathematics*, North-Holland, Amsterdam.

CURRY, H.B. (1977), *Foundations of mathematical logic*, Dover, New York.

DAVIS, P.J. e HERSH, R. (1980), *The mathematical experience*, Birkhäuser, Boston. (Trad. it., Edizioni di Comunità, Milano 1985).

DEDEKIND, J.W.R. (1932), 'Was sind und was sollen die Zahlen?', in J.W.R. Dedekind, *Gesammelte mathematische Werke*, vol. III, Vieweg, Braunschweig, pp. 335-391. (Trad. it. in Dedekind 1982, pp. 79-128).

DEDEKIND, J.W.R. (1974), 'Lettera a Keferstein, 27 febbraio 1890', in M.-A. Sinaceur, '*L'infini et les nombres*', *Revue d'Histoire des Sciences*, vol. 27 (1974), pp. 251-278. (Trad. it. in Dedekind 1982, pp. 154-156).

DEDEKIND, J.W.R. (1982), *Scritti sui fondamenti della matematica*, a cura di F. Gana, Bibliopolis, Napoli.

de L'Hospital, G. (1716), *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, Montalant, Paris.

DEVLIN, K. (2008), 'What will count as mathematics in 2100?', in B. Gold e R.A. Simon (a cura di), *Proof and other dilemmas. Mathematics and philosophy*, The Mathematical Association of America, Washington, pp. 292-311.

DIEUDONNÉ, J. (1964), 'Recent developments in mathematics', *The American Mathematical Monthly*, vol. 71, pp. 239-248.

DIEUDONNÉ, J. (1988), *Pour l'honneur de l'esprit humain. Les mathématiques aujourd'hui*, Hachette, Paris.

DIRAC, P. (1958), *The principles of quantum mechanics*, Oxford University Press, Oxford.

FERREIROS, J. (1999), *Labyrinth of thought*, Birkhäuser, Boston.

FERREIROS, J. e Gray, J.J. (a cura di) (2006), *The architecture of modern mathematics. Essays in history and philosophy*, Oxford University Press, Oxford.

GILLIES, D. (a cura di) (1992), *Revolution in mathematics*, Oxford University Press, Oxford.

GÖDEL, KURT (1986-2002), *Collected works*, a cura di Solomon Feferman et al., Oxford University Press, Oxford. (Trad. it., Bollati Boringhieri, Torino 1999-2009).

GÖWERS, T. (a cura di) (2008), *The Princeton companion to mathematics*, Princeton University Press, Princeton.

GRIFFITHS, P.A. (2000), 'Mathematics at the turn of the millennium', *The American Mathematical Monthly*, vol. 107, No. 1, pp. 1-14.

GROSHOLZ, E. (2007), *Representation and productive ambiguity in mathematics and the sciences*, Oxford University Press, Oxford.

GROSHOLZ, E. e BREGER, H. (a cura di) (2000), *The growth of mathematical knowledge*, Kluwer, Dordrecht.

HADAMARD, J. (1954), *The psychology of invention in the mathematical field*, Dover, Mineola, NY. (Trad. it., Cortina, Milano 1993).

HARDY, G.H. (1929), 'Mathematical proof', *Mind*, vol. 38, pp. 1-25.

HARDY, G.H. (1992), *A mathematician's apology*, Cambridge University Press, Cambridge. (Trad. it., Garzanti, Milano 1989).

HERSH, R. (1997), *What is mathematics, really?*, Oxford University Press, Oxford. (Trad. it., Baldini Castoldi Dalai, Milano 2001).

HERSH, R. (1998), 'Some proposals for reviving the philosophy of mathematics', in T. Tymoczko (ed.), *New directions in the philosophy of mathematics*, Princeton University Press, Princeton, pp. 9-28.

HERSH, R. (a cura di) (2006), *18 unconventional essays on the nature of mathematics*, Springer, New York.

HILBERT, D. (1926), 'Über das Unendliche', *Mathematische Annalen*, vol. 95, pp. 161-190. (Trad. it. in Hilbert 1985, pp. 233-266).

HILBERT, D. (1929), 'Probleme der Grundlegung der Mathematik', *Mathematische Annalen*, vol. 102, pp. 1-9. (Trad. it. in Hilbert 1985, pp. 291-300).

HILBERT, D. (1931), 'Die Grundlegung der elementaren Zahlenlehre', *Mathematische Annalen*, vol. 104, pp. 485-494. (Trad. it. in Hilbert 1985, pp. 313-323).

HILBERT, D. (1985), *Ricerche sui fondamenti della matematica*, a cura di V.M. Abrusci, Bibliopolis, Napoli.

HUET, S. (1998), 'Bourbaki est mort, CQFD', *Liberation*, 28 aprile.

KAC, M., ROTA, G.-C. e SCHWARTZ, J.T. (1986), *Discrete thoughts. Essays on mathematics, science, and philosophy*, Birkhäuser, Boston.

KITCHER, P. (1983), *The nature of mathematical knowledge*, Oxford University Press, Oxford.

KLINE, N. (1980), *Mathematics, the loss of certainty*, Oxford University Press, Oxford. (Trad. it., Mondadori, Milano 1985).

KLINE, M. (1990), *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford University Press, Oxford. (Trad. it., Einaudi, Torino 1999).

LAKATOS, I. (1961), *Essays in the logic of mathematical discovery*, PhD thesis, Cambridge.

LAKATOS, I. (1976), *Proofs and refutations*, a cura di J. Worrall e E. Zahar. Cambridge University Press, Cambridge. (Trad. it., Feltrinelli, Milano 1979).

LÉVY-LEBLOND, J.-M. (1982), *Physique et mathématiques*, in Maurice Loi et al., *Penser les mathématiques*, Editions du Seuil, Paris, pp. 195-210.

MANCOSU, P. (ed.) (2008), *The philosophy of mathematical practice*, Oxford University Press, Oxford.

NEEDHAM, T. (1997), *Visual complex analysis*, Oxford University Press, Oxford.

NEWTON, I. (1971), *MS Add. 3698, f. 101*, in I. B. Cohen, *Introduction to Newton's 'Principia'*, Cambridge University Press, Cambridge, pp. 292-294.

NEWTON, I. (1981), 'The 1704 De Quadratura Curvarum: final text additions', in *The* *mathematical papers*, a cura di D. T. Whiteside, vol. VIII, Cambridge University Press, Cambridge, pp. 122-159.

POINCARÉ, H. (1908), *Science et méthode*, Flammarion, Paris. (Trad. it., Einaudi, Torino 1997).

ROTA, G.-C. (1997), *Indiscrete thoughts*, Birkäuser, Boston.

RUSSELL, B. (1994), *Mysticism and logic*, Routledge, London. (Trad. it., Newton Compton, Roma 1970).

SENECHAL, M. (1998), 'The continuing silence of Bourbaki', *The Mathematical Intelligencer*, vol. 19, pp. 22-28.

SHAPIRO, S. (1997), *Philosophy of mathematics. Structure and ontology*, Oxford University Press, Oxford.

SHAPIRO, S. (2000), *Thinking about mathematics. The philosophy of mathematics*, Oxford University Press, Oxford.

SHAPIRO, S. (2004), 'Foundations of mathematics: metaphysics, epistemology, structure', *The Philosophical Quarterly*, vol. 54, pp. 16-37.

STARIKOVA, I. (2010), 'Why do mathematicians need different ways of presenting mathematical objects? The case of Cayley graphs', *Topoi*, vol. 29, pp. 41-51.

SUPPES, P. (2002), *Representation and invariance of scientific structures*, CSLI, Stanford.

TURING, A.M. (2001), *Mathematical logic*, a cura di R.O. Gandy e C.E.M. Yates, North-Holland, Amsterdam.

TYMOCZKO, T. (a cura di) (1985), *New directions in the philosophy of mathematics*, Birkhäuser, Boston.

VAN KERKHOVE, B. e VAN BENGEDEM, J.P. (a cura di) (2007), *Perspectives on mathematical practices*, Springer, Dordrecht.

WANG, H. (1996), *A logical journey. From Gödel to philosophy*, The MIT Press, Cambridge, Mass.

WEISBERG, R.W. (2006), *Creativity*, Wiley, New York.

WELTON, J., MONAHAN, A.J., MELLONE, S.H. (1962), *Intermediate logic*, 4 ed., University Tutorial Press, London.

ZELLINI, P. (1985), *La ribellione del numero*, Adelphi, Milano.

Carlo Cellucci
Dipartimento di Filosofia, Università di Roma "La Sapienza"
carlo.cellucci@uniroma1.it